УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
Ю.А. Самарский
23 июня 2010 г.

ПРОГРАММА И ЗАДАНИЯ

по дисциплине:	ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ		
по направлению подготовки:	010900		
факультет:	ФМБФ		
кафедра:	высшей математики		
курс:	II		
семестры:	3		
лекции: —	34 часа	Дифзачет —	3 семестр
практические (семинарские) занятия: —	34 часа		
лабораторные занятия: —	нет	Самостоятельная работа — 1 час	в неделю
ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ		— 68	

Программу составил

О.В. Висков, к.ф.-м.н., доцент

Программа обсуждена на заседании кафедры высшей математики 22 апреля 2010 г.

Заведующий кафедрой Е.С. Половинкин

1. Классическая модель теории вероятностей. Вероятность и частота. Некоторые комбинаторные формулы. Урновые схемы.
2. Комбинации событий. Теорема сложения вероятностей.
3. Условная вероятность. Независимость событий. Формула полной вероятности. Формула Байеса.
4. Независимость испытаний. Схема Бернулли. Биномиальное, пуассоновское и нормальное распределения. Теоремы Пуассона и Муавра–Лапласа.
5. Аксиоматическая модель теории вероятностей. Случайные величины. Функции распределения и их свойства. Числовые характеристики случайных величин. Свойства математического ожидания, дисперсии и ковариации. Связь некоррелированности и независимости.
6. Неравенство Чебышева. Закон больших чисел в форме Бернулли и в форме Чебышева.
7. Характеристические и производящие функции и их свойства. Закон больших чисел в форме Хинчина. Центральная предельная теорема.
8. Цепи Маркова: основные понятия и свойства.

Литература

1. *Захаров В.К., Севастьянов Б.А., Чистяков В.П.* Теория вероятностей. – М.: Наука, 1983. – 160 с.
2. *Розанов Ю.А.* Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика. – 2-е изд. – М.: Наука, 1989. – 320 с.
3. *Чистяков В.П.* Курс теории вероятностей. – 3-е изд. – М.: Наука, 1987. – 240 с.

З А Д А Н И Я

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 18–23 октября)

I. Комбинации событий

1. Среди студентов, собравшихся на лекцию по теории вероятностей, выбирают наудачу одного. Обозначим A, B и C соответственно события, состоящие в том, что: a) выбран юноша; b) выбран некурящий студент; c) выбранный студент живет в общежитии.

а) Описать событие $A \cap B \cap \overline{C}$.

б) При каком условии $A \cap B \cap C = A$?

в) Когда $\overline{C} \subseteq B$?

г) Когда $\overline{A} = B$? Справедливо ли это равенство, если все юноши курят?

2. Справедливы ли следующие равенства?

а) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$; б) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$;

в) $\overline{\overline{A} \cap \overline{B}} = A \cup B$; г) $\overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = A \cap B$;

д) $(A \cup B) \cap \overline{A \cap B} = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$;

е) $(A \cup B) \cap \overline{B} = A \cap \overline{B} = A \cap \overline{A \cap B}$;

ж) $\overline{A} \cap \overline{B} = A \cup B$.

3. Найти простые выражения для событий

а) $(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B})$; б) $(A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) \cap (A \cup \overline{B})$;

в) $(A \cup B) \cap (B \cup C)$.

II. Классическое определение вероятности. Комбинаторика. Геометрическая вероятность

4. Что вероятнее, получить хотя бы одну единицу при бросании четырех игральных костей или хотя бы одну пару единиц при 24 бросаниях двух костей?

5. На полке в случайном порядке расставлено 30 книг, среди которых находится трехтомник А.С. Пушкина. Найти вероятность того, что эти тома стоят в порядке возрастания слева направо (но необязательно рядом).

6. В лифт восьмиэтажного дома на первом этаже вошли 5 человек. Предположим, что каждый из них с равной вероятностью может выйти на любом из этажей, начиная со второго. Найти вероятность того, что все пятеро выйдут на разных этажах.

7. Из колоды в 52 карты наудачу берется 6 карт. Какова вероятность того, что среди них будут представительницы всех четырех мастей?

8. Что вероятнее, выиграть у равносильного противника не менее трёх партий из четырёх или не менее пяти партий из восьми?

9. Ребенок играет с десятью буквами разрезной азбуки: А, А, А, Е, И, К, М, М, Т, Т. Какова вероятность того, что при случайном расположении букв в ряд он получит слово «МАТЕМАТИКА»?

10. Группа из $2n$ девушек и $2n$ юношей делится на две равные подгруппы. Какова вероятность того, что каждая подгруппа содержит одинаковое число девушек и юношей?

11. Найти вероятность того, что дни рождения 12 человек приходятся на разные месяцы года.

12. В n конвертов разложено по одному письму n адресатам. На каждом конверте наудачу написан один из n адресов. Найти вероятность того, что хотя бы одно письмо пойдет по назначению.

13. На отрезке $[0,1]$ наудачу выбираются точки ξ и η. Какова вероятность того, что уравнение $x^2 + \xi x + \eta = 0$ имеет:

а) действительные корни;

б) действительные корни разного знака?

14. На отрезке наудачу выбираются две точки. Какова вероятность того, что из получившихся трех отрезков можно составить треугольник?

15. На плоскость, разлинованную параллельными линиями, расстояние между которыми L, бросают иглу длины $l \leqslant L$. Какова вероятность того, что игла пересечет линию?

III. Условные вероятности. Формула полной вероятности

16. Из 28 костей домино случайно выбираются две. Найти вероятность того, что из них можно составить «цепочку» согласно правилам игры.

17. По каналу связи может быть передана одна из трех последовательностей букв: $AAAA$, $BBBB$, $CCCC$, причем априорные вероятности равны 0,3, 0,4 и 0,3 соответственно. Известно, что действие шумов на приемное устройство уменьшает вероятность правильного приема каждой из переданных букв до 0,6, а вероятность приема переданной буквы за две другие увеличивается до 0,2 и 0,2. Предполагается, что буквы искажаются независимо друг от друга. Найти вероятность того, что была передана последовательность $AAAA$, если на приемном устройстве получено $BACA$.

18. При рентгеновском обследовании вероятность обнаружить заболевание туберкулезом у больного туберкулезом равна $1 - \beta$, а вероятность принять здорового человека за больного равна α.

Пусть доля больных туберкулезом по отношению ко всему населению равна γ. Найти условную вероятность того, что человек здоров, если он признан больным при обследовании. Найти численное значение этой вероятности, если $\alpha = 0{,}01$, $\beta = 0{,}1$, $\gamma = 0{,}001$. (Эти значения приведены в книге: *Л.Закс.* Статистическое оценивание. – М.: Статистика, 1976, С. 49.)

19. Предположим, что 0,5% всех мужчин и 0,25% всех женщин — дальтоники. Наудачу выбранное лицо оказалось дальтоником. Какова вероятность того, что это мужчина? (Считать, что мужчин и женщин одинаковое число.)

20. Из урны, содержащей M белых и N черных шаров, утеряно r шаров. Какова вероятность извлечения белого шара?

21. Брошены две игральные кости. Какова вероятность того, что на первой кости выпало 4 очка, если известно, что на второй кости выпало очков больше, чем на первой?

22. Урна содержит M белых и N черных шаров. Наудачу извлекается шар, после чего он возвращается в урну вместе с K шарами противоположного цвета. Обозначим A_i, $i = 1, 2, 3$, событие, состоящее в том, что при i-м извлечении шаров из этой урны будет отмечен белый шар. Найти вероятности:

а) $\mathrm{P}\{A_i\}$, $i = 1, 2, 3$; б) $\mathrm{P}\{A_1|A_2\}$;
в) $\mathrm{P}\{A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3}\}$; г) $\mathrm{P}\{\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap A_3\}$.

23. Стрелок A поражает мишень при некоторых условиях стрельбы с вероятностью 0,6, стрелок B — с вероятностью 0,5 и стрелок C — с вероятностью 0,7. Стрелки дали залп по мишени, и две пули попали в цель. Что вероятнее, попал C в цель или нет?

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 13–18 декабря)

IV. Случайные величины и их характеристики

1. При бросании трех игральных костей игрок выигрывает 100 рублей, если на всех костях по шесть очков, и получает 10 рублей, если шесть очков будет только на двух костях. Какую сумму он должен внести за билет на право участия в игре, чтобы игра была безобидной?

2. Из урны, содержащей m белых и n черных шаров, по схеме случайного выбора с возвращением извлекают шары до первого появления белого шара. Найти математическое ожидание и дисперсию числа вынутых шаров.

3. Длина радиуса шара равномерно распределена на отрезке $[0, 1]$. Найти математическое ожидание и дисперсию площади шара.

4. Случайные величины ξ и η независимы, причем

$$\mathrm{P}\{\xi = k\} = \mathrm{P}\{\eta = k\} = p(1-p)^{k-1},$$

$k = 1,\ 2,\ \ldots,\ 0 < p < 1$. Найти

а) $\mathrm{P}\{\xi = \eta\}$;
б) $\mathrm{P}\{\xi > \eta\}$;
в) $\mathrm{P}\{\xi < \eta\}$;
г) $\mathrm{P}\{\xi = k | \xi > \eta\}$;
д) $\mathrm{P}\{\xi = k | \xi < \eta\}$;
е) $\mathrm{P}\{\xi = k | \xi = \eta\}$;
ж) $\mathrm{P}\{\xi = k | \xi + \eta = l\}$.

5. Случайная величина ξ принимает только целые неотрицательные значения. Доказать, что

$$\mathrm{M}\,\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{P}\{\xi \geqslant k\}.$$

6. Пусть $\xi_k,\ k = 1,\ 2,$ — независимые случайные величины с распределением Пуассона. Найти распределение их суммы и условное распределение ξ_1, если известна сумма $\xi_1 + \xi_2$.

7. Пусть $\xi_k,\ k = 1,\ 2,$ — независимые случайные величины, принимающие лишь целые неотрицательные значения, причем $\mathrm{P}\{\xi_i = n\} = pq^n$; $n = 0,\ 1,\ \ldots$; $i = 1,\ 2$; $0 < p < 1$; $q = 1 - p$. Найти распределение суммы $\xi_1 + \xi_2$ и условное распределение ξ_1, если известна сумма $\xi_1 + \xi_2$.

8. Совместное распределение случайных величин ξ и η определяется условиями $\mathrm{P}\{\xi\eta = 0\} = 1$; $\mathrm{P}\{\xi = 1\} = \mathrm{P}\{\xi = -1\} = \mathrm{P}\{\eta = 1\} = \mathrm{P}\{\eta = -1\} = \frac{1}{4}$. Найти математические ожидания, дисперсии и ковариацию этих случайных величин.

9. Случайные величины ξ и η независимы; ξ имеет плотность распределения $f_\xi(x)$, а $P\{\eta = 0\} = P\{\eta = 1\} = P\{\eta = -1\} = \frac{1}{3}$. Найти закон распределения случайной величины $\xi + \eta$.

10. В квадрат $\{(x_1,\ x_2)\colon\ 0 \leqslant x_i \leqslant 1;\ i = 1,\ 2\}$ наудачу брошена точка. Пусть ξ_1, ξ_2 — ее координаты. Найти функцию распределения и плотность вероятности случайной величины $\eta = \xi_1 + \xi_2$.

11. Точка (ξ, η) имеет равномерное распределение в квадрате $\{(x, y)\colon\ 0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant a\}$. Вычислить распределение, математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\zeta = |\xi - \eta|$.

12. Точка (ξ, η) имеет равномерное распределение в квадрате $\{(x, y)\colon\ 0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant a\}$. Вычислить распределение, математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\theta = \min\{\xi, \eta\}$.

13. Известно, что случайная величина ξ имеет строго возрастающую непрерывную функцию распределения $F_\xi(x)$. Найти распределение случайной величины $\eta = F_\xi(\xi)$.

V. Закон больших чисел. Предельные теоремы. Характеристические и производящие функции. Цепи Маркова

14. Случайная величина ξ принимает лишь три значения 0 и $\pm\Delta$, причем

$$\mathrm{P}\{\xi = 0\} = 1 - \frac{\sigma^2}{\Delta^2}, \quad \mathrm{P}\{\xi = -\Delta\} = \mathrm{P}\{\xi = \Delta\} = \frac{\sigma^2}{2\Delta^2}.$$

Сравнить точное значение вероятности $\mathrm{P}\{|\xi| \geqslant \Delta\}$ с ее оценкой, полученной по неравенству Чебышева.

15. Пусть ξ_n — случайная величина, равная сумме очков, появившихся при n бросаниях симметричной игральной кости. Используя неравенство Чебышева, оценить

сверху
$$\mathrm{P}\left\{\left|\frac{\xi_n}{n}-\frac{7}{2}\right|>\epsilon\right\},\quad \epsilon>0.$$

16. Пусть ξ_n — случайная величина, равная сумме очков, появившихся при n бросаниях симметричной игральной кости. Используя центральную предельную теорему, выбрать n так, чтобы
$$\mathrm{P}\left\{\left|\frac{\xi_n}{n}-\frac{7}{2}\right|\geqslant 0{,}1\right\}\leqslant 0{,}1.$$

17. По каналу связи передается 1000 знаков. Каждый знак может быть искажен независимо от остальных с вероятностью 0,005. Найти приближенное значение вероятности того, что будет искажено не более трех знаков.

18. Книга в 500 страниц содержит 50 опечаток. Используя схему Бернулли, оценить вероятность того, что на определенной странице не менее трех опечаток. Сравнить полученный результат с пуассоновским приближением этой вероятности.

19. Найти вероятность того, что среди 10 000 новорожденных будет не менее половины мальчиков, если вероятность рождения мальчика равна 0,515.

20. Найти законы распределения, которым соответствуют следующие характеристические функции:
$$\cos t;\quad \frac{1}{2}+\frac{\cos t}{2}+i\frac{\sin t}{6};\quad \frac{1}{2-e^{-it}}.$$

21. Вычислить характеристическую функцию следующих законов распределения:

а) равномерного распределения в интервале $(-a,a)$;

б) распределения Пуассона;

в)* нормального распределения с плотностью вероятности

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

22* Случайная величина ξ_λ распределена по закону Пуассона с параметром λ. Найти

$$\lim_{\lambda\to\infty} \mathrm{P}\left\{\frac{\xi_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \leqslant x\right\}.$$

23. Пусть положительные независимые случайные величины $\xi_{m,n}$; $m = 1, 2, \ldots, n$ одинаково распределены с плотностью $\alpha_n e^{-\alpha_n x}$, $x > 0$, где $\alpha_n = \lambda n$ и $\lambda > 0$. Найти предельное при $n \to \infty$ распределение случайной величины

$$\xi_n = \sum_{m=1}^{n} \xi_{m,n}.$$

24* Матрица вероятностей перехода за один шаг цепи Маркова с тремя состояниями имеет вид

$$\begin{Vmatrix} 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}4 \\ 0{,}6 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}3 \end{Vmatrix}$$

Распределение по состояниям в момент времени $t = 0$ определяется вектором (0,7; 0,2; 0,1). Найти

а) распределение по состояниям в момент $t = 2$;

б) вероятность того, что в моменты $t = 0, 1, 2, 3$ состояниями цепи будут соответственно 1, 3, 3, 2;

в) стационарное распределение.

25* Частица движется по целым точкам прямой. Из точки k за единицу времени частица переходит с вероятностью p в точку $k+1$ и с вероятностью $q = 1 - p$ — в точку $k-1$ независимо от прошлого движения. Какова вероятность того, что через t единиц времени частица будет находиться в точке m, если в начальный момент времени она находилась в точке 0?

26* Пусть матрица вероятностей перехода за один шаг цепи Маркова с двумя состояниями имеет вид

$$\begin{Vmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{Vmatrix}, \qquad 0 \leqslant \alpha, \quad \beta \leqslant 1.$$

Найти вероятности перехода за n шагов и финальные вероятности.

Задания составили: О.В. Висков, к.ф.-м.н., доцент,
В.Ю. Дубинская, к.ф.-м.н, доцент