Решения задач по математике заочной олимпиады ФМБФ 2002 - 2003 года.

1. (3 баллов) Пусть вписанная окружность с центром I касается стороны AB в точке K. Тогда в треугольнике AKI: $\angle AKI = 90^\circ$, $AK = p - a$ (это несложно получить, если обозначить через x, y, z расстояния от вершин A, B, C до ближайших точек касания сторон со вписанной окружностью; после этого приходим к двум уравнениям $2(x+y+z) = 2p$ и $y+z=a$) и $KI = r$, где p — полупериметр треугольника ABC, а r — радиус вписанной окружности. Поэтому треугольник AKI можно построить. Из него находим $\angle BAC$, так как $\angle IAK = \frac{1}{2}\angle BAC$. Кроме того, в исходном треугольнике нам известна высота h_a, опущенная на сторону BC, поскольку $h_a a = 2pr$. Осталось построить треугольник по стороне, высоте, опущенной на нее, и углу, противолежащему стороне. Построив сторону BC, получим, что вершина A должна лежать, с одной стороны, на прямой, параллельной BC и отстоящей от нее на расстояние h_a, и, с другой стороны, на дуге, опирающейся на хорду BC и содержащую угол $\angle BAC$.

2. (3 баллов) Пусть $\angle AL_1L_3 = \beta$, $\angle AL_1L_2 = \gamma$ и $AL_1 = l$. Легко найти, что $AL_3 = \dfrac{bc}{a+b}$ и $BL_1 = \dfrac{ac}{b+c}$. Поэтому из треугольника AL_3L_1 получим, что: $\dfrac{l}{\sin\left(\beta + \frac{A}{2}\right)} = \dfrac{bc}{(a+b)\sin\beta}$, а из треугольника ABL_1: $\dfrac{l}{\sin B} = \dfrac{ac}{(b+c)\sin\frac{A}{2}}$. Откуда вытекает, что: $\operatorname{ctg}\beta = \left(2\dfrac{a+b}{b+c} - 1\right)\dfrac{\sin A}{1-\cos A}$. Аналогично: $\operatorname{ctg}\gamma = \left(2\dfrac{a+c}{b+c} - 1\right)\dfrac{\sin A}{1-\cos A}$. Тогда: $\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma = \left(2\dfrac{a+b}{b+c} - 1\right)\left(2\dfrac{a+c}{b+c} - 1\right)\left(\dfrac{\sin A}{1-\cos A}\right)^2$, что равно 1, в чем можно убедиться, раскрыв скобки и подставив $A = 120^\circ$ и $a^2 = b^2 + c^2 + bc$. Поэтому $\angle L_2L_1L_3 = \beta + \gamma = 90^\circ$.

3. (5 баллов) Пусть F_n — количество веселых наборов, которое можно составить из чисел от 1 до n. Очевидно, что $F_1 = F_2 = 1$. Все веселые наборы, составленные из чисел от 1 до n, можно разделить на две части: наборы, содержащие число n, и наборы, не содержащие число n. Первых, как легко понять, ровно F_{n-1}, а вот вторых ровно F_{n-2}, так как они получаются из наборов, составленных из чисел от 1 до n-2, путем увеличения каждого числа на 1 и добавлением числа n. Таким образом, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, поэтому числа F_n — обычна последовательность Фибоначчи.

4. (4 баллов) Индукция по числу городов. Для одного или двух городов утверждение очевидно. Пусть для n городов искомый город найдется. Обозначим этот город буквой A. Добавим еще один город, скажем, B. Тогда либо есть дорога AB, либо BA. В первом случае требуемый город — A, во втором — B.

5. (5 баллов) Извините, задача некорректна. Например, при a_1=100, b_1=100, a_2=1, b_2=2, n=2 справедливо обратное неравенство.

6. (7 баллов) Если mn не делится на 4, то, понятно, разрезать не получится. Если же одно из чисел m и n делится на 4, то разрезание очевидно. Пусть теперь mn делится на 4, но ни одно из чисел m и n на 4 не делится. Припишем каждой клетке два числа (i, j)— ее координаты — номер строки, начиная с верхней, и номер столбца, начиная с левого. Отметим клетки, для которых разность $i-j$ делится на 4. Таких клеток будет, как не трудно посчитать, $\frac{mn}{4}+1$. Любая полоска 1*4 закрывает ровно одну отмеченную клетку. Поэтому всего должно быть $\frac{mn}{4}+1$ полосок, что невозможно.

7. (7 баллов) Выиграет тот, кто первым разламывает шоколад. Действительно, он может разломать ее на две части размером 1001×2003, после чего повторяет ходы, совершаемые его оппонентом на одной из этих частей, на другой части. При этом он не может проиграть, так как если второй игрок смог сделать свой ход и при этом не проиграть, то и первый сможет походить, не проиграв.

8. (7 баллов) Да. Например: $\frac{1}{2002!},\frac{2}{2002!},\frac{3}{2002!},\ldots,\frac{2002}{2002!}$. Поскольку 2002! делится на любое натуральное, не большее 2002, то все эти числа находятся среди последовательности $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots,\frac{1}{n},\ldots$

9. (5 баллов) Преобразуем наше уравнение и воспользуемся неравенством Коши для четырех чисел:
$x^4+2y^4+4z^4+2=4\frac{x^4+2y^4+4z^4+2}{4}\ge 4\sqrt[4]{x^4\cdot 2y^4\cdot 4z^4\cdot 2}=8|xyz|$. Равенство выполнится, если $x^4=2y^4=4z^4=2$ и среди неизвестных x,y,z будет четное количество отрицательных чисел. Поэтому получаем следующие решения: $\left(\sqrt[4]{2},1,1/\sqrt[4]{2}\right)$, $\left(\sqrt[4]{2},-1,-1/\sqrt[4]{2}\right)$, $\left(-\sqrt[4]{2},1,-1/\sqrt[4]{2}\right)$, $\left(-\sqrt[4]{2},-1,1/\sqrt[4]{2}\right)$

10. (5 баллов) Если мы распиливаем параллелепипед $a\times b\times c$, скажем, по первой координате, то получим два параллелепипеда $a_1\times b\times c$ и $a_2\times b\times c$ таких, что $a_1+a_2=a$, причем одно из чисел a_1 или a_2 будет не меньше половины числа a. За один распил мы можем разрезать любой кусок исходного параллелепипеда на два по любой координате. Нам надо по каждой координате сделать не менее, чем по 11 распилов. Поэтому необходимо 33 распила. Очевидно, что за такое число распилов можно разрезать весь параллелепипед.

Решения задач по физике заочной олимпиады ФМБФ 2002 - 2003 года.

1. (5 баллов) Пусть обруч сдвинулся на x из положения равновесия. Запишем в этом случае его потенциальную энергию:

$$U = mg(R - \sqrt{R^2 - x^2}) = mgR\left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{x^2}{R^2}\right)}\right) \approx mgR\left(1 - 1 + \frac{x^2}{2R^2}\right) = \frac{1}{2} mg \frac{x^2}{R}$$

Кинетическая энергия по теореме Кёнига имеет две составляющие: поступательную и вращательную:

$$E_n = \frac{1}{2} M\dot{x}^2$$

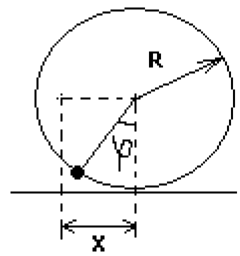
$$E_{вр} = \frac{1}{2} J\omega^2 = \frac{1}{2} MR^2\omega^2 = \frac{1}{2} M\dot{x}^2$$

$$E = E_n + E_{вр} = M\dot{x}^2$$

Мы не учитываем кинетическую энергию тела массой m, потому что очевидно, что ее вклад большего порядка малости по сравнению с E. По закону сохранения энергии, получаем:

$$E + U = const$$

$$M\dot{x}^2 + \frac{1}{2} mg \frac{x^2}{R} = const$$



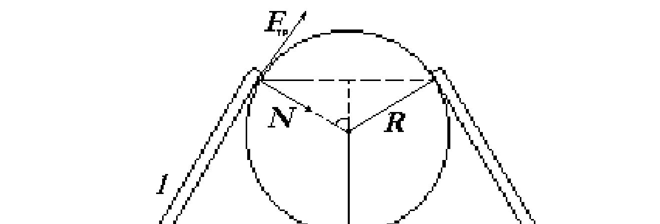
Дифференцируя последнее равенство, приходим к уравнению колебаний:

$$x'' + \frac{mg}{2MR} x = 0$$

с частотой $\omega = \sqrt{\frac{mg}{2MR}}$, период которых равен $T = 2\pi\sqrt{\frac{2MR}{mg}}$.

2. (4 баллов) Изображенные на рисунке силы $F_{тр}$ и N действуют на шар. Эти же силы действуют и на стержень, но в другую сторону, и на рисунке не показаны.

Также не обозначены силы, действующие на один из стержней и на шар со стороны этого стержня.



1-ый закон Ньютона для шара в проекции на вертикальную ось:

$$mg + 2N\cos\varphi - 2F_{TP}\sin\varphi = 0. \qquad (1)$$

Шар не будет падать, когда масса меньше определенного значения m_0. При m=m_0 $F_{тр}$=kN (при меньших массах сила трения будет “подстраиваться” так, чтобы система была в равновесии). Поэтому

$$mg + 2N\cos\varphi - 2kN\sin\varphi = 0.$$

Уравнение моментов для стержня относительно его нижнего конца:

$$Mg\frac{l}{2}\cos\varphi = Nl;$$

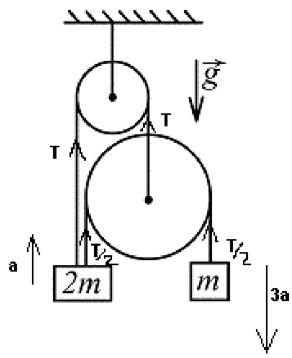
$$N = \frac{1}{2} Mg\cos\varphi.$$

Подставляем N в уравнение (1):

$$mg + Mg\cos^2\varphi - kMg\sin\varphi\cos\varphi = 0;$$
$$m = M(k\sin\varphi\cos\varphi - \cos^2\varphi).$$
Осталось найти φ.
$$L = l\cos\varphi + R\sin\varphi;$$
$$\cos\varphi = \frac{R\sqrt{R^2+l^2-L^2} - Ll}{R^2+l^2};$$
$$\sin\varphi > 0,$$
т.к. $0<\varphi<\pi/2$.

Ответ:
$$m \le M(k\sin\varphi - \cos\varphi)\cos\varphi, где$$
$$\cos\varphi = \frac{R\sqrt{R^2+l^2-L^2} - Ll}{R^2+l^2}.$$
При $k\sin\varphi - \cos\varphi < 0$ получится, что $m<0$, а это невозможно. Поэтому при $ctg\varphi > k$ равновесие не будет достигаться ни при одном значении m.

3. (5 баллов) Запишем второй закон Ньютона для движения грузов, принимая обозначения, указанные на рисунке:



$$\begin{cases} \frac{3}{2}T - 2mg = 2ma \\ mg - \frac{T}{2} = 3ma \end{cases}$$

Решением которой есть: $a = \frac{g}{11}$

Поэтому ускорение большего груза равно $\frac{g}{11}$ и направлено вверх, а меньшего $\frac{3g}{11}$ и направлено вниз.

4. (3 баллов)
$$v_{x0} = v_0\cos\beta$$
$$v_{y0} = v_0\sin\beta$$
$$y = v_{y0}t - g\cdot\sin\alpha\cdot\frac{t^2}{2}$$
$$y = 0 \Rightarrow v_{y0} = g\cdot\sin\alpha\cdot\frac{t}{2} \Rightarrow t = \frac{2v_{y0}}{g\cdot\sin\alpha} = \frac{2v_0\sin\beta}{g\cdot\sin\alpha}$$
$$x = v_{x0}t = v_0\cos\beta\cdot\frac{2v_0\sin\beta}{g\cdot\sin\alpha} = \frac{v_0^2\sin2\beta}{g\cdot\sin\alpha}$$

5. (5 баллов) Давление это сила, приложенная к единице площади, сила – изменение импульса за единицу времени. При столкновении со стенкой молекула меняет направление перпендикулярной стенке составляющей своей скорости. В рамках нашей задачи можно считать, что молекулы налетающие на поверхность имеют «температуру» 293K, а отлетающие от нее имеют температуру соответствующей поверхности пластины. Поэтому давление на пластину сверху равно:

$$P_{сверху} = \frac{P_0 + P_2}{2},$$

а снизу:

$$P_{снизу} = \frac{P_0 + P_1}{2}.$$

Результирующая подъемная сила: $\Delta F = \Delta P \cdot S = \frac{1}{2} S \cdot (P_1 - P_2) = \frac{1}{2} S \cdot (T_1 - T_2) \frac{P_0}{T_0} \sim 10^{-2} H.$

6. (4 баллов) При температуре $T_1 = 273\,K$ давление воздуха $P_1 = 100\,кПа$, а при $T_2 = 355\,K$ давление можно рассчитать: $P_2 = T_2 \frac{P_1}{T_1} = 130\,кПа$

Разница общего давления и давления воздуха равна давлению воды капелек тумана, перешедшей в газообразное состояние. Масса этой воды: $m = \frac{(P - P_2)V\mu}{RT} = 0.305\,кг$

7. (6 баллов) Напряжение U_0 подается на лампу с сопротивлением R_0 через потенциометр, общее сопротивление R которого надо определить. Запишем для этой цепи закон Кирхгофа:

$$I = \frac{U_0}{R_0} + \frac{U_0}{R - R_x}, \qquad (1)$$

где R_x – сопротивление верхнего участка реостата,

$$U_0 = \varepsilon - IR_x. \qquad (2)$$

КПД такой цепи равен

$$\eta = \frac{P_{пол}}{P_{ист}} = \frac{U_0^2 / R}{I\varepsilon} = \frac{U_0^2}{RI\varepsilon}. \qquad (3)$$

Из выражения (3) видно, что максимальный ток, на который должен быть рассчитан реостат, определяется минимальным значением КПД цепи лампы:

$$I_{\max} = \frac{U_0^2}{R\varepsilon\eta_{\min}} = \frac{U_0}{R\varepsilon\eta_0}.$$

Сопротивление реостата R как функцию от КПД цепи рассчитаем, подставив значение силы тока из выражения (3), $I = \frac{U_0^2}{R\varepsilon\eta}$, в формулы (1) и (2):

$$\frac{U_0}{RI\varepsilon_0} = \frac{1}{R_0} + \frac{1}{R - R_x},$$

$$R_x = (\varepsilon - U_0)\frac{R\varepsilon\eta}{U_0^2}.$$

Отсюда

$$R = R_0 \eta \frac{\varepsilon^2}{U_0^2} \frac{1 + \eta(1 - \varepsilon / U_0)}{1 - \varepsilon\eta / U_0}$$

Легко проверить, что функция $R(\eta)$ возрастающая, поэтому ответ:

$$R \ge R_{\min} = R_0 \eta_0 \frac{\varepsilon^2}{U_0^2} \frac{1 + \eta_0(1 - \varepsilon / U_0)}{1 - \varepsilon\eta_0 / U_0} = 8{,}5\,Ом.$$

8. (5 баллов) Воспользуемся тем фактом, что любую схему «черного ящика» из резисторов можно привести к виду (рис.1), где величины R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 выражаются через сопротивления исходных резисторов схемы «черного ящика» (убедиться в этом можно, используя в исходной схеме преобразования типа звезда-треугольник и наоборот). По условию задачи через резисторы сопротивлением R_1 и R_4, а также R_3 и R_5 каждый раз протекают равные по значению токи (либо вообще не текут, когда клеммы разомкнуты). Воспользовавшись этим обстоятельством, схему для простоты рассмотрения приведем к виду, изображенному на рис.2. Тогда по условию задачи

$$N_1 = \frac{U^2}{R_1' + R_2'},\; N_2 = \frac{U^2}{R_1' + R_2' R_3' / (R_2' + R_3')},$$

$$N_3 = \frac{U^2}{R_2' + R_3'},\; N_4 = \frac{U^2}{R_3' + R_1' R_2' / (R_1' + R_2')}.$$

Нетрудно убедиться, что

$$N_1 N_4 = N_2 N_3.$$

Следовательно,

$$N_4 = \frac{N_2 N_3}{N_1} = 40\, Вт.$$

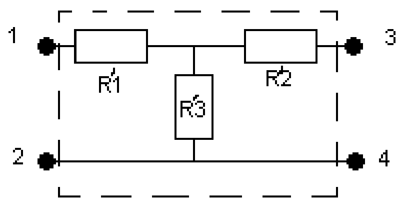


рис.1

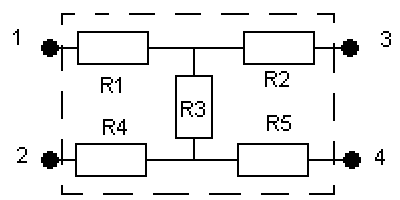


рис.2

9. (6 баллов) Освещенность точечным источником некоторой плоскости равна $E = \frac{P}{4\pi r^2}\cos\alpha$, где r – расстояние до источника, α – угол между нормалью к плоскости и линией луча. Вместо каждой зеркальной грани куба нарисуем зеркальное изображение куба в данной плоскости, у этого куба его зеркальное изображение, и т.д. Получаем множество кубов в 2 куба высотой и бесконечно большое количество кубов в горизонтальной плоскости. Искомая освещенность равна сумме освещенностей центров черных граней всех кубов, если в центре одного из кубов находится источник света.

Пусть некоторая точка находится в центре черной грани в (*n, m*)-ого куба в расчете от излучающего куба, расстояние по вертикали от источника до черной грани равно *L*. Ее освещенность

$$E_{nm} = \frac{P}{4\pi r^2}\frac{L}{r} = \frac{P}{4\pi L^2}\frac{L^3}{r^3} = E_0\left(\frac{L}{r}\right)^3 = E_0\left(\frac{L}{\sqrt{L^2 + 4n^2L^2 + 4m^2L^2}}\right)^3 = E_0\,\frac{1}{\left(1 + 4n^2 + 4m^2\right)^{3/2}},$$

где $E_0 = P/4\pi L^2$ – освещенность от источника в центре куба с источником. Если расстояние по вертикали от источника до черной грани равно 3*L*, то

$$E_{nm} = E_0\,\frac{3}{\left(9 + 4n^2 + 4m^2\right)^{3/2}}$$

Суммарная освещенность равна

$$E = E_0\left[1+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(1+4n^2\right)^{3/2}}+4\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\left(1+4n^2+4m^2\right)^{3/2}}+\frac{1}{9}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{\left(9+4n^2\right)^{3/2}}+4\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{3}{\left(9+4n^2+4m^2\right)^{3/2}}\right]$$

Учитывая, что у нас есть n^2 слагаемых порядка $1/n^3$, для достижения погрешности $\varepsilon = 1\%$ необходимо взять $n = 1/\varepsilon = 100$ слагаемых. С помощью несложной программы и компьютера можно получить $E \approx 3{,}48\dfrac{P}{4\pi L^2}$

10. (7 баллов) Запишем условие интерференционного максимума для отраженного света:

$$\Delta = n\lambda \qquad (1)$$

где $n = 1,2,3,\ldots$, λ – длина волны, Δ – разность хода лучей 1 и 2. Луч 1, отразившийся от верхней грани кубика, пройдет расстояние на $2d$ большее, чем луч 2, отразившийся от нижней грани пластинки, если угол падения близок к нулю. Кроме того, луч 1 отражается от оптически более плотной среды, при этом происходит сдвиг по фазе на π (потеря $\lambda/2$), а луч 2 отражается от оптически менее плотной среды, и его фаза не изменяется. Таким образом, условие (1) можно записать в виде:

$$2d + \lambda/2 = n\lambda\text{, или}\quad 2d = \frac{(2n-1)\lambda}{2} \qquad (2)$$

Условие (2) должно выполняться для двух длин волн – для $\lambda_0 = 400\,нм$ (при $n = k+1$) и для λ_1, находящейся между 400 и 1150 *нм* (при $n = k$), т.е.

$$2d = \frac{2k+1}{2}\lambda_0, \qquad 2d = \frac{2k-1}{2}\lambda_1 \qquad (3)$$

Отсюда получаем, что $\lambda_1 = \dfrac{2k+1}{2k-1}\lambda_0$.

Но по условию $\lambda_1 < 1150\,нм$, следовательно,

$$\frac{2k+1}{2k-1}\cdot 400\,нм < 1150\,нм.$$

Это неравенство выполняется при $k > 1$.

Третья длина волны λ_2 (при $n = k-1$) должна быть уже больше 1150 *нм*:

$$\frac{2k+1}{2k-3}\cdot 400\,нм > 1150\,нм.$$

Это неравенство выполняется при $k < 3$. Следовательно, $k = 2$. Тогда

$$\lambda_1 = \frac{2k+1}{2k-1}\lambda_0 = \frac{5}{3}\lambda_0 = 666{,}7\,нм$$

$$d = \frac{2k+1}{4}\lambda_0 = \frac{5}{4}\lambda_0 = 500\,нм$$

Теперь можно найти изменение температуры, при котором за счет теплового расширения ребро куба удлинится на толщину зазора d: $d = a\alpha\Delta T$, откуда

$$\Delta T = \frac{d}{a\alpha}, \qquad \Delta T = 3{,}1\,K.$$