УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
Ю.А. Самарский
10 июня 2010 г.

ПРОГРАММА И ЗАДАНИЯ

по дисциплине: МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
по направлению подготовки: 010600
факультеты: для всех факультетов
кафедра: высшей математики
курс: II
семестры: 3
лекции: — 34 часа
практические (семинарские) занятия: — 34 часа
Экзамен — 3 семестр
лабораторные занятия: — нет
Самостоятельная работа — 4 часа в неделю
ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 68

Программу составили:

А.Ю. Петрович, к.ф.-м.н., доцент,
М.И. Шабунин М.И, д.п.н., профессор

Программа обсуждена на заседании кафедры высшей математики 22 апреля 2010 г.

Заведующий кафедрой Е.С. Половинкин

ПРОГРАММА
(базовый уровень)

Экстремумы функций многих переменных: необходимое условие, достаточное условия. Условный экстремум функции многих переменных при наличии связи: исследование при помощи функции Лагранжа. Необходимые условия.

Определение измеримости по Жордану множества в n-мерном евклидовом пространстве. Критерии измеримости (без доказательства). Измеримость объединения, пересечения и разности измеримых множеств. Конечная аддитивность меры Жордана.

Кратный интеграл Римана. Суммы Римана и суммы Дарбу. Критерии интегрируемости (без доказательства). Интегрируемость функции, непрерывной на измеримом компакте. Свойства интегрируемых функций: линейность интеграла, аддитивность интеграла по множествам, интегрирование неравенств. Сведение кратного интеграла к повторному.

Формула Грина. Потенциальные векторные поля на плоскости. Условие независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования.

Теорема о замене переменных в кратном интеграле (без доказательства).

Простая гладкая поверхность. Поверхностный интеграл первого рода. Независимость выражения интеграла через параметризацию поверхности от допустимой замены параметров. Площадь поверхности. Ориентация простой гладкой поверхности. Поверхностный интеграл второго рода, выражение через параметризацию поверхности. Кусочно-гладкие поверхности, их ориентация и интегралы по ним.

Формула Гаусса–Остроградского. Дивергенция векторного поля, ее независимость от выбора прямоугольной системы координат и геометрический смысл. Соленоидальные векторные поля. Связь соленоидальности с обращением в нуль дивергенции поля. Понятие о векторном потенциале.

Формула Стокса. Ротор векторного поля, его независимость от выбора прямоугольной системы координат и геометрический смысл. Потенциальные векторные поля. Условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования. Связь потенциальности с обращением в нуль ротора поля.

Вектор «набла» и действия с ним. Основные соотношения содержащие вектор «набла».

П Р О Г Р А М М А
(повышенный уровень)

Экстремумы функций многих переменных: необходимое условие, достаточное условия. Условный экстремум функции многих переменных при наличии связи: исследование при помощи функции Лагранжа. Необходимые условия. Достаточные условия

Определение измеримости по Жордану множества в n-мерном евклидовом пространстве. Критерии измеримости (без доказательства). Измеримость объединения, пересечения и разности измеримых множеств. Конечная аддитивность меры Жордана. Измеримость и мера цилиндра в $(n+1)$-мерном пространстве.

Кратный интеграл Римана. Суммы Римана и суммы Дарбу. Критерии интегрируемости. Интегрируемость функции, непрерывной на измеримом компакте. Свойства интегрируемых функций: линейность интеграла, аддитивность интеграла по множествам, интегрирование неравенств, теоремы о среднем, непрерывность интеграла. Сведение кратного интеграла к повторному.

Формула Грина. Потенциальные векторные поля на плоскости. Условие независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования.

Геометрический смысл модуля и знака якобиана отображения двумерных пространств. Теорема о замене переменных в кратном интеграле (доказательство для двумерного случая).

Простая гладкая поверхность. Поверхностный интеграл первого рода. Независимость выражения интеграла через параметризацию поверхности от допустимой замены параметров. Площадь поверхности. Ориентация простой гладкой поверхности. Поверхностный интеграл второго рода, выражение через параметризацию поверхности. Кусочно-гладкие поверхности, их ориентация и интегралы по ним.

Формула Гаусса–Остроградского. Дивергенция векторного поля, ее независимость от выбора прямоугольной системы координат и геометрический смысл. Соленоидальные векторные поля. Связь соленоидальности с обращением в нуль дивергенции поля. Понятие о векторном потенциале.

Формула Стокса. Ротор векторного поля, его независимость от выбора прямоугольной системы координат и геометрический смысл. Потенциальные векторные поля. Условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования. Связь потенциальности с обращением в нуль ротора поля.

Вектор «набла» и действия с ним. Основные соотношения содержащие вектор «набла». Лапласиан и градиент по вектору для скалярного и векторного поля.

Литература

Основная

1. *Бесов О.В.* Лекции по математическому анализу. – М.: МФТИ, 2004.

2. *Иванов Г.Е.* Лекции по математическому анализу. Т. 2. – М.: МФТИ, 2004.
3. *Кудрявцев Л.Д.* Краткий курс математического анализа. – 3-е изд. – М.: Физматлит, 2002.
4. *Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И.* Курс математического анализа. – М.: Наука, 1988; М.: МФТИ, 1997; М.: Физматлит, 2003.
5. *Яковлев Г.Н.* Лекции по математическому анализу. Ч. 2. – М.: Физматлит, 2001, 2004.

Дополнительная

6. *Кудрявцев Л.Д.* Курс математического анализа. Т. 2. – М.: Высшая школа, 1988.
7. *Никольский С.М.* Курс математического анализа. Т. 1, 2. – М.: Наука, 1983.
8. *Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н.* Лекции по математическому анализу. – 2-е изд. – М.: Высш. шк., 2000.
9. *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Основы математического анализа. Т. 2. – М.: Физматлит, 2004.
10. *Зорич В.А.* Математический анализ. – М.: Наука, Ч. 1, 1981; Ч. 2, 1984.
11. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. – 6-е изд. – М.: Наука, 1966.

З А Д А Н И Я

Литература

Сборник задач по математическому анализу. Функции нескольких переменных: Учебное пособие//Под ред. Л.Д. Кудрявцева. – М.: Наука, 1995; М.: Физматлит, 2003.

ЗАМЕЧАНИЯ

1. Задачи с подчёркнутыми номерами рекомендовано разобрать на семинарских занятиях.
2. Задачи и разделы, отмеченные звёздочкой (*), являются не-

обязательными для базового уровня.

3. Задачи, отмеченные двумя звёздочками (**), являются необязательными для повышенного уровня.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 25–30 октября)

I. Неявные функции

1. Дано уравнение
$$y^2 = x^6. \tag{1}$$

а) Сколько различных функций $y = y(x), x \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих уравнению (1)?

б) Сколько различных непрерывных функций $y = y(x)$, $x \in \mathbb{R}$ удовлетворяющих уравнению (1)?

в) Сколько различных непрерывных функций $y = y(x)$, $x \in \left(\frac{1}{3}, \frac{7}{3}\right)$ удовлетворяющих уравнению (1) и условию $y(1) = 1$?

§3: 61(2); 64(1); 75.

§4: 43(4).

II. Замена переменных

§3: 85(5); 88(2); 90.

§4: 51(1)*; 52(6)*.

III. Экстремумы функций многих переменных.

§5: 2(3); 7(1); 9*; 10**; 13(1); 14(4)**; 18(1); 21(2); 25(8); 28(4); 30(3).

IV. Мера Жордана

§7: 22; 45*; 48*; 62**.

2. Найти в пространстве $\mathbb{R}^2$ меру множества $E_1 \cup E_2$, где $E_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\colon\ 0 \leqslant x_1 \leqslant 1,\ x_2 = 0\}$, $E_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\colon\ x_1 = 1,\ 0 \leqslant x_2 \leqslant 1\}$.

V. Двойные интегралы

§8: 80(2); 83(1,2); 84(1); 91(7); 100(3); 102(4); 107(3); 109(2); 110(3); 115(3)*.

§9: 10; 14(2); <u>20</u>.

3.** Найти площадь, расположенной в 1-м квадранте фигуры, ограниченной двумя эллипсами

$$\frac{x^2}{\operatorname{ch}^2 a_i} + \frac{y^2}{\operatorname{sh}^2 a_i} = 1, \quad 0 < a_1 < a_2,$$

и двумя гиперболами

$$\frac{x^2}{\cos^2 b_i} - \frac{y^2}{\sin^2 b_i} = 1, \quad 0 < b_1 < b_2 < \frac{\pi}{2}.$$

VI. Тройные интегралы

§8: 133(3); 135(2); <u>139(4)</u>; 144(3); 148(1).
§9: 9, 63(2)*.
§8: <u>176(1)*</u>; 185**; 201**.

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 13–18 декабря)

VII. Криволинейные интегралы. Формула Грина

§10: 2(2); 17; <u>29(3)</u>; 30(4); 32; 66; 103(3)*.

1.* Вычислить интеграл $\int_\Gamma \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$, где Γ — положительно ориентированная кусочно-гладкая граница некоторой ограниченной области $D \subset \mathbb{R}^2$, не проходящая через начало координат.

VIII. Поверхностные интегралы

§9: 37, <u>51</u>.
§11: 3(4); 6(2); <u>11</u>; 14**; 18(2)*; 32; 34; 37(2); 38; 41.

IX. Формулы Гаусса–Остроградского и Стокса

§11: 44(1); <u>47(2)</u>; 52(2); 59**; 63(2)*; <u>64</u>; 68*.

2.** Пусть $G \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченная область с кусочно-гладкой границей, и пусть функция $f\colon G \to \mathbb{R}$ имеет равномерно на G непрерывный градиент $\operatorname{grad} f$. Доказать равенство:

$$\int_{\partial G} f\vec{n}\, dS = \int_G \operatorname{grad} f\, dV,$$

где $\vec{n}$ — заданное в точках гладкости границы ∂G поле внешних к G единичных нормалей.

X. Элементы теории поля

§3: 43(3); 48(3).

§12: 14; 15(2,5,7*); 40; 41(4,8*); 42(2)*; 49(3,4,6*); 50(5)*; 51(1); 70(1); 93(1); 94(6)*; 104*; 106(3); 112* (соленоидальность исследовать в объемно-односвязной области, не содержащей начало координат).

Задания составил А.А. Фонарев, к.ф.-м.н., доцент