Московский физико-технический институт
(государственный университет)
Факультет Молекулярной и Биологической Физики

Решение задач
Заочной физико-математической олимпиады ФМБФ
2008-2009 года

Москва – 2009

Физика

1. Опишем таракана как прямоугольник со сторонами a и b. Тогда переворот можно описать как вращение относительно неподвижной вершины прямоугольника. Условие переворота – кинетическая энергия вращения равна потенциальной энергии прямоугольника, стоящего на неподвижной вершине. Конечно, надо учесть, что для переворота с «головы» на «спину» нужна еще дополнительная энергия на преодоление амортизации, но эти затраты малы по сравнению с потенциальной энергией таракана. Поэтому можно считать, что если таракан достиг верхнего положения, то он в любом случае опрокинется на спину.

$$\frac{L^2}{2I} = mg\left(r_c - \frac{b}{2}\right) \qquad (1)$$

Здесь L – момент импульса таракана, I – его момент инерции, r_c – расстояние от вершины до центра пластины:

$$r_c = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}. \qquad (2)$$

Момент инерции прямоугольной пластины относительно вершины равен

$$I = I_c + mr_c^2 = \frac{m}{12}\left(a^2+b^2\right) + m\frac{a^2+b^2}{4} = \frac{m}{3}\left(a^2+b^2\right). (3)$$

Обозначим угол между диагональю и меньшей стороной b как α. Начальный момент импульса равен

$$L = \frac{mvb}{2} \qquad (4)$$

Подставляем (2), (3) и (4) в выражение (1):

$$\frac{3(mvb)^2}{8m(a^2+b^2)} = mg\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}-b}{2}\right)$$

откуда

$$v = \frac{2}{b}\sqrt{\frac{g}{3}(a^2+b^2)(\sqrt{a^2+b^2}-b)} = 1{,}7\,м/с.$$

Ответ: 1,7 *м/с*.

2. Найдем ток через катушку в момент, когда размыкают ключ K_2. По правилам Кирхгофа

$$E - L\ddot{q} = \frac{q}{C},$$

откуда при начальных условиях $q(0) = q_0$, $I(0) = 0$ имеем

$$q(t) = \left(q_0 - EC\right)\cos\omega t + EC,\ I(t) = -\left(q_0 - EC\right)\omega\sin\omega t,$$

где $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. В момент времени t_0 такой, что $q(t_0) = \left(q_0 - EC\right)\cos\omega t_0 + EC = q_1$ имеем

$$I(t_0) = -(q_0 - EC)\omega\sin\omega t_0 = I_0,\ I_0 = \omega\sqrt{(q_0-EC)^2 - (q_1-EC)^2}.$$

После переключения ключей имеем

$$-L\dot{I} = IR \ \Rightarrow\ -LdI = IRdt,$$

и протекший через резистор заряд равен

$$Q = \int_0^\infty I(t)dt = -\int_{I_0}^0 L\frac{dI}{R} = L\frac{I_0}{R} = \sqrt{\frac{L}{CR^2}\left(\left(q_0-EC\right)^2 - \left(q_1-EC\right)^2\right)}.$$

Ответ: $Q = \sqrt{\frac{L}{CR^2}\left(\left(q_0-EC\right)^2 - \left(q_1-EC\right)^2\right)}$.

3. Пусть в момент, когда космонавт отпустил шарик, корабль находился на некоторой высоте h. По условию, за время движения шарика корабль успел преодолеть малое расстояние в том смысле, что ускорение свободного падения в районе местонахождения корабля изменилось мало:

$$\frac{\Delta g}{g} << 1$$

в силу чего ускорение свободного падения можно приближенно считать постоянным. Поскольку $g = \frac{GM}{(R+h)^2}$, где M и R соответственно масса и радиус астероида, то это условие эквивалентно

$$\frac{\Delta h}{R+h} << 1 .$$

Равноускоренное движение корабля от астероида приводит к тому, что шарик относительно корабля также совершает равноускоренное движение с ускорением $2g$. Если ось x направить вертикально вверх и отсчет вести от поверхности пола корабля, то уравнение движения шарика вниз будет иметь следующий вид:

$$x_{\downarrow}(t) = l - \frac{2gt^2}{2},$$

откуда время движения вниз равно

$$\tau_{\downarrow} = \sqrt{\frac{l}{g}} .$$

Поскольку корабль можно считать неизмеримо более массивным, чем шарик, то после абсолютно упругого удара скорость шарика, к моменту времени $\tau_{\downarrow}$ ставшая по модулю равной $2g \cdot \sqrt{l/g} = 2\sqrt{gl}$, станет направленной вверх, после чего шарик будет двигаться по закону

$$x_{\uparrow}(t) = \left(t - \tau_{\downarrow}\right) \cdot 2\sqrt{gl} - \frac{2g \cdot \left(t - \tau_{\downarrow}\right)^2}{2},$$

откуда время движения вверх равно

$$\tau_{\uparrow} = \sqrt{\frac{l}{g}} .$$

Таким образом, полное время движения шарика

$$\tau = 2\sqrt{\frac{l}{g}} = 2(R+h)\sqrt{\frac{l}{GM}},$$

откуда $k = 2\sqrt{\frac{l}{GM}}$, $b = kR$. Таким образом,

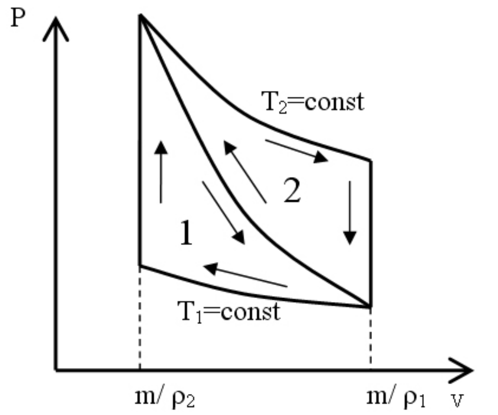
$$R = \frac{b}{k}, \quad M = \frac{4l}{Gk^2}, \quad g_0 = \frac{4l}{b^2} .$$

Вычисления дают R=100 км, $M \approx 10^{19}$ кг, $g_0 \approx 0{,}064$ м/с^2. При этом действительно

$$\frac{\Delta h}{R+h} \sim \frac{g_0 \tau^2}{R} \sim \frac{l}{R} << 1 .$$

Ответ: $R = 100$ км, $M \approx 10^{19}$ кг, $g_0 \approx 0{,}064$ м/с^2.

4. Согласно уравнению Менделеева-Клапейрона $PV = \frac{m}{\mu} RT$, откуда плотность $\rho = \frac{P\mu}{RT}$. Из рисунка следует, что $\frac{\rho_1}{T_1} = \frac{\rho_2}{T_2} = c$, где c – константа. Нарисуем циклы в координатах V, P.



При этом изотермы T_1=*const* и T_2=*const* задаются уравнениями $P=\dfrac{mRT_1}{\mu V}$ и $P=\dfrac{mRT_2}{\mu V}$ соответственно. Прямые $\rho_1 = const$ и $\rho_2 = const$ перейдут в изохоры $V_1=\dfrac{m}{\rho_1}$ и $V_2=\dfrac{m}{\rho_2}$, а прямая $\rho = cT$ – в кривую $P=\dfrac{m^2R}{c\mu V^2}$.

Площадь под изотермой T_1=*const* равна

$$S_1=\int\limits_{m/\rho_2}^{m/\rho_1}\frac{mRT_1}{\mu V}dV=\frac{m}{\mu}RT_1\ln\frac{\rho_2}{\rho_1}=\frac{m}{\mu}RT_1\ln\frac{T_2}{T_1},$$

под кривой $P=\dfrac{m^2R}{c\mu V^2}$

$$S_2=\int\limits_{m/\rho_2}^{m/\rho_1}\frac{m^2R}{c\mu V^2}dV=\frac{m^2R}{c\mu}\left(\frac{\rho_2}{m}-\frac{\rho_1}{m}\right)=\frac{m}{c\mu}R\left(\rho_2-\rho_1\right)=\frac{m}{\mu}R\left(T_2-T_1\right),$$

а под изотермой T_2=*const*

$$S_3=\int\limits_{m/\rho_2}^{m/\rho_1}\frac{mRT_2}{\mu V}dV=\frac{m}{\mu}RT_2\ln\frac{\rho_2}{\rho_1}=\frac{m}{\mu}RT_2\ln\frac{T_2}{T_1}.$$

Выясним, сколько тепла передается рабочему телу в обоих циклах. При движении по изотерме $T=T_1$ имеем $dU=0$, следовательно $Q_{T=T_1}=A_{T=T_1}=-S_1<0$ и тепло отводится. На кривой $P=\dfrac{m^2R}{c\mu V^2}$ имеем $\delta Q_{T_2\to T_1}=dU_{T_2\to T_1}+pdV=\dfrac{i-2}{2}\dfrac{m}{\mu}RdT$ (i – количество степеней свободы газа), т.е. там тепло также отводится, т.к. $dT<0$. Тепло подводится только при изохорном переходе с одной изотермы на другую, когда рабочее тело получает его в количестве

$$Q_1^+=\Delta U_{12}=\frac{i}{2}\frac{m}{\mu}R\left(T_2-T_1\right).$$

Аналогично со вторым циклом: тепло отводится при изохорном переходе с одной изотермы на другую, на остальных кривых тепло подводится:

$$Q_2^+=\frac{i-2}{2}\frac{m}{\mu}R\left(T_2-T_1\right)+S_3=\frac{i-2}{2}\frac{m}{\mu}R\left(T_2-T_1\right)+\frac{m}{\mu}RT_2\ln\frac{T_2}{T_1}.$$

Тогда к.п.д. циклов равны соответственно

$$\eta_1=\frac{A_1}{Q_1^+}=\frac{S_2-S_1}{Q}=\frac{2}{i}\left(1-\frac{T_1\ln\left(T_2/T_1\right)}{T_2-T_1}\right),$$

$$\eta_2 = \frac{A_2}{Q_2^+} = \frac{S_3 - S_2}{Q} = 1 - \frac{i}{2}\frac{T_2 - T_1}{T_2 \ln\left(T_2/T_1\right) + \frac{i-2}{2}\left(T_2 - T_1\right)}.$$

В силу $\left(3-\eta_1\right)\left(1-\eta_2\right) = 1$ имеем уравнение относительно $x = T_1/T_2$:

$$\left(3 - \frac{2}{i}\left(1 - \frac{x \ln x}{x-1}\right)\right)\frac{i}{2}\frac{x-1}{\ln x + \frac{i-2}{2}\left(x-1\right)} = 1,$$

откуда

$$\left(i + \ln x\right)\left(x-1\right) = 0.$$

Поскольку по смыслу задачи $x \in \left(0,1\right)$, то единственный корень – $x = e^{-i}$.

Ответ: $T_2/T_1 = e^i$.

5. Рассмотрим куб со стороной *d*, в центре которого находится точечный заряд *q*. По теореме Гаусса полный поток вектора *E* через поверхность куба равен *4kπq* (в СИ). В силу центральной симметрии, поток через одну грань равен $\frac{2}{3}k\pi q$.

Теперь «поднесём» к нашему заряду вышеозначенную шахматную доску. В силу осевой симметрии грани поток вектора *E* через все чёрные клетки равен $\frac{1}{3}k\pi q$ и сила взаимодействия её с зарядом направлена перпендикулярно плоскости доски.

Рассмотрим на доске малую площадку площади ΔS. Поток вектора *E* через неё равен $\frac{kq\cos\alpha\Delta S}{r}$, где α – угол между перпендикуляром к ΔS и прямой, проходящей через *q* и ΔS. Составляющая силы взаимодействия между этой площадкой и зарядом *q*, направленная перпендикулярно плоскости доски, равна $\frac{kq\sigma\Delta S\cos\alpha}{r^2}$. Видно, что эта сила пропорциональна потоку вектора *E* с коэффициентом σ.

Просуммировав по всем Δ*S*, получим искомую силу взаимодействия. Поскольку $\sigma = \frac{q}{\frac{d^2}{2}} = \frac{2q}{d^2}$, то $F = \frac{1}{3}k\pi\frac{2kq}{d^2}q = \frac{2}{3}\pi k\frac{q^2}{d^2} = \frac{1}{6\varepsilon_0}\frac{q^2}{d^2}$

Ответ: $F = \frac{1}{6\varepsilon_0}\frac{q^2}{d^2}$.

6. Предположение, что шарик полностью погрузился под лед, оправдывается дальнейшими вычислениями. Тогда объем расплавившегося льда равен сумме объемов цилиндра и полусферы:

$$V = \pi R^2 h + \frac{2}{3}\pi R^3.$$

Количество теплоты, отданное при охлаждении шара,

$$Q_1 = \frac{4}{3}\pi\rho_1 R^3 c(t_1 - t_2),$$

где ρ_1 – плотность железа; *c* – его удельная теплоемкость. Количество теплоты, полученное льдом для плавления, равно: $Q_2 = \lambda m_2 = \lambda\rho_2 V = \lambda\rho_2\left(\pi R^2 h + \frac{2}{3}\pi R^3\right)$,

где m_2, ρ_2 – масса и плотность льда. По закону сохранения энергии $Q_1 = Q_2$, откуда

$$h = \frac{2}{3}\left(2\frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{c\left(t_1 - t_2\right)}{\lambda} - 1\right)R.$$

Подставляя наши значения, получим *h* = 1,9 *см*. Всего шар погрузился на (1,9+2) *см* = 3,9 *см*.
Ответ: *h* = 3,9 *см*.

7. Закон изменения силы упругости легкого жгута следующий:

$$F = \begin{cases} -k\left(l - l_0\right), & l > l_0 \\ 0, & l \le l_0 \end{cases}$$

где l_0 – длина нерастянутого жгута. В состоянии равновесия до перерезания нити

$$\left(m + M\right)g = k\left(l_1 - l_0\right) \Rightarrow l_1 = l_0 + \frac{\left(m + M\right)g}{k},$$

а после:

$$l_2 = l_0 + \frac{mg}{k}.$$

В нашем случае ($M > m$) есть периоды времени, когда жгут не натянут, а грузик m находится в состоянии свободного падения, совершая тем самым ангармонические колебания.

Ось x направим вертикально вниз, а начало отсчета поместим в новое положение равновесия. Поскольку амплитуда гармонических колебаний грузика равна Mg/k и $x\left(0\right) = \dfrac{Mg}{k}$, то уравнение гармонической части движения таково:

$$x(t) = \frac{Mg}{k}\cos\left(\frac{2\pi t}{T_0}\right).$$

Натяжение жгута исчезнет в момент времени τ_1 такой, что

$$x(\tau_1) = \frac{Mg}{k}\cos\left(\frac{2\pi\tau_1}{T_0}\right) = -\frac{mg}{k}.$$

Скорость его в этот момент равна по модулю

$$V = \frac{2\pi Mg}{kT_0}\sin\left(\frac{2\pi\tau_1}{T_0}\right) = \frac{2\pi g}{kT_0}\sqrt{M^2 - m^2}$$

и направлена вертикально вверх. Двигаясь с ускорением свободного падения, грузик вернется обратно в эту точку через время

$$\tau_2 = \frac{2V}{g} = \frac{4\pi\sqrt{M^2 - m^2}}{kT_0}.$$

Возвращаться в исходную точку грузик будет опять по гармоническому закону, причем в силу симметрии это займет время

$$\tau_3 = \tau_1.$$

Таким образом, полное время возвращения грузика в отправную точку будет равно

$$\tau = \left(1 - \frac{1}{\pi}\arccos\frac{m}{M}\right)T_0 + \frac{4\pi\sqrt{M^2 - m^2}}{kT_0}, \quad \tau = \sqrt{\frac{m}{k}}\left(\frac{4}{3}\pi + 2\sqrt{3}\right).$$

Ответ: $\tau = \sqrt{\dfrac{m}{k}}\left(\dfrac{4}{3}\pi + 2\sqrt{3}\right)$.

8. Пробка вылетает из-за гидравлического удара, когда жидкость после удара движется по направлению от стенки. Однако в тех случаях, когда перед ударом между жидкостью и пробкой нет воздуха, в этой области при ударе создается вакуум, и внешнее давление вталкивает пробку внутрь.

9. «Лужи» на асфальте объясняются отражением световых лучей от горячего воздуха. Воздух над шоссе нагрет неравномерно – у поверхности дороги он нагрет сильнее – поэтому обладает разной оптической плотностью. Менее нагретый воздух обладает большим коэффициентом преломления, чем более нагретый при таком же составе и давлении, поэтому луч при переходе от более холодного воздуха к более горячему испытывает полное внутреннее отражение.

Из закона Снеллиуса следует, что при распространении света выполняется следующее соотношение (см. рис.):

$$n\sin\alpha = const \ .$$

В нижней точке траектории происходит полное внутреннее отражение: $\alpha_1 = \pi/2$, следовательно $const = n_1$.

Луч попадает в глаз под некоторым углом $\beta = \pi/2 - \alpha_2$:

$$\beta = \arccos\frac{n_1}{n_2},$$

который определяет видимое местоположение объекта:

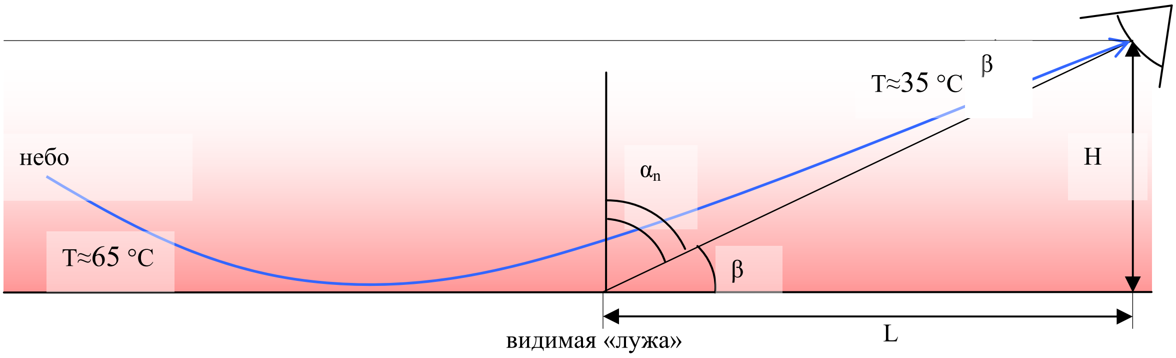
$$L = \frac{H}{tg\beta} \approx \frac{H}{\beta},$$

где $H \approx 1{,}8$ *м* – ориентировочный рост человека.

Температура воздуха вблизи асфальта равна $T_1 \approx 65$ °С, а вблизи глаза – $T_2 \approx 35$ °С. Соответствующие показатели преломления воздуха $n_{1,2}$ определятся из соотношения

$$\frac{n_0 - 1}{n_{1,2} - 1} = \frac{\rho_0}{\rho_{1,2}} = \frac{T_{1,2}}{T_0},$$

где $n_0 = 1{,}000292$ – показатель преломления воздуха при нормальных условиях, т.е. при $T_0 = 0$ °С.



Подставляя численные данные задачи, находим $\beta \approx 0{,}00678$, откуда $L \approx 265$ *м*.

Ответ: $L \approx 265$ *м*.

10. Смена знака кривизны поверхности жидкости происходит при скорости потока, равной $v_{кр}$ и являющейся некоторой функцией параметров системы: $v_{кр} = v_{кр}(D, d, \rho, \eta)$, где D – размер сосуда, d – величина поперечного сечения струи вблизи поверхности жидкости плотности ρ и вязкости η. При достаточно больших размерах сосуда $D >> d$ эта скорость от D не зависит. При этих условиях все системы с плоской поверхностью жидкости должны быть гидродинамически подобны, то есть характеризоваться одинаковыми числами Рейнольдса:

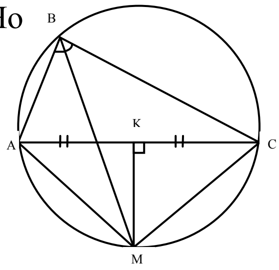
$$\mathrm{Re} = \frac{\rho v_{кр} d}{\eta} = const \ \Rightarrow \ v_{кр} \approx \frac{\eta}{\rho}\frac{1}{d}.$$

Плотность и вязкость молочных продуктов главным зависят от их химического состава, в частности содержания белков и жиров. Вязкость также зависит от размеров белковых частиц и шариков жира, а также внутренней структурированности самой жидкости. В целом, с повышением жирности продукта его вязкость увеличивается, а плотность – уменьшается. Следовательно, с повышением вязкости критическая скорость растет.

Рассмотрим теперь стационарный процесс вливания жидкости в сосуд конечных размеров, при котором на поверхности жидкости образуется небольшая «ямка». При наличии у сосуда границ они будут гасить определенную долю импульса потока жидкости. Чтобы восполнить эти потери и восстановить ту кривизну поверхности, которая была бы при отсутствии у сосуда границ, необходимо увеличить скорость втекающего потока. Следовательно, с уменьшением размеров сосуда критическая скорость растет.

Математика

1. Продлим биссектрису угла B до пересечения с описанной окружностью (точка M). $\angle MAC = \angle MBC$; $\angle MCA = \angle MBA$ (т.к. опираются на одинаковые дуги). Но $\angle ABM = \angle MBC$ (т.к. BM – биссектриса). Значит AMC – равнобедренный треугольник. Значит, высота MK будет также и серединным перпендикуляром. Отсюда и следует, что точка пересечения серединного перпендикуляра стороны MK и биссектрисы совпадает с точкой пересечения биссектрисы и описанной окружности. Отсюда и следует утверждение задачи.



2. $(a+b+c)^2 = 9 = \dfrac{a^2+b^2}{2} + \dfrac{b^2+c^2}{2} + \dfrac{c^2+a^2}{2} + 2ab + 2bc + 2ac \geq 3(ab+bc+ac)$

$\Rightarrow (ab+bc+ac) \leq 3$.

Применяя далее неравенство Коши-Буняковского для наборов чисел $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$ и $\sqrt{ab}, \sqrt{bc}, \sqrt{ac}$, получим

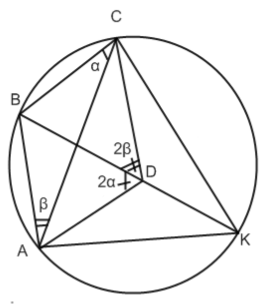
$$\sqrt{a}b + \sqrt{b}c + \sqrt{c}a \leq \sqrt{(ab+bc+ac)(a+b+c)} \leq \sqrt{3\cdot 3} = 3.$$

3. $f(1-2x) = f(2x) = f(1-x) = f(2-2x) = f(1-(2x-1)) = f(2x-1)$, т.е $\forall x \in R \quad f(2x-1) = f(1-2x)$. Значит, $f(x)$ – четная, $f(x) = f(-x) \quad \forall x \in R$. $f(x+1) = f(1-(-x)) = f(-x) = f(x)$, т.е. $f(x) = f(x+1)$. Значит, 1 – период.

4. Опишем вокруг треугольника ABC окружность. Продлим BD до пересечения с окружностью. $\angle AKB = \angle BCA$, $\angle BKC = \angle BAC$ (опираются на одни и те же дуги).

$\angle ADB = \angle DAK + \angle DKA$ (свойство внешнего угла). Таким образом $\angle DAK = \alpha$, т.е. $AD = DK$. Аналогично $\angle BDC = \angle DCK + \angle DKC$, $\angle DCK = \beta \Rightarrow DK = DC$, т.е. $AD = CD$.

<u>Ответ</u>: $\dfrac{AD}{CD} = 1$.



5. Обозначим $\dfrac{BC_1}{C_1A} = x, \dfrac{AB_1}{B_1C} = y, \dfrac{CA_1}{A_1B} = z$. Тогда по теореме Чевы $xyz = 1$. Обозначим $S_{ABC} = S, S_{A_1B_1C_1} = S_1$. Далее заметим, что

$$\frac{S_{BC_1A_1}}{S_{ABC}} = \frac{BC_1 \cdot BA_1}{BA \cdot BC} = \frac{1}{\dfrac{BC_1 + C_1A}{BC_1} \cdot \dfrac{BA_1 + A_1C}{BA_1}} = \frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\cdot(1+z)} = \frac{x}{(1+x)\cdot(1+z)}.$$

Аналогично получаем $\dfrac{S_{AC_1B_1}}{S_{ABC}} = \dfrac{y}{(1+x)(1+y)}$, $\dfrac{S_{CA_1B_1}}{S_{ABC}} = \dfrac{z}{(1+y)(1+z)}$.

Отсюда получаем $\dfrac{S_1}{S} = 1 - \dfrac{x}{(1+x)\cdot(1+z)} - \dfrac{y}{(1+y)\cdot(1+x)} - \dfrac{z}{(1+z)\cdot(1+y)} = \dfrac{1+xyz}{(x+1)\cdot(y+1)\cdot(z+1)} =$

$= \dfrac{2}{(x+1)(y+1)(z+1)}$. Так как $1 + a \geq 2\sqrt{a}$, то получаем $\dfrac{S_1}{S} \leq \dfrac{2}{8\sqrt{xyz}} = \dfrac{1}{4}$, то есть соотношение верно для любого треугольника, а значит и для равностороннего.

6. $\sin^2(x+y)\cos(x-y)+\sin^2(x-y)\cos(x+y)=\left(\sin^2 x\cos^2 y+\frac{1}{2}\sin 2x\sin 2y+\sin^2 y\cos^2 x\right)\times$

$\times(\cos x\cos y+\sin x\sin y)+\left(\sin^2 x\cos^2 y-\frac{1}{2}\sin 2x\sin 2y+\sin^2 y\cos^2 x\right)(\cos x\cos y-\sin x\sin y)=$

$=2\sin^2 x\cos^3 y\cos x+\sin 2x\sin 2y\sin x\sin y+2\sin^2 y\cos^3 x\cos y=2\cos x\cos y(\sin^2 x\cos^2 y+$

$+2\sin^2 x\sin^2 y+\sin^2 y\cos^2 x)=2\cos x\cos y\left(\sin^2 x+\sin^2 y\right)=3\cos x\cos y=-\frac{3}{2}(\cos x-\cos y)^2+$

$\frac{3}{2}\left(\cos^2 x+\cos^2 y\right)=-\frac{3}{2}(\cos x-\cos y)^2+\frac{3}{2}\left(2-\left(\sin^2 x+\sin^2 y\right)\right)=-\frac{3}{2}(\cos x-\cos y)^2+\frac{3}{4}\le\frac{3}{4}.$

Ответ: $\frac{3}{4}$.

7. Заметим, что кузнечик может ходить только по таким клеткам, что сумма абсциссы и ординаты являются четным числом (сюда же относятся точки начала и домика). Таким образом, все точки плоскости делятся на 2 множества по принципу четности суммы координат. Если кузнечик и лягушка исходно находятся в полях с разной четностью суммы, то они никогда не встретятся.

Проведем из точки домика диагонали вниз (вниз и вправо, вниз и влево), а из исходной точки – диагонали вверх (вверх и вправо, вверх и влево). Мы получаем прямоугольник (в вырожденном случае $n = m$ прямую), внутри которого может передвигаться кузнечик. Поскольку $n \ge m$, точки пересечений диагоналей лежат ниже точки домика. Если точка лягушки лежит вне данного прямоугольника (прямой), кузнечик и лягушка никогда не встретятся.

При n > m вершины прямоугольника имеют следующие координаты: (0;0), ($2m$;$2n$), (m-n;n-m), (m+n;m+n). Последние 2 точки можно найти из координат центра прямоугольника с координатами (m;n) и условия симметрии прямоугольника относительно центра.

Пусть из точки *внутри* прямоугольника с координатами (i;j) кузнечик имеет $N(i,j)$ вариантов добраться до домика. Поскольку из этой точки кузнечик может пойти только по диагонали вверх, получаем:

$$N(i,j)=N(i+1,j+1)+N(i-1,j+1)$$

Очевидно, что с клеточек, находящихся по диагонали от домика, существует единственный способ добраться до домика. На строке $2n$-1 получаем числа 1, 1; на $2n$-2 получаем числа 1, 2, 1; на $2n$-3 получаем числа 1, 3, 3, 1; и т.д. Видно, что мы получили треугольник Паскаля, который состоит из числовых коэффициентов в разложении бинома Ньютона:

$$C_{k+l}^{k}=C_{k+l}^{l}=\frac{(k+l)!}{k!\cdot l!}$$

где k и l – расстояние в клеточках от домика до проекции точки (i;j) на диагонали. Построенный ранее прямоугольник имеет стороны в n+m и n–m клеточек, поэтому число вариантов в отсутствие лягушки равно:

$$N=C_{2n}^{n-m}=\frac{(2n)!}{(n-m)!(n+m)!}$$

При $n = m$ прямоугольник вырождается в прямую и $N = 1$.

Если лягушка находится к клетке, через которую потенциально может проходить кузнечик (см. выше), число вариантов уменьшается на количество вариантов добраться до домика из клетки с лягушкой. Оно равно количеству вариантов добраться из начальной точки к лягушке, умноженному на количество вариантов добраться от лягушки к домику. Таким образом, общее число вариантов равно

$$N_1=C_{2n}^{n-m}-C_b^{\frac{b-a}{2}}\cdot C_{2n-b}^{\frac{2n-2m-(b-a)}{2}}$$

При вырожденном случае $n = m$ и сидящей на этой диагонали лягушке кузнечик не может пройти к домику ($N = 1$, $N_1 = 1$).

Ответ: $N_1 = C_{2n}^{n-m} - C_b^{\frac{b-a}{2}} \cdot C_{2n-b}^{\frac{2n-2m-(b-a)}{2}}$ при $a + b$ – четное и таких, что лягушка попадает в построенный выше прямоугольник, и $N_1 = C_{2n}^{n-m}$ при прочих a и b.

8. $x = 2008$ – очевидно, решение.

$$x = \overline{1abc} \quad a, b, c \neq 0$$

$$1000 + 100a + 10b + c + abc = 2008 \qquad (*)$$

$$abc \leq 9 \cdot 9 \cdot 9 = 729 \quad \overline{1abc} \geq 2008 - 729 = 1279 \quad \Rightarrow a \geq 2$$

1. $a = 2 \quad a \cdot b \cdot c \leq 2 \cdot 9 \cdot 9 = 162$

$$10b + c \geq 646 \quad \Rightarrow a \neq 2$$

2. $a = 3 \quad a \cdot b \cdot c \leq 3 \cdot 9 \cdot 9 = 243$

$$10b + c \geq 465 \quad \Rightarrow a \neq 3$$

3. $a = 4 \quad a \cdot b \cdot c \leq 4 \cdot 9 \cdot 9 = 324$

$$10b + c \geq 284 \quad \Rightarrow a \neq 4$$

4. $a = 5 \quad a \cdot b \cdot c \leq 405$

$$10b + c \geq 103 \quad \Rightarrow a \neq 5$$

Из (*) следует, что $10b + c + abc = 1008 - 100a \quad \Rightarrow b \geq \dfrac{1008 - 100a - 9}{10 + 9a} \quad (**)$

5. $a = 6 \quad b \geq 7 \quad \left.\begin{matrix} b = 7 \\ b = 8 \\ b = 9 \end{matrix}\right\} \Rightarrow c$ – нецелое.

6. $a = 7 \quad b \geq 5 \quad \left.\begin{matrix} b = 5 \\ b = 6 \\ b = 7 \\ b = 9 \end{matrix}\right\} \Rightarrow c$ – нецелое.

$b = 4 \quad c = 4$

7. $a = 8$ из (**) a – четное $\Rightarrow c$ – четное.

$\left.\begin{matrix} c = 2 \\ c = 4 \\ c = 6 \\ c = 8 \end{matrix}\right\} \Rightarrow b$ – нецелое.

8. $a = 9 \quad b \geq 2$; из (**) $c = \dfrac{108 - 10b}{1 + 9b} \geq 1 \quad \Rightarrow b \leq 5$

$\left.\begin{matrix} b = 2 \\ b = 3 \\ b = 4 \\ b = 5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow c$ – нецелое.

Ответ: x=1784, x=2008.

9. Поскольку $1 - \mathrm{tg}^2 \dfrac{x}{2} \neq 0$ (иначе $0 = 18$), то уравнение равносильно

$$\frac{1}{8}a^2 - 224 - 2\sin^2 x - 9\cos x + 2\mathrm{tg}^2 x = \frac{18}{1 - \mathrm{tg}^2 \dfrac{x}{2}}.$$

Так как $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, $\mathrm{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x} - 1$, $\dfrac{1}{1 - \mathrm{tg}^2 \dfrac{x}{2}} = \dfrac{\cos^2 \dfrac{x}{2}}{\cos^2 \dfrac{x}{2} - \sin^2 \dfrac{x}{2}} = \dfrac{1 + \cos x}{2\cos x} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2\cos x}$, то исходное уравнение принимает следующий вид

$$2\cos^2 x - 9\cos x + \left(\frac{1}{8}a^2 - 237\right) - \frac{9}{\cos x} + \frac{2}{\cos^2 x} = 0,$$

которое является возвратным относительно новой переменной $y = \cos x$. Делая замену $y + \frac{1}{y} = t$, получаем

$$2t^2 - 9t + \left(\tfrac{1}{8}a^2 - 241\right) = 0. \qquad (*)$$

Также необходимо проверить условие, чтобы $\cos x \neq -1$ (в противном случае $tg\frac{x}{2}$ не существует). Подставляя в (*) $t = -2$, получим $|a| \neq \sqrt{1720}$.

Однако при таком значении параметра *a* второй корень равен 6,5. При таком значении *t* в конечном счете найдутся корни, удовлетворяющие условию.

Далее, если уравнение (*) не имеет корней, то и исходное уравнение корней не имеет. Теперь допустим, что полученное уравнение имеет хотя бы один корень t^*. Уравнение $y + \frac{1}{y} = t^* \Leftrightarrow y^2 - t^* y + 1 = 0$ имеет решения при $t^{*2} - 4 \geq 0$. При этом $y_1 y_2 = 1 \;\Rightarrow\; |y_1||y_2| = 1$. Отсюда видно, что одно из значений y_1 или y_2 обязательно удовлетворяет условию $|y| \leq 1$. Значит, $y = \cos x$ имеет бесконечное число корней и, следовательно, не менее 2009.

Итак, необходимо, чтобы уравнение (*) имело хотя бы одно решение, удовлетворяющее условию $t^2 - 4 \geq 0$. Решения есть при $9^2 - 4 \cdot 2 \cdot \left(\tfrac{1}{8}a^2 - 241\right) \geq 0$, т.е. при $a^2 \leq 2009$. Теперь заметим, что $t_1 = \frac{9 + \sqrt{2009 - a^2}}{4} \geq \frac{9}{4} > 2$, т.е. t_1 всегда удовлетворяет условию $t^2 - 4 \geq 0$.

В итоге, исходное уравнение имеет не менее 2009 корней при $a^2 \leq 2009$, что равносильно $-\sqrt{2009} \leq a \leq \sqrt{2009}$.

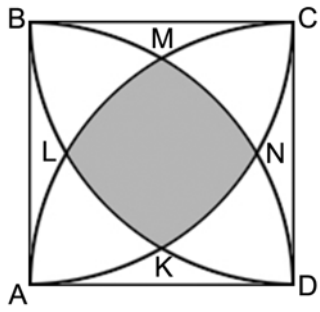
<u>Ответ:</u> $a \in \left[-\sqrt{2009}; \sqrt{2009}\right]$.

10. *A*(0,0), *B*(0,1), *C*(1,1), *D*(1,0). Найдем координаты точки *M*.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1^2 \\ (x-1)^2 + y^2 = 1^2 \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$ Аналогично $K\left(\frac{1}{2}; 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $N\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$, $L\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Отсюда следует, что $MK = 1 - 2\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3} - 1 \;\Rightarrow S_{LMNK} = \frac{1}{2}MK^2 = 2 - \sqrt{3}$

$$\cos\angle MAN = \frac{AM^2 + AN^2 - MN^2}{2AM \cdot AN} = \frac{\sqrt{3}}{2} \;\Rightarrow \angle MAN = \frac{\pi}{6}.$$



Отсюда следует, что искомая площадь равна

$$S = S_{LMNK} + 4S_{MN} = 2 - \sqrt{3} + 2\cdot\left(\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi + 3 - 3\sqrt{3}}{3},$$

где S_{MN} - площадь сегмента, отсекаемого отрезком *MN*.

<u>Ответ</u>: $S = \frac{\pi + 3 - 3\sqrt{3}}{3}$.

УВАЖАЕМЫЙ АБИТУРИЕНТ!

Вы поступаете на **ФИЗТЕХ**! И это прекрасно – здесь Вы получите превосходное базовое образование по физике и математике, станете специалистом высокого класса в выбранной Вами области знаний.

Но в наше время бурного научно-технического прогресса недостаточно знать только физику и математику. Основные открытия сейчас делаются на стыке естественных наук – физики, химии и биологии. Львиная доля финансирования науки в развитых странах выделяется в настоящее время на области естествознания, связанные с человеком – медицину, молекулярную химию и биологию, биохимию, биофизику, экологию.

Если Вам нравится математическое моделирование химических, биологических и социальных систем с применением современных суперкомпьютеров, если Вы хотите прикоснуться к живой клетке или постичь тайны управляемого термоядерного синтеза, если Вас привлекает участие в международной программе «Геном человека» или поиск лекарства против рака и СПИДа, Вас с нетерпением ждут на **Ф**акультете **М**олекулярной и **Б**иологической **Ф**изики. Представляем наши базовые кафедры и их научные направления:

БИОФИЗИКА И БИОТЕХНОЛОГИИ

- **ФИЗИКА ЖИВЫХ СИСТЕМ** – биомедицина, трансплантология, искусственные органы; биоинформатика и биоинженерия; биофизика, нейронауки; физическое и математическое моделирование живых систем от клеточной мембраны до социальных систем и биосферы в целом.
- **МОЛЕКУЛЯРНАЯ БИОФИЗИКА** – программа «Геном человека», протеомика; разработка быстрых методов определения нуклеотидных последовательностей ДНК и РНК; биологические микрочипы, молекулярная вирусология, изучение физики белка и нуклеиновых кислот.
- **ФИЗИКО-ХИМИЧЕСКАЯ БИОЛОГИЯ И БИОТЕХНОЛОГИЯ** – генная инженерия, молекулярная иммунология и онкология, биоинженерия белков и биологических мембран, биотехнология, создание трансгенных организмов.
- **МОЛЕКУЛЯРНАЯ МЕДИЦИНА –** изучение физико-химических основ развития социально значимых болезней человека; разработка, методы медицинской диагностики.
- **БИОХИМИЧЕСКАЯ ФИЗИКА** – изучение кинетики и механизмов реакций в биологических и химических системах, разработка ресурсо- и энергосберегающих безотходных технологий.

МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И НАНОТЕХНОЛОГИИ

- **ФИЗИКА И ХИМИЯ ПЛАЗМЫ** – исследования по управляемому термоядерному синтезу, водородная и плазменная энергетика, участие в проекте ITER.
- **ФИЗИКА СУПРАМОЛЕКУЛЯРНЫХ СИСТЕМ** – молекулярная электроника, нанотехнологии, фотоинформационные технологии и фотоэнергетика.
- **ХИМИЧЕСКАЯ ФИЗИКА** – создание новых лазеров, разработка сверхбыстрых кинетических методик, фемтохимия.
- **МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА –** импульсные плазменные системы, молекулярные лазеры, высокотемпературная газодинамика, масс-спектрометрический анализ, физика высокочастотных разрядов, излучение неравновесной плазмы, индустриальная экология.
- **ФИЗИКА ПОЛИМЕРОВ** – создание новых сверхпрочных полимеров, экологические проблемы использования полимерных материалов.
- **ФИЗИКА ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНЫХ ПРОЦЕССОВ –** физика и химия высокотемпературной плазмы, теплофизика импульсных воздействий, проблемы термоядерной энергетики.
- **ФИЗИКА ОРГАНИЗОВАННЫХ СИСТЕМ И ХИМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ** – изучение строения молекул и твердых тел, свойств вещества при высоких концентрациях энергии, элементарных процессов, кинетики и механизмов сложных химических реакций.
- **ФИЗИЧЕСКАЯ И ХИМИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА** – физика плазмы, газовых разрядов, лазеров; изучение воздействия излучения на вещество.
- **ФИЗИКА И ХИМИЯ НАНОСТРУКТУР –** синтез и получение новых углеродных материалов, в том числе алмазоподобных, создание приборов и методов исследования этих материалов.

СУПЕРКОМПЬЮТЕРЫ

- **ВЫСОКОПРОИЗВОДИТЕЛЬНЫЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ** – развитие аппаратных и инструментальных программных средств, создание прикладного программного обеспечения, создание передовых технологий в области высокопроизводительных вычислений.