УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
Ю.А. Самарский
10 июня 2010 г.

ПРОГРАММА И ЗАДАНИЯ

по дисциплине:	МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
по направлению подготовки:	010900 «Прикладные математика и физика»
факультеты:	для всех факультетов
кафедра:	высшей математики
курс:	I
Трудоёмкость:	базовая часть — 6 зач. ед., вариативная часть — 2 зач. ед., в т.ч. по выбору студента — 2 зач. ед.
семестры:	I
лекции: —	68 часов
практические (семинарские) занятия: —	68 часов
Экзамен —	1 семестр
лабораторные занятия: —	нет
Самостоятельная работа	— 4 часа в неделю
ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ	— 136
Компетенции:	ОК–1, ОК–2, ОК–6, ОК–9, ОК–13, ПК–1, ПК–3, ПК–4, ПК–11, ПК–12

Программу составил

А.Ю. Петрович, к.ф.-м.н., доцент

Программа обсуждена на заседании кафедры
высшей математики 22 апреля 2010 г.

Заведующий кафедрой Е.С. Половинкин

П Р О Г Р А М М А
(базовый уровень)

Введение в математический анализ

1. Теорема о существовании и единственности точной верхней (нижней) грани числового множества, ограниченного сверху (снизу) — без доказательства. Представление действительных чисел бесконечными десятичными дробями. Счетность множества рациональных чисел, несчетность множества действительных чисел.
2. Предел числовой последовательности. Теорема Кантора о вложенных отрезках. Единственность предела. Бесконечно малые последовательности и их свойства. Свойства пределов, связанные с неравенствами. Арифметические операции со сходящимися последовательностями. Теорема Вейерштрасса о пределе монотонной ограниченной последовательности. Число e. Бесконечно большие последовательности и их свойства.
3. Подпоследовательности, частичные пределы. Теорема Больцано–Вейерштрасса. Критерий Коши сходимости последовательности.
4. Предел числовой функции одной переменной. Определения по Гейне и по Коши, их эквивалентность. Свойства пределов функции. Различные типы пределов. Существование односторонних пределов у монотонной функции.
5. Непрерывность функции в точке. Свойства непрерывных функций. Односторонняя непрерывность. Непрерывность сложной функции. Точки разрыва, их классификация.
6. Свойства функций, непрерывных на отрезке — ограниченность, достижение точных верхней и нижней граней. Теорема о промежуточных значениях непре-

рывной функции. Теорема об обратной функции.

7. Непрерывность элементарных функций. Определение показательной функции. Замечательные пределы, следствия из них.
8. Сравнение величин (символы o, O, $\sim$). Вычисление пределов при помощи выделения главной части в числителе и знаменателе дроби.
9. Производная функции одной переменной. Односторонние производные. Непрерывность функции, имеющей производную. Дифференцируемость функции в точке, дифференциал. Геометрический смысл производной и дифференциала. Производная суммы, произведения и частного двух функций. Производная сложной функции. Производная обратной функции. Производные элементарных функций. Инвариантность формы дифференциала относительно замены переменной.
10. Производные высших порядков. Формула Лейбница для n-й производной произведения. Дифференциал второго порядка.
11. Теорема Ферма (необходимое условие локального экстремума). Теоремы о среднем Ролля, Лагранжа, Коши. Формула Тейлора с остаточным членом в формах Пеано и Лагранжа. Правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей вида $\frac{0}{0}$.
12. Применение производной к исследованию функций. Достаточные условия монотонности, достаточные условия локального экстремума в терминах первой и второй производной. Выпуклость, точки перегиба. Построение графиков функций — асимптоты, исследование интервалов монотонности и точек локального экстремума, интервалов выпуклости и точек перегиба.
13. Первообразная и неопределенный интеграл. Линейность неопределенного интеграла, интегрирование подстановкой и по частям. Интегрирование рацио-

нальных функций. Основные приемы интегрирования иррациональных и трансцендентных функций.

14. Элементы дифференциальной геометрии. Кривые на плоскости и в пространстве. Гладкие кривые, касательная к гладкой кривой. Длина кривой. Производная переменной длины дуги (без доказательства). Натуральный параметр. Кривизна кривой, формулы для ее вычисления.

П Р О Г Р А М М А
(повышенный уровень)

Введение в математический анализ

1. Действительные числа. Отношения неравенства между действительными числами. Свойство Архимеда. Плотность множества действительных чисел. Теорема о существовании и единственности точной верхней (нижней) грани числового множества, ограниченного сверху (снизу). Арифметические операции с действительными числами. Представление действительных чисел бесконечными десятичными дробями. Счетность множества рациональных чисел, несчетность множества действительных чисел.
2. Предел числовой последовательности. Теорема Кантора о вложенных отрезках. Единственность предела. Бесконечно малые последовательности и их свойства. Свойства пределов, связанные с неравенствами. Арифметические операции со сходящимися последовательностями. Теорема Вейерштрасса о пределе монотонной ограниченной последовательности. Число e. Бесконечно большие последовательности и их свойства.
3. Подпоследовательности, частичные пределы. Верхний и нижний пределы числовой последовательности. Те-

орема Больцано–Вейерштрасса. Критерий Коши сходимости последовательности.

4. Предел числовой функции одной переменной. Определения по Гейне и по Коши, их эквивалентность. Свойства пределов функции. Различные типы пределов. Критерий Коши существования конечного предела функции. Теорема о замене переменной под знаком предела. Существование односторонних пределов у монотонной функции.
5. Непрерывность функции в точке. Свойства непрерывных функций. Односторонняя непрерывность. Теорема о переходе к пределу под знаком непрерывной функции. Непрерывность сложной функции. Точки разрыва, их классификация. Разрывы монотонных функций.
6. Свойства функций, непрерывных на отрезке — ограниченность, достижение точных верхней и нижней граней. Теорема о промежуточных значениях непрерывной функции. Теорема об обратной функции.
7. Непрерывность элементарных функций. Определение показательной функции. Свойства показательной функции. Замечательные пределы, следствия из них.
8. Сравнение величин (символы o, O, $\sim$). Вычисление пределов при помощи выделения главной части в числителе и знаменателе дроби.
9. Производная функции одной переменной. Односторонние производные. Непрерывность функции, имеющей производную. Дифференцируемость функции в точке, дифференциал. Геометрический смысл производной и дифференциала. Производная суммы, произведения и частного двух функций. Производная сложной функции. Производная обратной функции. Производные элементарных функций. Инвариантность формы дифференциала относительно замены переменной.

10. Производные высших порядков. Формула Лейбница для n-й производной произведения. Дифференциал второго порядка. Отсутствие инвариантности его формы относительно замены переменной. Дифференциалы высших порядков.
11. Теорема Ферма (необходимое условие локального экстремума). Теоремы о среднем Ролля, Лагранжа, Коши. Формула Тейлора с остаточным членом в формах Пеано и Лагранжа. Правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей вида $\frac{0}{0}$. Правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей вида $\frac{\infty}{\infty}$.
12. Применение производной к исследованию функций. Достаточные условия монотонности, достаточные условия локального экстремума в терминах первой и второй производной. Выпуклость, точки перегиба. Достаточные условия локального экстремума в терминах высших производных. Построение графиков функций — асимптоты, исследование интервалов монотонности и точек локального экстремума, интервалов выпуклости и точек перегиба.
13. Первообразная и неопределенный интеграл. Линейность неопределенного интеграла, интегрирование подстановкой и по частям. Интегрирование рациональных функций. Основные приемы интегрирования иррациональных и трансцендентных функций.
14. Элементы дифференциальной геометрии. Кривые на плоскости и в пространстве. Гладкие кривые, касательная к гладкой кривой. Теорема Лагранжа для вектор-функций. Длина кривой. Производная переменной длины дуги. Натуральный параметр. Кривизна кривой, формулы для ее вычисления. Сопровождающий трехгранник пространственной кривой.
15. Комплексные числа. Модуль и аргумент, тригонометрическая форма. Арифметические операции с ком-

плексными числами. Извлечение корня. Экспонента и логарифм от комплексного числа. Формула Эйлера. Информация об основной теореме алгебры. Разложение многочлена с комплексными коэффициентами на линейные множители. Разложение многочлена с действительными коэффициентами на линейные и неприводимые квадратичные множители. Разложение правильной дроби в сумму простейших дробей.

Литература

Основная

1. *Бесов О.В.* Лекции по математическому анализу. Ч. 1. – М.: МФТИ, 2004.
2. *Иванов Г.Е.* Лекции по математическому анализу. Т. 1. – М.: МФТИ, 2004.
3. *Кудрявцев Л.Д.* Краткий курс математического анализа. Т. 1. – М.: Наука, 1998, 2002.
4. *Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И.* Курс математического анализа. – М.: Наука, 1988; М.: МФТИ, 1997; М.: Физматлит, 2003.

Дополнительная

5. *Никольский С.М.* Курс математического анализа. Т. 1. – М.: Наука, 1983, 2000.
6. *Яковлев Г.Н.* Лекции по математическому анализу. Ч. 1. – М.: Физматлит, 2001, 2004.
7. *Кудрявцев Л.Д.* Курс математического анализа. Т. 1. – М.: Высшая школа, 1988.
8. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. – 6-е изд. – М.: Наука, 1966.
9. *Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н.* Лекции по математическому анализу. – 2-е изд. – М.: Высш. шк., 2000.

З А Д А Н И Я

Литература

1. Сборник задач по математическому анализу. Предел, непрерывность, дифференцируемость: учебное пособие//под ред. Л.Д. Кудрявцева. – 2-е изд. – М.: Физматлит, 2003. (Цитируется [1]).
2. Сборник задач по математическому анализу. Интегралы. Ряды: учебное пособие//под ред. Л.Д. Кудрявцева. – М.: Физматлит, 2003. (Цитируется [2]).

ЗАМЕЧАНИЯ

1. Задачи с подчёркнутыми номерами рекомендовано разобрать на семинарских занятиях.
2. Задачи и разделы, отмеченные звёздочкой (*), являются необязательными для базового уровня.
3. Задачи, отмеченные двумя звёздочками (**), являются необязательными для повышенного уровня.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 20–25 сентября)

I. Производная

С1, §13: 19; 31; 43; 60; $\underline{79}$; 83; 109*; $\underline{141}$; 147; 149*; 164.

1. Найти производную функции $y = \dfrac{(\arccos \ln x)^{\sin x}}{\operatorname{th} \sqrt[3]{\frac{1}{x} - 1}}$ (ответ можно не упрощать).

II. Неопределенный интеграл

С2, §1: 2($\underline{15}$,16); 10($\underline{2}$,5); 11(3); 12(9); 13(7); 15(4,5,17); 17(3,$\underline{4}$); 20(3); 21(3); 24($\underline{3}$,4*).

С2, §2: $\underline{1(4)}$; 2(1); $\underline{3(2)}$; 4($\underline{2}$,3); 6(6**); 8(1,2**).

2* Вычислить интегралы:

$\underline{\text{а)}}$ $\int \frac{x^2-1}{x^4+1}\,dx$; б) $\int \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx$; в) $\int \frac{dx}{x^4+1}$.

С2, §3: $\underline{1(6)}$; 2(7); 4(4); 5(1); 8(1)*; $\underline{18(3)}$; 19(2).

С2, §4: $\underline{4(2)}$; 5(1); 9(1); 11(2); 15(5)*; $\underline{16(1)}$; 18(2); 21(2,$\underline{3}$).

С2, §5: 49; 142; 143**; 144; 180**.

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 25–30 октября)

I.* Действительные числа

С1, §3: 1(1)*; 2*; 3*.

3.* Доказать следующее утверждение: $\forall\, a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $\exists\, x_1 \in \mathbb{Q}$, $x_2 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$: $x_1, x_2 \in (a,b)$.

II. Последовательности. Предел последовательности

С1, §7: 275(3); 279(1); 276(4); 282(1); 300(3).
С1, §8: 2(2); 15(5); 22; 27*; 28(1,2).

4. Доказать:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, $|q| < 1$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, $a > 0$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$; г) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$, $a > 1$, $k \in \mathbb{N}$;

д) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\log_a n}{n} = 0$, $a > 1$; е) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$, $a > 0$.

С1, §8: 36(2); 44(2)**; 53(6); 62(9); 64(4); 71(1); 75(1); 91; 166(3); 111; 143(1); 147(3); 164(1); 117(1)*; 138*; 158*; 220*; 246*; 119*.

5.** Существует ли последовательность, для которой любое действительное число является частичным пределом?

III. Функции. Предел функции. Непрерывность

С1, §7: 218(5); 219(5).
С1, §9: 1(1); 17; 18(4); 25(5); 27(1,5); 29(2); 40(4); 61*.
С1, §10: 5(6); 56(4); 22; 23; 40; 41(1); 42*; 76; 97(1,2**).

6.** Исследовать точки разрыва функции Римана $R(x)$:

$$R(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & x = m/n \in \mathbb{Q}; \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

7.** Привести пример функции, заданной и конечной на $\mathbb{R}$ и неограниченной на любом интервале.

ТРЕТЬЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 29 ноября–4 декабря)

I. Дифференцируемость. Дифференциал

С1, §13: 173; 179(2,4,8); 185(1)*; 197(4).
С1, §14: 10(1).

II. Производные и дифференциалы

С1, §15: 2(1); 9(2); 10(1); 13(4); 14(4); 21(5); 22(2).
С1, §15: 24(15); 25(3,7,10); 26(1,4*).

8. Вычислить $(e^x \sin x)^{(n)}$.

III. Теоремы о среднем

С1, §16: 5; 15(2,3); 19; 28*; 29*; 30*.

9.** Доказать, что если функция $f(x)$ дифференцируема на отрезке $[a,b]$, $ab > 0$, то существует ξ, $a < \xi < b$, такая, что

$$\frac{1}{a-b}\begin{vmatrix} a & b \\ f(a) & f(b) \end{vmatrix} = f(\xi) - \xi \cdot f'(\xi).$$

IV. Формула Тейлора

С1, §18: 1(5); 2(4,8,9); 4(7); 5(5); 6(7); 14(5); 30(1,2*); 39(5).

10. Представить формулой Маклорена до $o(x^6)$:
а) $\arcsin x$; б) $\operatorname{arctg} x$; в) $\operatorname{tg} x$; г) $\operatorname{th} x$.

11. Функцию $y = \operatorname{arctg}(\cos x)$ разложить по формуле Маклорена до $o(x^4)$.

12. Функцию $y = \sqrt{1+x^2} - x$ разложить по степеням $\frac{1}{x}$ до $o\left(\frac{1}{x^3}\right)$ при $x \to +\infty$.

13.** Представить формулой Маклорена до $o(x^n)$ функцию $y = x^3 \cdot D(x)$, где $D(x)$ — функция Дирихле. Число n выбрать наибольшим.

V. Вычисление пределов функций

С1, §17: 8; 9; 32; 63; 76; 80*.
С1, §19: 7(1); 9(3); 13(2); 21(4); 22(1); 29(2); 46(2)*; 58(2)*.

14.** Найти

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} \frac{1}{\sin^2 x} - \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2}}{\left(\operatorname{arctg} \cos x - \arcsin \frac{\cos x}{\sqrt{2}}\right)^2}.$$

ЧЕТВЕРТОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 20–25 декабря)

I. Исследование функций

С1, §20: 2(6); 9**; 18(6); $\underline{22(2)}$; 25(1)*; 36**; 50(5,$\underline{7}$); $\underline{39(5)}$; $\underline{69(2)}$; 70(1)*.

II. Построение графиков функций

С1, §21: 5($\underline{2}$,4); 10($\underline{3}$,4); 12(8); 14(3); 15(4); 23(3,$\underline{4}$); 25(4).

III. Элементы дифференциальной геометрии

С1, §24: $\underline{48}$; 76(2); 77(1); $\underline{78(1)}$; $\underline{81(1)}$; 109($\underline{1}$,2)*; 110(1)*; 122(2).

IV.* Комплексные числа

С1, §5: 7(2)*; 13(4)*; 18(6)*; 30(1)*; 31(1)*; 36(1)*; 15(2,3)*.

Задания составила М.А. Лунина, к.ф.-м.н., доцент