Решения задач
Заочной физико-математической олимпиады ФМБФ 2003/2004 года

Физика

1. (*5 баллов*) В предположении, что жидкость несжимаема, делаем заключение, что суммарный объем пузырьков не изменился. Если давление в пузырьке, оставшемся у дна, равно p, то во всплывшем пузырьке оно равно $p - \rho gh$. Объем всплывшего пузырька:

$$V_1 = \frac{p_0}{p - \rho gh} V_0$$

Здесь p_0 и V_0 – исходные давление и объем. Объем пузырька у дна: $V_2 = \frac{p_0}{p} V_0$

В случае всплытия одного пузырька условие сохранения объема имеет вид: $V_1 + 2V_2 = 3V_0$

Тогда:

$$p = \frac{(3\rho gh + 3p_0) + \sqrt{(3\rho gh + 3p_0)^2 - 24 p_0 \rho gh}}{6} \approx 0.215\,\text{МПа}$$

В случае всплытия двух пузырьков условие сохранения объема имеет вид: $2V_1 + V_2 = 3V_0$

Тогда:

$$p = \frac{(3\rho gh + 3p_0) + \sqrt{(3\rho gh + 3p_0)^2 - 12 p_0 \rho gh}}{6} \approx 0.228\,\text{МПа}$$

2. (*4 балла*) Сила, действующая на стержень при погружении его нижнего торца в воду на глубину x, равна:

$$F(x) = \begin{cases} -Sg(\rho_B x - L\rho), & x \le L \\ -SgL(\rho_B - \rho), & x > L \end{cases}$$

Здесь S – площадь поперечного сечения стержня, g – ускорение свободного падения, L – длина стержня, $\rho_В$ – плотность воды, ρ – плотность материала стержня.

Рассмотрим случай, когда стержень не погружается полностью. Второй закон Ньютона для движения стержня будет иметь вид:

$$m\ddot{x} = -Sg(\rho_B x - L\rho) \Rightarrow \rho SL\ddot{x} = -Sg\rho_B x + SgL\rho \Rightarrow \ddot{x} = g\left(1 - \frac{\rho_B}{L\rho} x\right)$$

Начальные условия: $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = v(0) = v_0$.

Обозначим $x_0 = \frac{L\rho}{\rho_B}$ $\quad\Rightarrow\quad$ $\ddot{x} = g\left(1 - \frac{x}{x_0}\right) = g\frac{x_0 - x}{x_0}$

Сделаем замену переменной: $z(t) = x(t) - x_0 \Rightarrow \ddot{z} + \frac{g}{x_0} z = 0$, $z(0) = -x_0$, $\dot{z}(0) = v_0$.

Мы получили уравнение свободных колебаний => $z(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$, частота $\omega = \sqrt{\frac{g}{x_0}}$.

Параметры A и φ определим из начальных условий: $\varphi = -arctg\frac{x_0\omega}{v_0}$, $A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}$. Отсюда:

$x(t) = x_0 + A\sin(\omega t + \varphi)$;

$v(t) = \dot{x}(t) = A\omega\cos(\omega t + \varphi) = 0$; (условие остановки погружения стержня)

$$\omega t^* + \varphi = \frac{\pi}{2} \quad => \qquad t^* = \frac{\frac{\pi}{2} - \varphi}{\omega} = \frac{\frac{\pi}{2} - arctg\frac{x_0\omega}{v_0}}{\omega} = \sqrt{\frac{L\rho}{g\rho_B}}\left(\frac{\pi}{2} - arctg\left(\frac{1}{v_0}\sqrt{\frac{Lg\rho}{\rho_B}}\right)\right).$$

Рассмотрим случай, когда погружение происходит на глубину $x^* > L$. Из закона сохранения энергии:

$$\frac{mv_0^2}{2} = -\int_0^{x^*} F(x)dx = -\int_0^L F(x)dx - \int_L^{x^*} F(x)dx = \int_0^L Sg(\rho_B x - L\rho)dx + \int_L^{x^*} SgL(\rho_B - \rho)dx;$$

$$\rho SL\frac{v_0^2}{2} = Sg\left[L(\rho_B - \rho)x^* - \frac{\rho_B L^2}{2}\right];$$

$$x^* = \frac{1}{\rho_B - \rho}\left(\frac{v_0^2\rho}{2g} + \frac{\rho_B L}{2}\right)$$ – предельная глубина погружения.

Условие полного погружения:

$$x^* \geq L \;=>\; \rho \geq \frac{g\rho_B L}{2gL + v_0^2}.$$

Время погружения будет складываться из времени погружения до глубины L (см. обозначения в предыдущей части решения) и времени погружения от глубины L до глубины x^* с постоянным отрицательным ускорением:

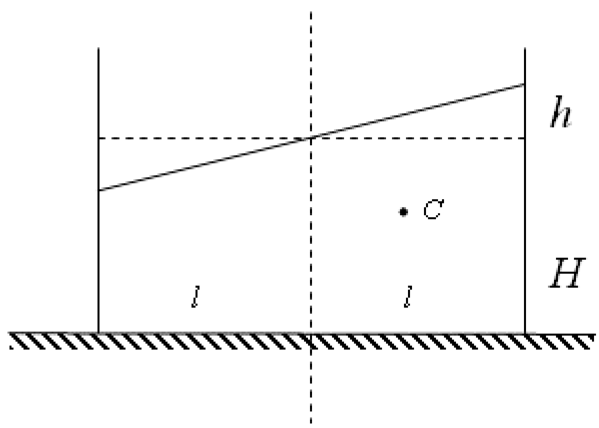
$$L = x_0 + A\sin(\omega t_1 + \varphi) \;=>\; \sin(\omega t_1 + \varphi) = \frac{L - x_0}{A} \;=>\; t_1 = \frac{1}{\omega}\left(\arcsin\frac{L - x_0}{A} - \varphi\right).$$

$$a = -\frac{mg - F_A}{m} = -g\frac{\rho_B - \rho}{\rho}$$

$$x^* - L = \frac{|a|t_2^2}{2} \;=>\; t_2 = \sqrt{\frac{2(x^* - L)\rho}{g(\rho_B - \rho)}}.$$

$$t^* = t_1 + t_2 = \frac{1}{\omega}\left(\arcsin\frac{L - x_0}{A} - \varphi\right) + \sqrt{\frac{2(x^* - L)\rho}{g(\rho_B - \rho)}}.$$

3. (*6 баллов*) Система будет совершать колебания вокруг общего центра масс воды и сосуда. Чтобы получить уравнение колебаний, запишем закон сохранения энергии и продифференцируем его по времени. Для этого понадобятся зависимость изменения координат центра масс воды и сосуда от высоты воды h с одного из краев.



За начало отсчета выберем точку, в которой находится центр масс воды и сосуда в состоянии равновесия. Потенциальная энергия воды в равновесии будет равна 0. Середина сосуда не выбрана за начало координат, т.к. она движется.

Рассмотрим прямоугольный треугольник с катетами l (по горизонтали) и h (по вертикали). Центра масс треугольника находится в точке пересечения медиан, то есть его имеет координаты $(2l/3; h/3)$ относительно неподвижной точки воды.

Масса такого треугольника равна $m^* = m\frac{lh/2}{2lH} = m\frac{h}{4H}$, где m – масса всей воды.

Изменение координат центра масс системы:

$$\Delta x_C = \frac{\frac{h}{4H} m \cdot \frac{2l}{3} \cdot 2}{m+M} = \frac{m}{m+M} \frac{l}{3H} h$$

$$\Delta y_C = \frac{\frac{h}{4H} m \cdot \frac{h}{3} \cdot 2}{m+M} = \frac{m}{m+M} \frac{1}{6H} h^2$$

Здесь пустующий треугольник учтен с отрицательной массой и отрицательными координатами. Закон сохранения энергии:

$$\frac{m+M}{2} (\Delta \dot{x}_C)^2 + (m+M) g \Delta y_C = const$$

Подставляем значения:

$$\frac{m+M}{2} \left(\frac{m}{m+M} \frac{l}{3H} \dot{h} \right)^2 + (m+M) g \frac{m}{m+M} \frac{1}{6H} h^2 = const$$

$$\frac{m+M}{2} \left(\frac{m}{m+M} \right)^2 \frac{l^2}{9H^2} \dot{h}^2 + (m+M) g \frac{m}{m+M} \frac{1}{6H} h^2 = const$$

Дифференцируем по времени:

$$\frac{m+M}{2} \left(\frac{m}{m+M} \right)^2 \frac{l^2}{9H^2} 2\dot{h}\ddot{h} + (m+M) g \frac{m}{m+M} \frac{1}{6H} 2h\dot{h} = 0$$

$$\ddot{h} + \frac{m+M}{m} \frac{3gH}{l^2} h = 0$$

Получилось уравнение вида $\ddot{h} + \omega^2 h = 0$ где $\omega = \sqrt{\frac{m+M}{m} \frac{3gH}{l^2}}$. Это известное уравнение гармонических колебаний с частотой ω.

Тогда период $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{M}{M+m} \frac{l^2}{3gH}}$.

4. (*6 баллов*) Для оценки примем, что скорость мяча не изменяется, скорость слоя воздуха непосредственно соприкасающегося с поверхностью мяча равна нулю, и увеличивается при удалении от поверхности до v_0 на расстояние, малое по сравнению с диаметром мяча.

Сила, которая заставляет мяч лететь по траектории, изгибающейся вправо, обусловлена разностью давлений воздуха с двух сторон от плоскости, в которой лежат скорость центра масс мяча и ось вращения, вследствие различной скорости потока прилегающего воздуха (эффект Магнуса). Для упрощения предположим, что справа от вертикальной плоскости скорости налетающего воздуха и прилегающих слоев складываются, а слева – вычитаются. Тогда давление справа:

$$p_1 = p_0 - \frac{1}{2} \rho (v_0 + \omega r)^2 \qquad (1)$$

А слева:

$$p_2 = p_0 - \frac{1}{2} \rho (v_0 - \omega r)^2 \qquad (2)$$

Здесь r – расстояние от вертикальной оси вращения до точки, где измеряется давление.

Рассмотрим элементарную площадку поверхности мяча. В полярных координатах ее площадь равна:

$$dS = R^2 \sin \vartheta \cdot d\varphi \cdot d\vartheta \qquad (3)$$

Каждой площадке слева от вертикальной плоскости соответствует такая же площадка справа, поэтому результирующая сила, действующая на эти две площадки равна (нас интересует только горизонтальная ее составляющая):

$$dF = p \cdot dS \cdot \sin\vartheta \cdot \sin\varphi \quad (4)$$

Разность давлений на соответственные элементарные площадки:

$$p = \left[p_0 - \frac{1}{2}\rho(v_0 - \omega r)^2 - p_0 + \frac{1}{2}\rho(v_0 + \omega r)^2 \right] = 2\rho\omega v_0 \cdot r \quad (5)$$

где:

$$r = R\sin\vartheta \quad (6)$$

R – радиус мяча.

Результирующая сила находится подстановкой полученных соотношений в формулу (4):

$$F = 2\rho\omega v_0 R^3 \cdot \int_0^{\pi} \sin^3\vartheta \cdot d\vartheta \cdot \int_0^{\pi} \sin\varphi \cdot d\varphi = 4\rho\omega v_0 R^3 \quad (7)$$

С другой стороны эта сила является центростремительной для полета мяча в проекции на горизонтальную плоскость. Радиус кривизны траектории в этой плоскости приближенно можно найти так:

$$L = \frac{a^2 + b^2}{2b} \quad (8)$$

где $a = 9$ м, $b = 0.5$ м. Откуда: $L \approx 80$ м.

Центробежная сила равна:

$$F = \frac{mv_0^2}{L} \quad (9)$$

Приравнивая правые части (7) и (9) получаем окончательную оценку:

$$\omega = \frac{mv_0}{8\rho R^3 L} \approx 8\ \text{с}^{-1}$$

При оценке использовались параметры футбольного мяча: $R \approx 0.125$ м, $m = 0.5$ кг. Как видим, оценка вполне приемлема.

5. (*7 баллов*) Для начала, нужно узнать момент инерции тетраэдра относительно оси, проходящей через его центр масс. Следует обратить внимание на то, что он будет одним и тем же для любой такой оси. Путем интегрирования получается, что:

$$I = \frac{1}{8}ma^2$$

Далее можно показать, что при малых углах отклонения системы вокруг вертикальной оси удлинение пружин будет второго порядка малости относительно изменения угла, если считать, что длина пружин соизмерима с линейными размерами тетраэдра. Но будем считать длину пружины достаточно малой, тогда удлинений пружины:

$$\Delta x = a\frac{\sqrt{3}}{3}\Delta\varphi$$

Потенциальная энергия трех растянутых пружин для малых колебаний: $E_n = 3 \cdot \frac{1}{2}ka^2\varphi^2$

Кинетическая энергия тетраэдра: $E_{ê} = \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2$

Суммарная энергия сохраняется, и дифференцирую по времени это условие, получаем уравнение гармонических колебаний: $3ka^2\varphi + I\ddot{\varphi} = 0$

Частота колебаний равна: $\omega = a\sqrt{\frac{3k}{I}} = 2\sqrt{2\frac{3k}{m}}$

Период: $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{24k}}$

6. (*5 баллов*) Пусть x_t – перемещение студента за время *t*, x_τ – перемещение студента за время τ, $x_{t+\tau}$ – перемещение студента за время $t+\tau$. Поскольку перемещения независимы, то $x_{t+\tau} = x_t + x_\tau$.
$x_{t+\tau}^2 = x_t^2 + 2x_t x_\tau + x_\tau^2$

Найдем среднюю величину:

$$\left\langle x_{t+\tau}^2 \right\rangle = \left\langle x_t^2 \right\rangle + 2\left\langle x_t x_\tau \right\rangle + \left\langle x_\tau^2 \right\rangle$$

Поскольку перемещения x_t и x_τ независимы, то $\left\langle x_t x_\tau \right\rangle = \left\langle x_t \right\rangle \left\langle x_\tau \right\rangle = 0$ (любому перемещению в сторону общежития соответствует равновероятное перемещение в другую сторону, т.е. $\left\langle x_t \right\rangle = \left\langle x_\tau \right\rangle = 0$)

Введем функцию $f(t) = \left\langle x_t^2 \right\rangle$ => $f(t+\tau) = f(t) + f(\tau)$

Решением этого уравнения, как легко увидеть, является функция $f(t) = at$, где *a* – некий параметр. => $\left\langle x_t^2 \right\rangle = at$ (уравнение Эйнштейна для броуновского движения).

Оценим *a* из того факта, что между столбами студент движется с постоянной скоростью *v*:

$$l^2 = at = a\frac{l}{v} \Rightarrow a = lv \Rightarrow L^2 = lvt \Rightarrow t = \frac{L^2}{lv} = \frac{500^2}{25*5/3{,}6} = 7200 \text{ сек, или 2 часа.}$$

7. (*5 баллов*) С одной стороны пластины будут собираться заряды противоположные по знаку к заряду *Q*, а с другой заряды такого же знака как *Q*. Поскольку электрическое поле шарика направлено во все стороны равномерно, а силовые линии поля входят в металл перпендикулярно, то можно представить, что пластины нет, а есть заряд, по модулю равный Q и противоположный ему по знаку и находящийся от него на расстоянии 2*d*. Тогда уравнение движения шарика выглядит так:

$$ma = -kx - k\Delta x + \frac{Q^2}{(2d + 2\Delta x)^2}$$

где *x* – это начальное удлинение пружины, *a* – это ускорение шарика, *m* – это его масса, $Q^2/(r+2*\Delta x)^2$ это кулоновская сила, действующая между зарядами.

$$ma = -kx - k\Delta x + \frac{Q^2}{4d^2(1 + \Delta x/d)^2}$$

Пользуясь формулой $(1+\Delta x)^{-n} \approx 1 - n\Delta x$, получаем:

$$ma = -kx - k\Delta x + \frac{Q^2}{4d^2} - \frac{Q^2}{2d^3}\Delta x,$$

где $Q^2/4d^2 = kx$ (из начальных условий)

$$ma + \left(k + \frac{Q^2}{2d^3}\right)\Delta x = 0 \text{ – уравнение колебаний}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2d^3}{2d^3k + Q^2}}$$

8. (*4 балла*) Из соображений симметрии ясно, что по параллелям ток течь не будет, поэтому их можно вовсе не рассматривать. Остается только 12 меридианов, представляющих собой 12 резисторов с сопротивлением *R*, соединенных параллельно. Очевидно, в этом случае сопротивление между полюсами будет равно *R*/12.

9. (*3 балла*) Рассматривая подобные треугольники на рисунке, можно записать следующее соотношение:

$$\frac{x+f}{y+f}=\frac{f}{y}$$

Откуда: $xy=f^2$

Найдем минимум выражения: $S(x)=x+y=x+\frac{f^2}{x}=f\left(\frac{x}{f}+\frac{f}{x}\right)$

Минимум выражения в скобках, очевидно, достигается при $x=f$, поэтому наименьшее расстояние между предметом и его изображением равно $4f$.

Очевидно, в данной задаче рассматривается действительное изображение. Если же рассматривать мнимое изображение, то расстояние между ним и предметом может быть сколь угодно малым.

10. (*5 баллов*) Идея определения массы состоит в следующем. Поставим канистру с водой на ребро и будем наклонять до тех пор, пока она не перестанет возвращаться в вертикальное положение и начнет падать на бок. Если бы канистра была пуста, то критический момент начала падения канистры наступал бы тогда, когда ее центр находился точно над ребром, стоящим на поверхности стола. Если же в канистре есть вода, то он создает дополнительный момент силы тяжести, который тянет коробку назад, и коробку можно наклонять на больший угол, чем пустую. Критический момент найдется из равенства моментов сил тяжести коробки и сока:

$mgL_c=MgL_к$ (*)

Здесь $L_с$ – расстояние по горизонтали от ребра, стоящего на столе, до центра масс сока, $L_к$ – до центра масс коробки, M – известная масса коробки, m – искомая масса сока.

Из геометрических соображений ясно, что

$$L_K=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}\cos(\angle OBC+\alpha)$$

При этом величины углов OBC и α находятся с помощью измерительной рулетки:

$$\sin\alpha=\frac{h}{b};\qquad tg\angle OBC=\frac{a}{b};$$

Известно, что центр масс треугольника находится в точке пересечения медиан, поэтому нетрудно найти величину $L_с$:

$$L_C=\frac{2}{3}BM\cos\left(\angle MBA+\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{2}{3}AM\cos(\pi-\alpha)=\frac{1}{3}\left(1-2\cos^2\alpha\right)x$$

Здесь x – гипотенуза треугольника, образованного объемом воды. Ее величину можно найти, зная объем сока V:

$(c/2)(x\sin\alpha)(x\cos\alpha)=V$ (c – длина третьего ребра коробки)

Итак, все величины, входящие в формулу (*), могут быть найдены из измеренных длин ребер канистры и высоты точки С над столом.

Чистый лист нужен для того, чтобы записать результаты измерений и сделать вычисления ☺.

Математика

(все задачи по 5 баллов)

1. Пусть $x \le y \le z$. Сделаем замену: $y = x + a$, $z = x + b$. После раскрытия скобок придем к неравенству: $2x(a-b)^2 + (a^2 - b^2)(a-b) \ge 0$, которое выполняется, так как слева все числа неотрицательны.

2. Из теоремы синусов получим: $BS = AS\dfrac{\sin\angle BAS}{\sin B}$ и $CS = AS\dfrac{\sin\angle CAS}{\sin C}$. Поэтому $\dfrac{BS}{CS} = \dfrac{\sin\angle BAS}{\sin\angle CAS}\dfrac{\sin C}{\sin B} = \dfrac{\sin\angle CAM}{\sin\angle BAM}\dfrac{c}{b}$. Опять же по теореме синусов: $\sin\angle CAM = \sin C\dfrac{CM}{AM}$ и $\sin\angle BAM = \sin B\dfrac{BM}{AM}$, откуда $\dfrac{BS}{CS} = \dfrac{\sin C}{\sin B}\dfrac{c}{b} = \left(\dfrac{c}{b}\right)^2$.

3. Выберем на прямой CX точку D так, чтобы $AD = AC$. Тогда $\angle ADC = \angle ACX = \angle ABX$ и $\angle ADB = \angle ABD$. Поэтому $\angle XDB = \angle ADB - \angle ADX = \angle ABD - \angle ABX = \angle XBD$. То есть треугольник XBD равнобедренный, поэтому $DX = BX$, после чего исходное равенство переписывается в виде $CY = YX + XD = DY$, что истинно.

4. При раскрытии скобок в выражении $\left(7+4\sqrt{3}\right)^{2004} + \left(7-4\sqrt{3}\right)^{2004}$ все радикалы сократятся, поэтому эта сумма — целое число. Осталось заметить, что $\left(7-4\sqrt{3}\right)^{2004} < 0{,}1^{2004}$, поэтому $N > \left(7+4\sqrt{3}\right)^{2004} > N - 0{,}1^{2004}$, где N — некое целое число, то есть искомые первые 2004 цифры после запятой будут девятками.

5. Легко видеть, что для x, лежащих во второй и третьей четверти, неравенство выполняется. Также нетрудно понять, что рассмотрение неравенства в четвертой четверти равносильно рассмотрению его в первой. Для $x \in (0, \pi/2]$ получим: $x > \sin x$, поэтому $\cos(\sin x) > \cos x > \sin(\cos x)$. Осталось проверить, что при $x = 0$ неравенство тоже выполняется. Поэтому $x \in \Re$.

6. Нет. Допустим обратное. Пусть $a_m = 7, a_n = 8, a_p = 9$. Тогда $\left(\dfrac{7}{8}\right)^a = \left(\dfrac{7}{9}\right)^b$ для некоторых натуральных a, b, что невозможно, так как тогда $7^a 9^b = 7^b 8^a$, а правая часть на 9 не делится.

7. Заметим, что если прямая не проходит через любой узел ломаной, то она пересекает эту ломаную в четном числе точек. Поэтому исходная прямая обязательно проходит через какой-либо узел ломаной. Далее надо это прямую сдвинуть параллельно самой себе так, чтобы она «сошла» с этого узла, но при этом не прошла через новый узел. Это сделать можно, так как количество узлов конечно, поэтому можно всегда указать ближайший узел к прямой и сдвигать на расстояния, меньшие расстояния до этого узла. Далее могут быть такие сочленения звений ломаной, у которых узел лежит на прямой, а оба звена лежат в одной полуплоскости от этой прямой (тогда при сдвиге в противоположную полуплоскость мы уменьшим число пересечений). Однако, если мы выберем ту полуплоскость, в которой число таких сочленений не меньше, чем в другой, то при малом сдвиге в эту полуплоскость число пересечений увеличится.

8. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_{2004}$ — данные числа. Рассмотрим числа $S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, \ldots, S_{2004} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{2004}$. Тогда возможны два варианта: либо среди них есть число, которое делится на 2004, либо нет. В последнем случае существуют по крайней мере два числа S_i, S_j $(i > j)$, имеющий одинаковый остаток при делении на 2004. Их разность $S_i - S_j = a_{j+1} + \ldots + a_i$ делится на 2004.

9. Для этой последовательности справедливо рекуррентное соотношение: $a_{n+1} = 5a_n - 8a_{n-1} + 4a_{n-2}$ (его можно получить, записав выражения для четырех последовательных членов последовательности и исключив оттуда неизвестные A, B, C, n). Тогда легко математической индукцией показывается, что если три первых числа делятся на 13, то и все последующие тоже делятся на 13.

10. Предположим, что наше утверждение неверно и два многочлена с целыми коэффициентами $P(x)$ и $Q(x)$ имеют только один общий иррациональный корень x_0. Заметим, что для любых двух многочленов $A(x), B(x)$ с целыми коэффициентами многочлен $A(x)P(x) + B(x)Q(x)$ также будет иметь корень x_0. Однако, поскольку общий корень единственный, то можно подобрать многочлены $A(x), B(x)$ так, чтобы многочлен $A(x)P(x) + B(x)Q(x)$ был линейным (попробуйте, взяв вместо $A(x), B(x)$ многочлены нулевой степени, то есть константы, получить в итоге квадратный трехчлен; далее с его помощью можно получить многочлен первой степени). Но ведь коэффициенты многочлена $A(x)P(x) + B(x)Q(x)$ целые, поэтому его корень — x_0 — не может быть иррациональным.