

# Программа государственного экзамена по дискретной математике и информатике

## 1. Математическая логика и теория алгоритмов

1. Понятия множества и подмножества. Операции над множествами, тождества. Отображения и соответствия. Сравнение множеств по мощности. Теорема Кантора-Бернштейна. Счетные множества и их свойства. Теорема Кантора.
2. Булевы функции и пропозициональные формулы. Конъюнктивная и дизъюнктивная нормальные формы. Тавтологии. Исчисление высказываний: аксиомы, правила вывода, определение выводимости. Корректность исчисления высказываний. Лемма о дедукции. Полнота исчисления высказываний.
3. Языки первого порядка: сигнатуры, термы, правила построения формул. Интерпретации, оценки, определение истинности формулы. Выразимость предикатов.
4. Общезначимые формулы первого порядка. Исчисление предикатов: формулы и правила вывода. Корректность исчисления предикатов. Теорема Гьделя о полноте исчисления предикатов: различные формулировки и схема доказательства.
5. Машина Тьюринга. Вычислимые функции. Разрешимые и перечислимые множества. Неразрешимость проблем самоприменимости и остановки. Теорема Райса-Успенского (б/д). Теорема Клини о неподвижной точке (б/д). Существование программы, печатающей свой собственный текст.
6. Формальная арифметика. Моделирование машин Тьюринга в формальной арифметике. Теорема Гьделя о неполноте (б/д).
7. Лямбда-исчисление. Лямбда-термы и комбинаторы. Теорема Чрча-Россера (б/д). Нумералы Чрча. Комбинаторы, представляющие арифметические операции. Представление логических значений и операций. Комбинатор неподвижной точки.
8. Классы сложности P и NP-hard и NP-complete.

## 2. Дискретные структуры

1. Основные правила комбинаторики: правило сложения, правило умножения, принцип Дирихле, формула включения и исключения. Размещения, перестановки и сочетания. Формула Стирлинга (б/д).
2. Размещения, перестановки и сочетания. Формулы для чисел размещения и сочетания с повторениями и без повторений. Бином Ньютона, полиномиальная формула. Простейшие тождества. Оценки для биномиальных коэффициентов.
3. Формальные степенные ряды, производящие функции и тождества.
4. Линейные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами.
5. Определение графа, орграфа, мультиграфа, псевдографа, гиперграфа. Маршруты в графах, степени вершин. Изоморфизм графов. Планарность графов. Эйлеровы и гамильтоновы циклы в графах. Критерий эйлеровости. Достаточное условие гамильтоновости.
6. Хроматическое число, число независимости, кликовое число и соотношения между ними.
7. Системы общих представителей. Тривиальные верхняя и нижняя оценки. Верхняя оценка с помощью жадного алгоритма. Её точность (б/д).
8. Гиперграфы с запрещенными пересечениями ребер. Основы линейно-алгебраического метода.

### 3. Теория вероятностей и математическая статистика

1. Вероятностное пространство, аксиомы Колмогорова, свойства вероятностной меры. Условные вероятности. Формула полной вероятности. Формула Байеса.
2. Случайные величины и векторы. Характеристики случайной величины и вектора: распределение вероятностей, функция распределения и ее свойства,  $\sigma$ -алгебра, порожденная случайной величиной. Примеры конкретных распределений.
3. Математическое ожидание случайной величины: определение для простых, неотрицательных и произвольных случайных величин. Основные свойства математического ожидания (доказательства только для простых величин). Дисперсия и ковариация, их свойства.
4. Сходимость случайных величин: по вероятности, по распределению, почти наверное, в среднем. Связь между сходимостями (б/д). Теорема о наследовании сходимости.
5. Неравенство Маркова, неравенство Чебышева. Закон больших чисел в форме Чебышева. Усиленные законы больших чисел (б/д).
6. Характеристические функции случайных величин и векторов и их свойства. Теорема непрерывности (б/д).
7. Центральная предельная теорема для независимых одинаково распределенных случайных величин.
8. Выборка, выборочное пространство. Точечные оценки параметров и их основные свойства: несмещенность, состоятельность, асимптотическая нормальность. Выборочные среднее, медиана, дисперсия. Сравнение оценок, функция потерь и функция риска. Подходы к сравнению оценок: равномерный, байесовский, минимаксный.
9. Методы построения оценок: метод моментов и метод максимального правдоподобия. Состоятельность оценки метода моментов. Теорема о свойствах оценок максимального правдоподобия (б/д).
10. Доверительные интервалы. Метод центральной статистики.
11. Статистические гипотезы, ошибки первого и второго рода, Общие принципы сравнения критериев, равномерно наиболее мощные критерии. Лемма Неймана-Пирсона. Построение с её помощью наиболее мощных критериев.

### 4. Алгоритмы и структуры данных

1. Быстрая сортировка (QuickSort).
2. Сортировка слиянием (MergeSort).
3. Двоичная куча и сортировка кучей (HeapSort).
4. Хеш-таблица, полиномиальная хэш-функция.
5. Динамическое программирование: общая идея, линейная динамика, матричная, динамика на отрезках.
6. Амортизационный анализ.
7. RMQ.
8. LCA: сведение к RMQ и метод двоичного подъема.
9. Декартово дерево. Декартово дерево по неявному ключу.
10. Минимальное остовное дерево: алгоритмы Прима и Крускала.
11. Максимальные потоки в сети. Методы: Форда-Фалкерсона; Эдмондса-Карпа (б/д).
12. Обход графа в глубину, ширину.
13. Поиск кратчайших путей в графе: алгоритмы Дейкстры, Форда-Беллмана, Флойда-Уоршелла.
14. Поиск сильносвязных компонент в графе.
15. Мосты и точки сочленения в графе.
16. Нахождение подстроки в строке: префикс-функция, алгоритм Кнута-Морриса-Пратта.
17. Стандартные контейнеры: vector, deque, queue, priority\_queue, set, map, итераторы, компараторы.

## 5. Машинное обучение

1. Байесовские методы классификации. Вероятностная постановка задачи классификации. Оптимальный байесовский классификатор.
2. Наивный байесовский классификатор. Достоинства и недостатки наивного байесовского классификатора.
3. Методы аппроксимации и регуляризации эмпирического риска в задачах классификации. Их связь с принципом максимума совместного правдоподобия данных и модели. Вероятностный смысл регуляризации. Виды регуляризаторов.
4. Логистическая регрессия. Теорема о линейности оптимального байесовского классификатора.
5. Метод опорных векторов, решение двойственной задачи.
6. Спрямяющее пространство. Ядра.
7. Многомерная линейная регрессия. Метод наименьших квадратов. Проблема мультиколлинеарности, способы её устранения.
8. Мультиколлинеарность и регуляризация в задачах многомерной линейной регрессии. Гребневая регрессия. Лассо Тибширани.
9. Бустинг. Какие две эвристики лежат в основе алгоритма AdaBoost?
10. Алгоритм AdaBoost. Достоинства и недостатки алгоритма AdaBoost.

## 6. Формальные языки и трансляции

1. Недетерминированные конечные автоматы. Различные варианты определения. Детерминированные конечные автоматы. Их эквивалентность.
2. Регулярные выражения. Теорема Клини об эквивалентности регулярных выражений и конечных автоматов.
3. Минимизация конечных автоматов. Алгоритм минимизации. Алгоритм проверки эквивалентности регулярных выражений.
4. Порождающие грамматики. Иерархия Хомского. Праволинейные, контекстно-свободные, контекстно-зависимые грамматики (определения). Эквивалентность праволинейных грамматик и конечных автоматов.
5. Контекстно-свободные грамматики. Нормальная форма Хомского для контекстно-свободных грамматик.
6. Автоматы с магазинной памятью. Варианты определения. Эквивалентность автоматов с магазинной памятью и контекстно-свободных грамматик.
7. Леммы о разрастании для автоматных и контекстно-свободных языков. Примеры языков, не лежащих в данных классах.
8. Алгоритмы синтаксического разбора для контекстно-свободных грамматик. Алгоритмы Кока-Янгера-Касами и Эрли.