Московский физико-технический институт
Факультет Молекулярной и Биологической Физики

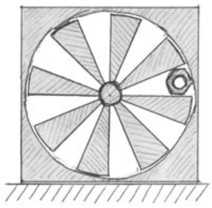
Решения задач

Заочной физико-математической олимпиады 2004/2005 года Факультета молекулярной и биологической физики МФТИ

Долгопрудный – 2005

Физика

1. (*5 баллов*) На столе стоит кулер массой 100 г. Между двумя соседними лопастями застревает гайка массой 5 г. Ось вращения вентилятора параллельна поверхности стола. Радиус лопастей кулера 5 см. Найти минимальную скорость вращения кулера, при которой он начнет подпрыгивать, если: а) проскальзывание по поверхности стола отсутствует б) трения нет.



Решение:

Пусть ω – угловая частота вращения кулера, а вращение идет против часовой стрелки. Запишем уравнение движения гайки:

$$v_x = v_0 \cos\omega t$$
$$v_y = v_0 \sin\omega t$$

Здесь $v_0 = \omega R$. Рассмотрим случай, когда проскальзывание отсутствует ($\mu \to \infty$). Найдем момент сил, который действует на кулер относительно точки левого нижнего угла. Пусть гайка находится на угол φ от вертикали.

$$T = -MgR - mgR(1-\sin\varphi) + m\omega^2 R^2\sqrt{2}\left[1+\sin\left(\frac{\pi}{4}-\varphi\right)\right]$$

Найдем угол, при котором действующий момент сил максимален: $T'_\varphi = 0$

$$mgR\cos\varphi - m\omega^2 R^2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\varphi\right) = 0$$

$$tg\varphi = 1-\frac{g}{\omega^2 R} \approx 1,\ \varphi \approx \frac{\pi}{4}$$ (необходимо, чтобы $\omega >> \sqrt{\frac{g}{R}} \approx 14$ с$^{-1}$).

Тогда момент сил равен

$$T \approx -MgR - mgR\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + m\omega^2 R^2\sqrt{2} \approx m\omega^2 R^2\sqrt{2} - (M+m)gR$$

Здесь учтено, что $m << M$. При $T > 0$ кулер может приподняться на левом ребре:

$$\omega > \sqrt{\frac{(M+m)g}{mR\sqrt{2}}} \approx 54\ \text{с}^{-1}$$

Запишем второй закон Ньютона в случае, если скорость кулера по горизонтали равна нулю:

$$\frac{dp}{dt} = \vec{N} + (M+m)\vec{g} + \vec{F}_{тр}$$
$$N - (M+m)g = -m\omega^2 R\cos\omega t$$

Кулер начнет подпрыгивать, отрываясь от поверхности, если сила, направленная вверх, будет больше силы тяжести. Учитывая, что $N \approx 0$ ($\mu \to \infty$), получим в качестве минимальной оценки ω:

$$\omega > \sqrt{\frac{(M+m)g}{mR}} \approx 64{,}2\ \text{с}^{-1}$$

Отметим без доказательства, в момент отрыва от поверхности ($N = 0$) из-за сохранения центра масс при вращении гайки кулер будет немного сдвигаться вправо, прежде чем упасть обратно, таким образом непрерывно смещаясь вправо со средней скоростью

$$v_{ср} = \frac{\sqrt{\omega^4 R^2 m^2 - (M+m)^2 g^2}}{2\pi\omega m} \approx 6\ \text{см/с при}\ \omega = 65\ \text{с}^{-1}.$$

Рассмотрим теперь случай, когда трения нет ($\mu = 0$). Кулер совершает колебания в горизонтальной плоскости с частотой ω и амплитудой

$$x_m = R\frac{m}{m+M} \approx 0{,}25\text{ см}$$

Аналогично предыдущему случаю, при

$$\omega > \sqrt{\frac{(M+m)g}{mR}} \approx 64{,}2\text{ с}^{-1}$$

кулер будет подпрыгивать вертикально и смещаться вправо.

2. (*4 балла*) Металлическая сфера радиуса r помещена в центр сферической заземленной камеры радиуса R и равномерно со всех сторон облучается излучением с длиной волны λ. Оценить установившийся заряд сферы, если работа выхода электрона A.

Решение:

По формуле Эйнштейна для фотоэффекта:

$$h\upsilon = A + E_K \Rightarrow hc/\lambda = A + E_K \Rightarrow E_K = \frac{hc}{\lambda} - A$$

Здесь E_K – кинетическая энергия электрона после выхода из металла, c – скорость света в вакууме. Очевидно, что пока

$$\frac{hc}{\lambda} < A \Leftrightarrow \lambda > \frac{hc}{A},$$

то электроны из металла не выходят и заряд маленькой сферы равен нулю.

При $\lambda \le \frac{hc}{A}$ электроны могут выходить из металла и улетать от маленькой сферы. Найдем максимальное расстояние L, на которое они могут удалиться, если заряд маленькой сферы равен Q:

$$-k\frac{eQ}{r} + E_K = -k\frac{eQ}{L}$$

Здесь $k = 1/4\pi\varepsilon_0$ (в системе СИ), e – заряд электрона.

$$L = \frac{1}{\frac{1}{r} - \frac{E_K}{keQ}} = \frac{1}{\frac{1}{r} - \frac{hc/\lambda - A}{keQ}}$$

Исходно $L > R$. Поскольку электроны попадают на внешнюю сферу, заряд маленькой сферы будет увеличиваться до тех пор, пока максимальное расстояние не станет равным R. Заряд при этом:

$$Q = \frac{1}{ke}\frac{Rr}{R-r}\left(\frac{hc}{\lambda} - A\right)$$

То, заземлена внешняя сфера или нет, никак не влияет, поскольку потенциал электрического поля внутри заряженной сферы равен нулю.

3. (*5 баллов*) На плоскую поверхность стеклянного полуцилиндра падают световые лучи под углом $\alpha = 45^0$. Лучи проходят в плоскости, перпендикулярной оси полуцилиндра. Из какой части боковой поверхности полуцилиндра будут выходить лучи света? Показатель преломления стекла $n = \sqrt{2}$.

Решение: Найдем угол β преломления на плоской поверхности полуцилиндра. По закону преломления:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n,\ \sin\beta = \frac{\sin\alpha}{n} = \frac{\sin 45^\circ}{\sqrt{2}} = 0{,}5$$

Отсюда: $\beta = \arcsin 0{,}5 = 30^\circ$.

На цилиндрическую поверхность полуцилиндра лучи падают под разными углами. Из полуцилиндра выйдут лишь лучи, не испытавшие внутреннего отражения. Условие выхода луча: $\sin\gamma \le \frac{1}{n}$.

Критический угол падения луча на цилиндрическую поверхность равен:

$$\gamma = \arcsin\frac{1}{n} = \arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} = 45^\circ$$

Из полуцилиндра выйдут лучи, точки падения которых на цилиндрическую поверхность определяются углом φ, лежащий в пределах:

$$\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2 = 180 - \varphi_2^{'}$$

при которых $\gamma = 45^\circ$. Найдем углы φ_1 и φ_2. Из ΔOAB получим:

$$\varphi_1 = 180^\circ - \gamma - \left(90^\circ - \beta\right) = 90^\circ - \gamma + \beta = 90^\circ - 45^\circ + 30^\circ = 75^\circ$$

Из ΔOCB найдем $\varphi_2 = \gamma + \left(90^\circ + \beta\right) = 165^\circ$.

Таким образом, свет будет выходить из части боковой поверхности цилиндра, ограниченной дугой *BD*, отсекающей углы φ, лежащие в пределах $75^\circ \le \varphi \le 165^\circ$.

Примечание. Лучи, которые падают под $\varphi < 75^\circ$ или $\varphi > 165^\circ$, претерпевают многократное внутреннее отражение и тоже выйдут из цилиндра, но через его плоскую поверхность.

4. (5 баллов) Лошадь может бегать по ипподрому в форме окружности радиуса *R*. Ей необходимо разогнаться до максимальной скорости, пройдя при этом как можно меньшую часть ипподрома. Как следует ей бежать, если известно, что коэффициент трения *k*, ускорение свободного падения *g*.

Решение:

Пусть лошадь стартовала из точки *A*. И к некоторому моменту она пробежала дугу с углом *f*. При оптимальном разгоне ускорение лошади будет максимальным, которое ей позволяет сила трения. При предположении, что все ноги лошади ведущие (модель полноприводной лошади ☺), то есть все находятся в зацеплении с поверхностью, из второго закона Ньютона:

$$a=kg$$

При этом ускорение будет направлено так, чтобы при текущей скорости *V* сделать тангенциальное ускорение как можно больше, тогда для проекций полного ускорения получим:

$$\begin{cases} a_t = a\cos b \\ a_n = a\sin b \end{cases}$$

или, если расписать более подробно, зная, что $a_t = \frac{dV}{dt}$, $a_n = \frac{V^2}{R}$:

$$\begin{cases} \frac{dV}{dt} = kg\cos b \\ \frac{V^2}{R} = kg\sin b \end{cases}$$

Продифференцируем теперь второй уравнение по времени:

$$\begin{cases} \frac{dV}{dt} = kg\cos b \\ \frac{2VdV}{Rdt} = kg\cos b\frac{db}{dt} \end{cases}$$

А теперь разделим второе уравнение на первое:

$\frac{2V}{R} = \frac{db}{dt}$ или, вспоминая, что угловая скорость $w = \frac{df}{dt} = \frac{V}{R}$, получим: $\frac{2df}{dt} = \frac{db}{dt}$

То есть угол *b* растет в два раза быстрее, чем угол *f*, тогда в любой момент, т.к. начальные значения этих углов нулевые (т.к. все ускорение в начальный момент направлено по скорости):

$$b=2f$$

Ясно, что когда лошадь достигнет максимальной скорости $v^2 = kgR$, все ускорение будет направлено по радиусу, т.к. тангенциальной составляющей ускорение уже иметь не будет и угол *b* станет равным $\pi/2$.

Тогда угол $f = \pi/4$, то есть лошади при оптимальном разгоне для набора максимальной скорости придется пройти восьмую часть окружности.

5. (*6 баллов*) В установке для наблюдения эффекта Холла металлическая лента движется со скоростью *v*, и перпендикулярное ей магнитное поле, действуя на заряды, создает разность потенциалов в направлении, перпендикулярном ленте. Пусть это поле создается электромагнитом в виде цилиндрической катушки с площадью основания S = 10^{-2} м^2 и индуктивностью L = 1 Гн. Она подключена к ленте скользящими контактами и работает за счет напряжения, создаваемого на ленте ее магнитным полем. Сопротивление цепи (катушка, провода, контакты и лента) R = 100 Ом. Ширина ленты l = 5 см. Допустим, лента была неподвижна, и в цепи тока не было. С какой скоростью должна двигаться лента, чтобы в цепи возник ток (т.е. найти скорость, при которой состояние с нулевым током станет неустойчивым)? Считать, что катушка создает на ленте однородное магнитное поле.

Решение:

Чтобы решить задачу, предположим, что в цепи течет некоторый ток I_0, и катушка создает магнитное поле B_0. Посмотрим, как меняется ток в цепи I со временем.

Если катушка создает магнитное поле B перпендикулярно ленте, движущейся со скоростью v, то на ленте возникнет разность потенциалов, равная vBl (l – ширина ленты). При этом катушка создает разность потенциалов в цепи, которая препятствует изменению тока. Она равна $-L\frac{dI}{dt}$. Сумма этих напряжений равна падению напряжения на сопротивлении цепи:

$$vBl - L\frac{dI}{dt} = IR \quad (1).$$

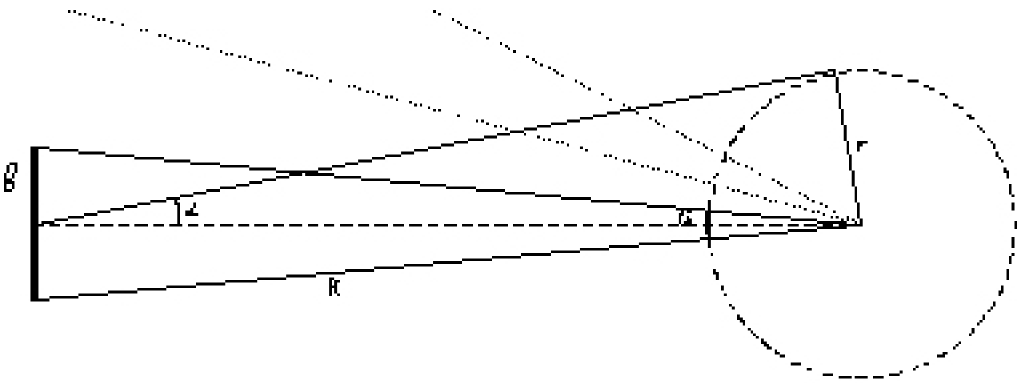
Выразим величину магнитного поля через ток в катушке: $LI = \Phi = BS$ (Φ – поток поля через катушку, S – ее площадь). Поэтому $B = \frac{LI}{S}$. Подставим это в формулу (1) и получим уравнение для тока: $\frac{dI}{dt} = \left(\frac{vl}{S} - \frac{R}{L}\right)I$. Его решение $I = I_0 \cdot \exp\left[\left(\frac{vl}{S} - \frac{R}{L}\right)t\right]$, где I_0 – ток в начальный момент времени.

Если $\frac{vl}{S} - \frac{R}{L} < 0$, то ток будет со временем затухать к нулю. В противоположном случае он будет увеличиваться. Это произойдет, если $v > \frac{RS}{Ll} = \frac{100 Ом \cdot 10^{-2} см^2}{1 Гн \cdot 0,05 м} = 20\frac{м}{с}$. Если начальный ток равен нулю и скорость больше этого значения, то случайные отклонения тока от нуля, которые всегда есть в системе, приведут в его росту. Поэтому состояние с нулевым током будет неустойчивым.

6. (*5 баллов*) Внутренняя поверхность усечённого конуса зеркальная. Вблизи от центра большего основания установлен точечный изотропный источник света. Во сколько раз изменится мощность светового потока, выходящего через малое основание, если большее закрыть зеркалом. Отношение площадей оснований k=1/9. Угол раствора конуса достаточно мал.

Решение:

Рассмотрим произвольный лучик, выходящий из центра большего основания. Определим, при каких углах он сможет выйти из малого основания. Используя свойство отраженного луча (про равные углы) мы можем поворачивать не сам луч при каждом отражении, а поворачивать сам конус, многократно отражая его в зеркальных стенках, получив зеркальный многогранник с центральной «темной» областью, соответствующей выходу света через малое отверстие. Тогда становится очевидным, что если луч выйдет под углом, меньшим α, то он выйдет через меньшее, и наоборот:



По условию нам известно $k = \left(\frac{a}{b}\right)^2$, но из подобия треугольника: $\frac{b}{a} = \frac{R}{r}$ $\sin\alpha = \frac{r}{R}$

Мощность, выходящая через меньшее основание полностью определяется углом α. Т.к. источник изотропный, то мощность на единицу поверхности некоторой сферы радиуса R с центром в большем основании конуса есть константа. Из курса стереометрии известно, что боковая площадь шарового слоя равна πRh. Тогда отношение мощности, выходящей через малое основание к мощности самого источника равно $\frac{h}{2R}$. Поскольку $\frac{h}{R} = (1 - \cos\alpha)$, то

$$\frac{P_{in}}{P_0} = \frac{1-\cos\alpha}{2} = \frac{1-\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{2} = \frac{1-\sqrt{1-k}}{2} = \frac{3-2\sqrt{2}}{6} \approx 0.03$$

В случае, когда большее основание закрыто плоским зеркалом, через малое основание выходит вся мощность источника. Это можно доказать следующим образом: многократно отразим центральную «тёмную» область внутри многогранника в зеркальных гранях, получив, таким образом, множество таких областей. В простейшем случае, когда угол раствора равен 90^0 , т.е. у нас образуется множество кубов с «тёмными» областями внутри. Если источник разместить в начале координат, то любой луч пройдет через одну из «тёмных» областей вследствие их ненулевого объема.

Итак, ответ: $\frac{1-\sqrt{1-k}}{2} \approx 0.03$

7. (*5 баллов*). При отсутствии сопротивления воздуха спутник вращался бы вокруг Земли по окружности радиуса H = 150 км. Масса спутника m = 7000 кг, лобовое сечение S = 1 м^2, радиус Земли $R_З$ = 6400 км. Изменение плотности воздуха с высотой можно оценить по барометрической формуле $\rho = \rho_0 \exp\left(-\mu gH/RT\right)$, температура воздуха T = 300 К. Оцените изменение высоты вращения спутника за один оборот.

Решение:

Так как сопротивление воздуха из-за его разреженности мало, то скорость спутника почти не меняется:

$$v = \sqrt{g\frac{R_З^2}{R_З + H}} \approx 10 км/с >> v_{звука}$$

Таким образом, мы можем пренебречь движением молекул и столкновениями молекул с задней стенкой спутника.

Изменение импульса на 1 молекулу: $\Delta p = m_{ср} v_{отн} \approx m_{ср} v$, где $m_{ср}$ – усредненная масса молекул воздуха.

$$\Delta p_0 = \frac{\rho S v \Delta t}{\mu} N_A m_{ср} v = \rho S v^2 \Delta t$$

Сила сопротивления: $F = \dfrac{\Delta p_0}{\Delta t} = \rho S v^2$

Поскольку скорость меняется мало, считаем $\Delta E_{кин} = 0$.

$$G\frac{mM}{r_1} - G\frac{mM}{r_2} = -2\pi\left(R_З + H\right)\rho S v^2$$

Обозначим $\Delta r = r_1 - r_2$: $G\dfrac{mM\Delta r}{r_1 r_2} = 2\pi\left(R_З + H\right)\rho S v^2$

Учитывая, что $g = G\dfrac{M}{R_З^2}$ и $r_1 \approx r_2 \approx R_З + H$, получим:

$$\frac{mgR_З^2 \Delta r}{\left(R_З + H\right)^2} = 2\pi\left(R_З + H\right)\rho S \frac{gR_З^2}{R_З + H}$$

$$\Delta r = \frac{2\pi\rho S\left(R_З + H\right)^2}{m}$$

Из барометрической формулы $\rho = \rho_0 \exp\left(-\dfrac{\mu gH}{RT}\right)$

$$\Delta r = \frac{2\pi\rho_0 S\left(R_З + H\right)^2}{m}\exp\left(-\frac{\mu gH}{RT}\right) \approx 1 \text{ км.}$$

8. (*5 баллов*) В начальный момент кубик с ребром d лежит на наклонной плоскости с углом наклона $\alpha > 45^0$, затем кубик отпускают и он начинает скатываться. Удары кубика о наклонную плоскость неупругие, трение очень велико. Оценить установившуюся среднюю скорость качения кубика.

Решение:

Обозначим O – проекция центра куба на плоскость, перпендикулярную оси вращения, O_1 – проекция оси вращения. Пусть v_n – проекция скорости v на направление, перпендикулярное OO_1 после n-ого удара. Так как $\alpha > 45^0$, то кубик остановиться не может.

Определим v_2 – скорость кубика перед следующим соударением. Пусть момент инерции кубика относительно центра масс I. Кубик в любой момент времени между ударами вращается вокруг O_1 – проекции нижней грани.

$$E_{кин} = \frac{mv^2}{2} + \frac{I + md^2/2}{2}\frac{v^2}{d^2/2} = \left(m + \frac{I}{2d^2}\right)v^2$$

$$\left(m+\frac{I}{2d^2}\right)\left(v_2^2-v_n^2\right)=mg\sin\alpha$$

$$v_2^2-v_n^2=\frac{mgd\sin\alpha}{m+I/2d^2}$$

Тогда после удара $v_2'=v_2/\sqrt{2}$, а после гашения проекции на OO_1 – $v_n'=v_n/2$.

$$4v_{n+1}^2-v_n^2=\frac{mgd\sin\alpha}{m+I/2d^2}$$

Обозначим $v_n^2=a_n$, $\frac{mgd\sin\alpha}{m+I/2d^2}=r$ => $4a_{n+1}-a_n=r$, $4a_n-a_{n-1}=r$

Вычитаем из первого выражения второе:

$$4a_{n+1}-5a_n+a_{n-1}=0$$

Решение рекуррентного соотношения:

$$a_n=c_1+c_2\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

Учитывая, что $a_1=0$, $a_2=2$, получим:

$$a_n=r\left(\frac{4}{3}-\frac{16}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$$

$$v_n=\sqrt{r}\sqrt{\frac{4}{3}-\frac{16}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n}$$

При больших *n*: $v_n=\sqrt{\frac{4}{3}r}$

$\Delta l=d$, $\Delta T=\pi d/2v_n$ (считаем движение равноускоренным).

$$u_{cp}=\frac{\Delta l}{\Delta T}=\frac{2v_n}{\pi}=\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{4r}{3}}$$

Если учесть, что момент инерции кубика относительно оси, проходящий через центр масса, равен $I=md^2/12$, то:

$$r=\frac{mgd\sin\alpha}{m+\frac{md^2}{12\cdot 2d^2}}=\frac{24}{25}gd\sin\alpha$$

$$u_{cp}=\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{4}{3}\cdot\frac{24}{25}gd\sin\alpha}=\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{32}{25}gd\sin\alpha}$$

9. (*4 балла*) Жидкий металл остыл в ёмкости, которая вращалась вокруг своей оси с угловой скоростью Ω. На поверхность металла положили шарик. Определить частоту малых колебаний системы.

Решение:

Задачу можно решить, даже не вычисляя уравнение поверхности вращения и радиуса кривизны в нижней точке. Заметим, что на мысленно выделенную частичку металла действуют три силы, причем горизонтальная составляющая силы реакции равна $N_x=-m\Omega^2x$. Теперь представим, что металл застыл, а форма поверхности, разумеется, не изменилась. Когда шарик окажется в вышерассмотренной точке на поверхности, то на него будет действовать сила реакции, пропорциональная его массе: $N_x=M\Omega^2x=Ma$, следовательно, он будет колебаться на поверхности с частотой Ω.

10. (6 баллов) Во время урока физкультуры в школе № 5 г. Долгопрудного волейбольный мяч массы M = 300 г и радиуса R = 11 см застревает в лестнице между двумя параллельными цилиндрическими перекладинами так, что центр мяча лежит в одной плоскости с перекладинами. Радиус перекладин $r<<R$. Давление в мяче отличается от атмосферного на ΔP = 0,2 атм. Коэффициент трения между мячом и перекладинами k = 0,4. Оценить начальную скорость мяча перед столкновением, если ширина зазора между перекладинами равна $2L$ = 20 см. Растяжением оболочки мяча и изменением внутреннего давления можно пренебречь.

Решение:

При решении этой задачи силой тяжести можно пренебречь.

Введём систему координат: ось OY направим в плоскости перекладин, ось OX – по направлению движения мяча. Обозначим: расстояние от центра мяча до его конечного положения – x, длина области касания мяча с перекладиной – $2a$. Так как деформация оболочки мала, можно считать, что большая часть его поверхности сохраняет сферическую форму, т.е. величины a и x можно связать соотношением $x^2+a^2=b^2$, где b – радиус окружности, «срезаемой» перекладиной.

Запишем уравнение Лапласа для кусочка поверхности мяча рядом с серединой перекладины: $\Delta P=\sigma_x/R_x$, где R_x и σ_x - радиус кривизны и натяжение поверхности мяча рядом с областью касания. т.к. перекладина цилиндрическая, то $1/R_y=0$. Так как мяч деформируется незначительно, можно считать, что σ_x совпадает с натяжением в недеформированной области. Следовательно, $R_x=R/2$. т.к. Большая часть поверхности мяча не деформирована, то можно считать, то область с радиусом кривизны R_x плавно переходит в не деформированную область. Рассмотрим поперечное сечение мяча (рис.1).

Вычислим угол φ, под которым из центра перекладины виден поперечный размер области касания. Очевидно, именно под таким углом видна длина области из центра мяча, т.к. вмятину можно считать круглой. Следовательно, сила давления мяча на перекладину равна:

$$N=2a\sigma_x\sin\frac{\varphi}{2}=2a\sin\frac{\varphi}{2}\Delta P\frac{R}{2}=\frac{a^2}{R}\Delta PR=\Delta Pa^2.$$

Сила трения $F_{тр}=kN$, тормозящая сила составляет:

$$F_e=N\sin\alpha+F_{тр}\cos\alpha,$$

где $\sin\alpha=\dfrac{x}{R}$;

$$F_e=2N(\cos\alpha k+\sin\alpha)=2N(k+\frac{x}{R});$$

Работа этой силы на перемещении мяча до точки покоя вычисляется как интеграл полиномиальной функции:

$$A=\int_x^0 -Fe(x)dx=\int_x^0 -2(k+\tfrac{x}{R})a^2\Delta Pdx=\int_x^0 -2(k+\frac{x}{R})(b^2-x^2)\Delta Pdx=$$

$$=\int_0^x 2(kb^2+\frac{b^2}{R}x-kx^2-\frac{x^3}{R})\Delta Pdx=2\Delta P(\frac{2}{3}k-\frac{1}{4}\frac{b}{R})b^3=2\Delta P(\tfrac{2}{3}k-\tfrac{1}{4}\frac{b}{R})(R^2-L^2)^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{2}M\vartheta^2;$$

$$\vartheta=2\sqrt{\frac{\Delta P}{M}(\tfrac{2}{3}k-\tfrac{1}{4}\frac{b}{R})(R^2-L^2)^{\frac{3}{2}}}\text{, где } b=\sqrt{R^2-L^2}$$

численная оценка:

$$\vartheta=2\sqrt{\frac{2\cdot10^4\,Па}{0.3кг}(\frac{2}{3}0.4-\frac{1}{4}\frac{\sqrt{0.11^2м^2-0.1^2м^2}}{0.11м})(0.11^2м^2-0.1^2м^2)^{\frac{3}{2}}}\approx 2\,м/с.$$

Математика

1. (*5 баллов*) Прямая делит треугольник на две части равных площадей и периметров. Доказать, что центр вписанной окружности лежит на этой прямой.

Решение:

Пусть прямая пересекает стороны ΔABC в точках *K* и *M*, лежащих для определенности на сторонах AB и AC соответственно. Докажем, что равенство

$$\frac{S_{AKM}}{S_{ABC}} = \frac{AK + AM}{AB + BC + AC}$$

имеет место тогда и только тогда, когда прямая *KM* проходит через центр вписанной в ΔABC окружности. Утверждение задачи является частным случаем этого факта при дополнительном условии $S_{AKM} = S_{ABC}/2$, ибо последнее условие равносильно равенству $S_{AKM} = S_{KBCM}$, а условие $AK + AM = \frac{1}{2}\left(AB + BC + AC\right)$ – равенству $AK + AM + KM = KB + MC + BC + KM$.

Пусть *r* – радиус окружности, вписанной в ΔABC, тогда $2S_{ABC} = r\left(AB + BC + AC\right)$. С другой стороны, пусть *R* – радиус окружности с центром на прямой *KM*, касающейся сторон *AK* и *KM*. Тогда $2S_{AKM} = R\left(AK + AM\right)$. Следовательно, сформулированное выше равенство равносильно равенству *r* = *R*, которое справедливо тогда и только тогда, когда центры обеих окружностей совпадают.

2. (*4 балла*). Докажите, что среди 18 последовательных трехзначных натуральных чисел найдется хотя бы одно, которое делится на сумму своих цифр.

Решение:

Среди трехзначных чисел, делящихся на 9, только у числа 999 сумма цифр равна 27 (заметим, что 999 делится на 27), а у остальных чисел указанного вида сумма цифр 9 или 18 (по признаку делимости на 9). Рассмотрим 18 последовательных трехзначных чисел, меньших 999. Среди них ровно два числа делятся на 9. Выберем из этих двух чисел четное. Оно делится на 9 и на 2, т.е. на 18 - сумму своих цифр.

3. (*4 балла*) Пять последовательных членов возрастающей арифметической прогрессии являются простыми натуральными числами. Каким наименьшим числом может разность этой прогрессии?

Решение:

Пусть a - первый член, а $d > 0$ - разность данной прогрессии. Число d не может быть нечетным, так как иначе среди членов прогрессии будет не менее двух четных чисел. Кроме того, число d делится на 3. Действительно, в противном случае как среди чисел a, $a + d$, $a + 2d$, так и среди чисел $a + 2d$, $a + 3d$, $a + 4d$ найдутся числа, делящиеся на 3. Отсюда $a + 2d = 3$, а так как $d > 1$, то $a < 0$. Противоречие. Значит, d делится на 6, и поэтому $d \geq 6$. Пример такой прогрессии с разностью $d = 6$: 5, 11, 17, 23, 29.

4. (*4 балла*) На прямоугольной полосе $1 \times n$ ($n \geq 4$) в клетках с номерами $n-2$, $n-1$, n стоит по одной фишке. Двое играют в следующую игру: каждый игрок своим ходом может перенести любую (но только одну) фишку на любую свободную клетку с меньшим номером. Проигрывает тот, кто не сможет сделать очередного хода. Доказать, что игрок, который совершает первый ход, может играть так, чтобы наверняка победить.

Решение:

Разобьем все целые числа, начиная с двух, на непересекающиеся пары вида $\left(2k; 2k+1\right)$, $k \in N$. Тогда среди трех чисел $n-2$, $n-1$, n два обязательно образуют пару. Начинающий должен первым ходом фишку, стоящую на поле с тем номером, который не попал в пару, переставить на поле с номером 1. После этого переставленная фишка двигаться уже не будет.

Пусть другой игрок своим ходом переставил одну из фишек на некоторое поле m. Тогда первый игрок должен оставшуюся фишку поставить на поле $m + 1$ или $m - 1$ в зависимости от того, какое из этих чисел образует пару с номером m. Это всегда можно сделать, так как пары не пересекаются ни друг с другом, ни с числом 1. Действуя так же и далее, первый игрок не может проиграть. Поскольку игра обязательно закончится через конечное число ходов, то проиграет второй игрок.

5. (*5 баллов*) Сфера s радиуса r проходит через центр сферы S радиуса R. Доказать, что если хорда AB сферы S касается сферы s в точке C, то $AC^2 + BC^2 \le 2R^2 + r^2$.

Доказательство:

Проведем плоскость, проходящую через точки A, B и центр O сферы S. Сечением сферы s будет окружность с центром O_1 и радиусом $r_1 \le r$, касающаяся прямой AB. Пусть OH и OK – перпендикуляры к прямым AB и O_1C соответственно, тогда, обозначив $AB = 2a$, $OH = h$, получаем:

$$AC^2 + BC^2 = \left(a + HC\right)^2 + \left(a - HC\right)^2 = 2a^2 + 2HC^2 =$$

$$= 2\left(R^2 - OH^2\right) + 2\left(OO_1^2 + O_1K^2\right) = 2\left(R^2 - r^2\right) + 2\left(r_1^2 - \left(r_1 - h\right)^2\right) =$$

$$= 2R^2 - 4h^2 + 4hr_1^2 = 2R^2 + r_1^2 - \left(2h - r_1\right)^2 \le 2R^2 + r^2$$

6. (*6 баллов*) Сколько существует различных неубывающих последовательностей $a_1, a_2, ..., a_{2005}$ натуральных чисел, которые удовлетворяют условию $a_k \le k$ для всех $1 \le k \le 2005$?

Решение:

Добавим еще один член последовательности $a_{2006} = 2006$ и обозначим через x_n количество неубывающих последовательностей натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ таких, что $a_i \le i$, $a_1 = 1$ и $a_n = n$ (т.е. нам надо найти x_{2006}). Рассмотрим одну из них. Пусть $k > 1$ — наименьшее натуральное число, для которого выполняется условие $a_k = k$. В этом случае подпоследовательность $a_2, \ldots, a_{k-1}, a_k - 1$ является неубывающей последовательностью натуральных чисел из $k-1$ члена и для нее выполнены условия $a_i \le i$, $a_2 = 1$ и $\left(a_k - 1\right) = k - 1$. Таких последовательностей x_{k-1}. Последовательность $a_k - k + 1$, $a_{k+1} - k + 1$, …, $a_n - k + 1$ удовлетворяет подобным условиям, поэтому ее можно подобрать x_{n-k+1} способами. Таким образом получаем, что $x_n = x_1 x_{n-1} + x_2 x_{n-2} + \ldots + x_{n-1} x_1$ и $x_1 = x_2 = 1$. Далее индукцией можно показать, что $x_{n+1} = \dfrac{1}{n+1} C_n^{2n}$, в частности $x_{2006} = \dfrac{1}{2006} C_{2005}^{4010}$. Эти числа носят имя Каталана.

7. (*5 баллов*) Решите в целых числах уравнение $y^3 = x^6 + 2x^4 - 1000$.

Решение:

Очевидно, пара $x = 0$, $y = -10$ – решение задачи. Покажем, что других решений нет. Случаи $x = \pm 1$, $x = \pm 2$, $x = \pm 3$, $x = \pm 4$ проверяются непосредственно. Если же $|x| \ge 5$, то $2x^4 > 1000$, поэтому $x^6 + 2x^4 - 1000 > (x^2)^3$. С другой стороны, для всех x имеем $x^6 + 2x^4 - 1000 < (x^2 + 1)^3$. Значит, при всех x, по модулю больших 4, выполнено неравенство $x^2 < y < x^2 + 1$, невозможное для натуральных чисел x и y.

8. (*6 баллов*) Покажите, что существует такое натуральное число n, для которого выполняется неравенство $\dfrac{1}{2\ln 2} + \dfrac{1}{3\ln 3} + \ldots + \dfrac{1}{n \ln n} > 2005$.

Решение:

Покажем, что для любого x существует натуральное n такое, что $\frac{1}{2\log_2 2}+\ldots+\frac{1}{n\log_2 n}>x$

(при $x=2005\ln 2$ получим требуемое неравенство). Действительно, пусть $n=2^k$, тогда:

$$\frac{1}{2\log_2 2}+\ldots+\frac{1}{n\log_2 n}=\frac{1}{2\log_2 2}+\left(\frac{1}{3\log_2 3}+\frac{1}{4\log_2 4}\right)+\left(\frac{1}{5\log_2 5}+\ldots+\frac{1}{8\log_2 8}\right)+$$

$$+\ldots+\left(\frac{1}{\left(2^{k-1}-1\right)\log_2\left(2^{k-1}-1\right)}+\ldots+\frac{1}{2^k\log_2 2^k}\right)\geq\frac{1}{2\log_2 2}+\frac{2}{4\log_2 4}+\frac{4}{8\log_2 8}+\ldots+\frac{2^{k-1}}{2^k\log_2 2^k}=$$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{k}\right)$. Далее положим $k=2^m$. Аналогичным образом получим:

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{k}=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{8}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2^{k-1}+1}+\frac{1}{2^k}\right)\geq 1+\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\ldots+\frac{2^{k-1}}{2^k}=1+\frac{k}{2}.$$

Последнее выражение, очевидно, может принимать сколь угодно большие значения.

9. (*5 баллов*) Докажите, что многочлен $x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3p+2}$ делится на x^2+x+1 при любых натуральных числах m, n и p.

Решение:

Для решения задачи используем тот факт, что для любого натурального числа s многочлен t^s - 1 делится на t - 1. Имеем:

$$x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3p+2}-\left(x^2+x+1\right)=\left(x^{3m}-1\right)+x\left(x^{3n}-1\right)+x^2\left(x^{3p}-1\right)$$

Выражения в скобках в правой части делятся на x^3 - 1, поэтому

$$x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3p+2}=x^2+x+1+\left(x^3-1\right)P(x),$$

где $P(x)$ - некоторый многочлен. Для решения задачи остается заметить, что правая часть последнего выражения делится на x^2+x+1.

10. (*6 баллов*) На плоскости задана выпуклая фигура S, симметричная относительно начала координат. Известно, что площадь этой фигуры не меньше 4. Докажите, что не меньше трех точек с целочисленными координатами содержится в S. (Фигура называется выпуклой, если для любых двух точек A и B, содержащихся в ней, она содержит весь отрезок AB).

Доказательство:

Предположим, что утверждение в условии задачи неверно. Докажем тогда, что для произвольных точек A и B фигуры S координаты вектора $\overline{AB}$ не могут одновременно быть четными целыми числами. Допустим, что это не так. Тогда координаты точек A и B могут быть записаны следующим образом: $A(x,y)$ и $B(x+2m,y+2n)$, где m и n — некоторые целые числа. Поскольку фигура S симметричная, то точка $A'(-x,-y)$, симметричная точке A, также принадлежит S. Но из свойства выпуклости следует, что середина отрезка $A'B$ принадлежит S. Но середина отрезка $A'B$ имеет координаты (m,n), то есть является целочисленной точкой. Отсюда следует, что если фигуру S перенести на произвольный вектор с четными координатами, то полученная фигура S' не пересечет исходную. Теперь разрежем плоскость прямыми $x=2k_1+1$ и $y=2k_2+1$, где k_1 и k_2 — целые числа, на квадраты 2x2. После этого все части фигуры S, которые находятся в квадратах, не содержащих начало координат, перенесем на вектор с четными координатами так, чтобы они все попали в центральный квадрат. Как мы показали раньше, эти части не будут пересекаться. Поскольку исходная фигура поместилась в центральный квадрат площади 4, то площадь самой фигуры не может быть больше 4. Поэтому (в силу замкнутости) S совпадает с квадратом, а значит, содержит целочисленные точки. Противоречие. Эта теорема носит имя Минковского.