

Приветствуем тебя, уважаемый старшеклассник,  
уважаемая старшеклассница (нужное подчеркнуть)☺.

Перед тобой 16 задач, хороших и разных. Это Заочная физико-математическая олимпиада, которая проводится Факультетом Управления и Прикладной Математики **Московского физико-технического института**. Она не только способна занять тебя на неопределенно долгий срок, но и способна помочь при поступлении на ФУПМ. Каждая задача – это маленький перл, порожденный богатым воображением автора и пропущенный ножницами организаторов. Мы рады, что ты интересуешься нашей олимпиадой, а значит нашим институтом, нашим факультетом и математикой. Она (математика) представлена на нашем факультете во всей красе, от чисто теоретических курсов дискретного анализа с теорией групп, теории реализации языков программирования (об этом курсе в двух словах не скажешь☺), до чисто прикладных вещей, таких как вычислительная математика, спец. курсы кафедры информатики. Так что у нас есть, чем заняться. Ты спросишь: «А зачем в этой олимпиаде физика?», а затем, что без физики ты не сможешь решать практические задачи. Физика учит видеть только то, что важно в данной проблеме, отсеивать не нужные детали. По выражению одной из студенток, не понимавшей, «как можно учить физику, ведь там решения типа, давайте считать шкаф круглой тумбочкой», но в этом ее прелесть и заключается, что иногда шкаф - это круглая тумбочка☺.

Мы искренне надеемся, что решение этих нетривиальных задач доставит тебе массу удовольствия. Даже если ты что-нибудь не решишь, все равно вышлай не позднее **15 марта** свою работу в тонкой тетради по адресу:

**141700, Московская обл., г. Долгопрудный,  
Институтский пер., 9, МФТИ, Деканат ФУПМ,  
с пометкой «Олимпиада ФУПМ-2005»**

**На титульном листе и на отдельном листочке** разборчиво укажи свою фамилию, имя, отчество, почтовый адрес, место учебы, класс, номер в ЗФТШ(если есть), нарисуй табличку для проставления баллов за задачи. Лучшие из лучших получают диплом победителя☺

PS. Если возникли вопросы или просто стало интересно, заходи к нам в гости в наш виртуальный дом – на сайт <http://fupm.fizteh.ru>

Вполне возможно, что там ты найдешь для себя немало полезного, кроме электронного варианта олимпиады.

Задачи предлагали: Исаев Михаил, Малеев Алексей, Подлипский Олег, Пустовойтов Никита, Саид Имам, Сиденко Сергей, Сирожиддинов Шерхон, Соловейчик Илья. Идеи некоторых задач взяты из олимпиадных сборников Физтеха.

Организация олимпиады – Проценко Игорь, Пустовойтов Никита.

Если Вы хотите, чтобы в будущих олимпиадах участвовали Ваши задачи, присылайте их в архиве на [flashnik@7ka.mipt.ru](mailto:flashnik@7ka.mipt.ru)

## Московский физико-технический институт Факультет Управления и Прикладной Математики



## ЗАОЧНАЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ

Долгопрудный, 2004

## Математика

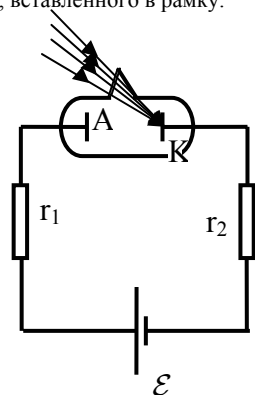
- На ФУПМе проходит кубок факультета по футболу, в котором принимают участие  $n$  команд. Любые 2 команды встречаются на поле. Пусть  $x_1$  – количество побед первой команды,  $y_1$  – количество ее поражений. Аналогично,  $x_i$  – количество побед  $i$ -ой команды,  $y_i$  – количество поражений  $i$ -ой команды. Доказать, что  $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2$ , если известно, что не было ничьих.
- Решить функциональные неравенства:
  - $f(x) - f(y) \leq (x - y)^2 \quad \forall x, y$ ;
  - $\frac{f(x) - f(y)}{f(x) + f(y)} = f\left(\frac{x - y}{x + y}\right) \quad \forall x, y, f(x)$  непрерывна.
- Есть лабиринт, который состоит из комнат и переходов между ними. В каждой комнате есть несколько дверей, ведущих в некоторые другие. Абитуриент Вася решил обойти этот лабиринт, следуя простому правилу: зайдя в любую комнату, он отсчитывает от той двери, в которую зашел, 2005 дверь по часовой стрелке. Однако в лабиринте он заблудился. Сможет ли абитуриент Вася, если конечно он будет правильно считать до 2005, выйти из этого лабиринта, пользуясь ТЕМ же правилом.
- Для последовательности  $\{a_n\}$  выполняется  $a_1 = k + 1, a_{n+1} = a_n^2 - ka_n + k; k, n \in N$ . Докажите, что  $a_i$  и  $a_{i+1}$  взаимно просты.
- В каждой из двух урн находится произвольное число шаров. В начале ни одна из урн не пуста. Разрешается проводить две операции:
  - удалить одинаковое число шаров одновременно из каждой урны;
  - удвоить число шаров в одной урне.
 Докажите, что только с помощью этих двух операций обе урны могут быть опустошены.
- Для любого натурального  $n$   $(1 + it)^n = f(t) + ig(t)$ , где  $i = \sqrt{-1}$  – мнимая единица, а  $f(t)$  и  $g(t)$  – многочлены с действительными коэффициентами. Докажите, что для любого действительного числа  $k$  уравнение  $f(t) + k \cdot g(t) = 0$  имеет только действительные корни.
- Пусть  $ABCDEF$  – выпуклый шестиугольник, а  $P, Q, R$  – середины  $AD, BE, CF$  соответственно. Докажите, что площадь треугольника  $PQR$  меньше четверти площади данного шестиугольника.
- Студентка, проснувшись ночью, поняла, что в пустой после летних каникул комнате  $12.5 \times 12.5$  м есть таракан, который может бегать со скоростью до 0.3 м/с. Сможет ли она поймать таракана, если у нее есть фонарь, освещающий пол в радиусе 2 м, а она бежит со скоростью 1.5 м/с?

## Физика

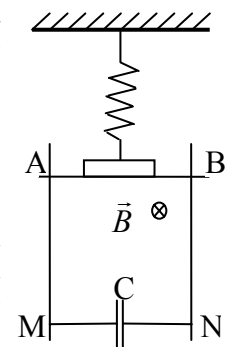
- В густом тумане из мелких капелек воды падает «суперкапля» шаровой формы, захватывая по пути мелкие капельки. Начальная скорость и ускорение  $V_0$  и  $a_0$ , конечные –  $V_1$  и  $a_1$  соответственно. Найти путь, пройденный каплей. Ускорение свободного падения  $g$  считать постоянным в течение всего времени падения.
- В отдаленной точке Вселенной вспыхнула сверхновая. Ее радиус увеличивается с очень большой скоростью  $V$ . Через какое время астрономы на Земле увидят новую звезду? Учитывая конечность скорости света  $c$ , найти скорость возрастания видимого земным наблюдателем радиуса звезды. Расстояние до звезды  $L$ .
- Два одинаковых противоположно заряженных шарика радиуса  $R$  летят навстречу друг другу, и вначале их скорости параллельны. Если бы между шариками не было гравитационных и кулоновских сил, они бы пролетели на расстоянии  $l$  друг от друга (это "прицельное расстояние"). Скорости

шариков на бесконечности равны  $V$ . При каком прицельном расстоянии шарики не столкнутся? Их массы  $m$ , модуль заряда  $q$ .

- Металлическое кольцо радиуса  $a$ , массы  $m$  с омическим сопротивлением  $R$  падает в магнитном поле, вертикальная составляющая индукции которого меняется по закону  $B(h) = B_0(1 - \alpha h)$ , где  $\alpha$  – константа. Плоскость кольца все время горизонтальна, а поле симметрично относительно оси симметрии кольца. Объяснить, какие силы и почему действуют на кольцо. Найти установившуюся скорость падения.
- С помощью карандаша, линейки и листка бумаги найти толщину стекла, вставленного в рамку. Стекло считать однородным с показателем преломления  $n$ .
- Излучение полупроводникового лазера сфокусировано на плоском фотокатоде вакуумного фотоэлемента (см. рис.). Между плоским анодом  $A$ , расположенным параллельно фотокатоду, и фотокатодом  $K$  подключают источник тока с постоянной ЭДС  $\mathcal{E}$ . При ускоряющей разности потенциалов между анодом и фотокатодом диаметр пятна фотоэлектронов на аноде в два раза превышает диаметр пятна фотоэлектронов на аноде при смене полярности напряжения, т. е. при тормозящей разности потенциалов между анодом и фотокатодом. Работа выхода материала фотокатода  $A = 1,8$  эВ. Длина волны излучения лазера  $\lambda = 442$  нм, ЭДС источника  $\mathcal{E} = 3$  В, все сопротивление подводящих проводов сосредоточено в сопротивлениях  $r_1 = 0,5$  Ом и  $r_2 = 0,7$  Ом. Какой ток течет в цепи?



- На пружине жесткости  $k$  висит груз (см. рис.). К грузу прикреплена горизонтально расположенная медная рейка  $AB$  длины  $l$ . Рейка может скользить без трения по неподвижным вертикальным проводящим однородным постоянному сечению рельсам  $AM$  и  $BN$ , имея с ними хороший электрический контакт. К рельсам с помощью проводов подсоединен конденсатор емкости  $C$ . Система находится в однородном магнитном поле, вектор индукции  $\vec{B}$  которого перпендикулярен рейке и рельсам. Найдите период свободных затухающих вертикальных колебаний груза. Считать, что затухание мало. Длина отрезка рельса от положения равновесия груза до узла подсоединения конденсатора равна  $L$ , сопротивление того же участка  $R$ . Сопротивлением рамки  $AB$  и проводов от конденсатора пренебречь. Масса груза с рейкой равна  $m$ .



- Студент ставит открытую полуторалитровую бутылку минеральной воды ( $m = 1,5$  кг) в идеальный холодильник, потребляющий из электросети мощность  $N = 100$  Вт. В комнате, которую можно рассматривать как камеру объемом  $V = 100$  м<sup>3</sup>, температура первоначально была  $T_0 = 300$  К, давление  $p_0 = 1$  атм. Температура минералки равна комнатной. Температуру плавления, удельные теплоемкость и теплоту плавления минералки принять равными соответствующим величинам воды –  $T_f = 273$  К,  $c = 4200$  Дж/(кг·К) и  $q = 3,34 \cdot 10^5$  Дж/кг. Какое время должен проработать холодильник, чтобы вода замерзла? Какой станет температура в комнате в этот момент? Все это время в комнате открыта форточка площадью  $S = 150$  см<sup>2</sup>, температура на улице  $T_1 = 253$  К. Считать, что длина зоны, в которой происходит теплообмен, равна  $l = 0,3$  м, коэффициент теплопроводности  $\kappa = 2,5 \cdot 10^{-2}$  Вт/(м·К). Считать относительное изменение температуры в комнате в результате работы холодильника малым. Воздух считать идеальным двухатомным газом.