

Программа государственного экзамена
по дискретной математике и информатике '2018
(Часть «Дискретная математика»)

1. Математическая логика и теория алгоритмов

1. Понятия множества и подмножества. Операции над множествами, тождества. Отображения и соответствия. Сравнение множеств по мощности. Теорема Кантора–Бернштейна. Счётные множества и их свойства. Теорема Кантора.
2. Булевы функции и пропозициональные формулы. Конъюнктивная и дизъюнктивная нормальные формы. Тавтологии. Исчисление высказываний: аксиомы, правила вывода, определение выводимости. Корректность исчисления высказываний. Лемма о дедукции. Полнота исчисления высказываний.
3. Языки первого порядка: сигнатуры, термы, правила построения формул. Интерпретации, оценки, определение истинности формулы. Выразимость предикатов: определение, примеры, доказательство невыразимости при помощи автоморфизмов.
4. Общезначимые формулы первого порядка. Исчисление предикатов: формулы и правила вывода. Корректность исчисления предикатов. Теорема Гёделя о полноте исчисления предикатов: различные формулировки и общая схема доказательства.
5. Машины Тьюринга. Вычислимые функции. Разрешимые и перечислимые множества. Неразрешимость проблем самоприменимости и остановки. Теорема Райса–Успенского (б/д). Теорема Клини о неподвижной точке (б/д). Существование программы, печатающей свой собственный текст.
6. Формальная арифметика. Примеры выводов в аксиоматике Пеано. Моделирование машин Тьюринга в формальной арифметике (б/д). Теорема Гёделя о неполноте: формулировка и идея доказательства.
7. Лямбда-исчисление. Лямбда-термы и комбинаторы. Теорема Чёрча–Россера (б/д). Нумералы Чёрча. Комбинаторы, представляющие арифметические операции. Представление логических значений и операций. Комбинатор неподвижной точки.
8. Измерение сложности алгоритма. Классы P и NP. Сводимость задач по Карпу. NP-полнота. Теорема Кука-Левина: формулировка и идея доказательства.

2. Дискретные структуры

1. Основные правила комбинаторики: правило сложения, правило умножения, принцип Дирихле, формула включения и исключения. Размещения, перестановки и сочетания. Формула Стирлинга (б/д).
2. Размещения, перестановки и сочетания. Формулы для чисел размещения и сочетания с повторениями и без повторений. Бином Ньютона, полиномиальная формула. Простейшие тождества. Оценки для биномиальных коэффициентов.
3. Формальные степенные ряды, производящие функции и тождества.
4. Линейные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами.
5. Определение графа, орграфа, мультиграфа, псевдографа, гиперграфа. Маршруты в графах, степени вершин. Изоморфизм графов. Планарность графов. Эйлеровы и гамильтоновы циклы в графах. Критерий эйлеровости. Достаточное условие гамильтоновости.
6. Хроматическое число, число независимости, кликовое число и соотношения между ними.

7. Системы общих представителей. Тривиальные верхняя и нижняя оценки. Верхняя оценка с помощью жадного алгоритма. Её точность (б/д).
8. Гиперграфы с запрещенными пересечениями ребер. Основы линейно-алгебраического метода.

3. Теория вероятностей и математическая статистика

1. Вероятностное пространство, аксиомы Колмогорова, свойства вероятностной меры. Условные вероятности. Формула полной вероятности. Формула Байеса. Независимость.
2. Случайные величины и векторы. Характеристики случайной величины и вектора: распределение вероятностей, функция распределения и её свойства, σ -алгебра, порожденная случайной величиной. Примеры конкретных распределений.
3. Математическое ожидание случайной величины: определение для простых, неотрицательных и произвольных случайных величин. Основные свойства математического ожидания (доказательства только для простых величин). Дисперсия и ковариация, их свойства.
4. Сходимость случайных величин: по вероятности, по распределению, почти наверное, в среднем. Связь между сходимостями (б/д). Лемма Слуцкого. Теорема о наследовании сходимости. Дельта-метод.
5. Неравенство Маркова, неравенство Чебышёва. Закон больших чисел в форме Чебышёва. Усиленные законы больших чисел (б/д).
6. Характеристические функции случайных величин и векторов и их свойства. Теорема непрерывности (б/д).
7. Центральная предельная теорема для независимых одинаково распределенных случайных величин.
8. Выборка, выборочное пространство. Точечные оценки параметров и их основные свойства: несмещенность, состоятельность, асимптотическая нормальность. Выборочные среднее, медиана, дисперсия. Сравнение оценок, функция потерь и функция риска. Подходы к сравнению оценок: равномерный, байесовский, асимптотический.
9. Методы построения оценок: метод моментов и метод максимального правдоподобия. Состоятельность оценки метода моментов. Теорема о свойствах оценок максимального правдоподобия (б/д).
10. Доверительные интервалы. Метод центральной статистики. Метод построения асимптотических доверительных интервалов.
11. Статистические гипотезы, ошибки первого и второго рода, уровень значимости критерия. Общие принципы сравнения критериев, равномерно наиболее мощные критерии. Лемма Неймана–Пирсона. Построение с её помощью наиболее мощных критериев.

