ГЕОМЕТРИЯ ПАРНЫХ СРАВНЕНИЙ

А. А. Заславский

Рассматриваются парные сравнения n объектов с ничьими. Каждой матрице парных сравнений ставится в соответствие точка в n-мерном пространстве. Полученная конфигурация точек обрабатывается методами выпуклого анализа и линейного программирования.

1. Введение

Парные сравнения [1] являются одним из видов экспертных оценок. Применяться они начали раньше остальных видов. Соответственно, в настоящее время разработано множество алгоритмов анализа парных сравнений. Однако, по применяемому математическому аппарату эти методы довольно близки друг к другу, и не исключено, что использование методов других областей математики может привести к интересным результатам. В данной работе намечается один из возможных путей использования для обработки парных сравнений методов выпуклого анализа и линейного программирования.

Мы будем рассматривать парные сравнения n объектов с ничьими, при которых эксперту предъявляются все возможные пары объектов, и эксперт либо сообщает, какой из них предпочтительнее, либо объявляет объекты равноценными. Результаты сравнений будем записывать в матрицу X (без диагональных элементов), так что, если эксперт предпочел i-й объект j-му, то $x_{ij} = 1$ и $x_{ji} = 0$, а если эти объекты равноценны, то $x_{ij} = x_{ji} = 1/2$. Таким образом, для любых различных i и j $x_{ij} + x_{ji} = 1$. Для каждого объекта найдем сумму набранных им очков: $s_i = \sum_{j \neq i} x_{ij}$. Будем считать объекты упорядоченными по возрастанию этих сумм, т.е. $s_1 \leq \cdots \leq s_n$.

Вообще говоря, ответы эксперта могут содержать противоречия, т.е. в матрице X могут быть подматрицы 3×3 одного из следующих видов:

$$\begin{pmatrix} - & 1 & 0 \\ 0 & - & 1 \\ 1 & 0 & - \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} - & 1 & 1/2 \\ 0 & - & 1 \\ 1/2 & 0 & - \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} - & 1/2 & 1 \\ 1/2 & - & 1/2 \\ 0 & 1/2 & - \end{pmatrix}.$$

Если X не содержит таких подматриц, то объекты можно разбить на несколько классов, причем эксперт объекты из одного класса считает равноценными, а объект из класса с большим номером предпочитает объекту из класса с меньшим номером. Такие матрицы будем называть *транзитивными*.

Возьмем теперь в n-мерном пространстве для каждой матрицы X точку с координатами $(s_1, \ldots, s_n)$ и построим выпуклую оболочку M этих точек. Наша цель — исследование структуры множества M.

2. Свойства множества M

Этот раздел статьи посвящен, прежде всего, доказательству следующего утверждения, описывающего строение множества M.

Утверждение. M является $(n-1)$-мерным многогранником, комбинаторно эквивалентным соответствующему кубу, а его вершины соответствуют транзитивным матрицам.

Доказательство. Отметим, что $s_1,\dots,s_n$ удовлетворяют условиям:

$$\begin{array}{rcl} s_1+\cdots+s_n & = & \frac{n(n-1)}{2}, \\ s_1+\cdots+s_k & \ge & \frac{k(k-1)}{2}, \quad k=1,\dots,n-1. \end{array} \tag{1}$$

Действительно, $s_1+\cdots+s_n=\sum_{i\neq j}x_{ij}=\sum_{i<j}(x_{ij}+x_{ji})=\frac{n(n-1)}{2}$, $s_1+\cdots+s_k\ge\sum_{i<j\le k}(x_{ij}+x_{ji})=\frac{k(k-1)}{2}$, причем, во втором соотношении равенство достигается тогда и только тогда, когда $x_{ij}=0$ для всех $i\le k$, $j>k$, т.е. когда при всех сравнениях объекта с номером, меньшим k, и объекта с номером, большим k, эксперт предпочитает объект с большим номером. Из первого соотношения вытекает, что все отмеченные точки лежат в $(n-1)$-мерной гиперплоскости.

Забудем временно, что s_i полуцелые, и рассмотрим условия (1) и $s_i\le s_{i+1}$. Они определяют выпуклый многогранник, в вершинах которого, по крайней мере, $n-1$ из расматриваемых условий обращаются в равенства. При этом, если $s_1+\cdots+s_k=\frac{k(k-1)}{2}$, то $x_{ij}=0$, $x_{ji}=1$ для всех $i\le k$, $j>k$. Следовательно, $s_k\le k-1$ и $s_{k+1}\ge k$, т.е. в каждой из $n-1$ пар условий $s_k\le s_{k+1}$ и $s_1+\cdots+s_k\ge\frac{k(k-1)}{2}$ в равенство обращается ровно одно. Выбрать это условие можно 2^{n-1} способов, каждому из которых соответствует точка вида $s_1=\cdots=s_{k_1}=\frac{k_1-1}{2}$, $\quad s_{k_1+1}=\cdots=s_{k_1+k_2}=k_1+\frac{k_2-1}{2},\dots,s_{k_1+\cdots+k_l+1}=\cdots=s_n=k_1+\cdots+k_l+\frac{n-1-k_1-\cdots-k_l}{2}$, а каждой такой точке можно поставить в соответствие транзитивную матрицу, порождающую разбиение объектов на $l+1$ класс численностью $k_1,\dots,k_l$ и $(n-k_1-\cdots-k_l)$.

Естественным образом интерпретируются также ребра многогранника M. Две вершины соединены ребром тогда и только тогда, когда одно из соответствующих им разбиений получается из другого "склеиванием"двух соседних классов в один.

Опишем теперь некоторые другие свойства M.

1. M имеет $]n/2[$-мерную плоскость симметрии, задаваемую уравнениями $s_1+s_n=s_2+s_{n-1}=\cdots=n-1$. Действительно, симметрия относительно этой плоскости соответствует замене результатов всех сравнений на противоположные.

2. M вписан в сферу, диаметром которой является отрезок между точками $(\frac{n-1}{2},\dots,\frac{n-1}{2})$ и $(0,1,\cdots,n-1)$. Обе эти точки являются вершинами M, первая соответствует равноценности всех объектов, вторая — их строгому упорядочению. Центр сферы O задается условиями $s_2-s_1=s_3-s_2=\cdots=s_n-s_{n-1}=1/2$. При нечетном n координаты центра оказываются полуцелыми и, следовательно, существует соответствующая матрица парных сравнений. Доказательство этого факта получается непосредственным вычислением расстояния от точки O до любой вершины M.

Отметим также, что объем многогранника M задается красивой формулой $V(M)=n^{n-\frac{3}{2}}$. Получить ее можно, выписав рекуррентное соотношение, выражающее объем многогранника данной размерности через объемы многогранников меньших размерностей. После преобразований оно приводится к соотношению, связывающему количества деревьев с различными количествами помеченных вершин. Поскольку число таких деревьев с n вершинами равно n^{n-2}, для объема M получается приведенная формула. Каким образом объем многогранника оказывается связан с числом деревьев, мне неизвестно.

3. Возможные применения свойств M

В практических экспертизах, как правило, ответ на поставленный вопрос дают несколько экспертов, после чего их мнения агрегируются. Получение агрегированного мнения является достаточно сложной математической задачей, для решения которой разработано множество методов. Большинство этих методов основано на введении некоторой меры близости между ответами экспертов и минимизации среднего значения этой меры между итоговой оценкой и ответами экспертов. В частности, в методе парных сравнений чаще всего применяется метрика Кемени [2]. При ее использовании, если ответам экспертов соответствуют матрицы $X^1, \ldots, X^N$, то итоговая матрица $\widetilde{X}$ определяется по правилу большинства:

$$\widetilde{x}_{ij} = \begin{cases} 1 & \sum_{l=1}^{N} x_{ij}^l > \sum_{l=1}^{N} x_{ji}^l \\ \frac{1}{2} & \sum_{l=1}^{N} x_{ij}^l = \sum_{l=1}^{N} x_{ji}^l \\ 0 & \sum_{l=1}^{N} x_{ij}^l < \sum_{l=1}^{N} x_{ji}^l. \end{cases}$$

Известно, что матрица $\widetilde{X}$ может оказаться нетранзитивной даже при транзитивных $X^1, \ldots, X^N$. Поэтому, если результат экспертизы должен быть транзитивным, то возникает задача определения транзитивной матрицы, ближайшей к $\widetilde{X}$. В случае использования в качестве меры близости метрики Кемени эта задача оказывается в вычислительном отношении весьма сложной [3]. Поэтому представляется перспективным следующий "геометрический"подход.

Построим точку $P \in M$, соответствующую матрице $\widetilde{X}$, и будем искать ближайшую к P вершину M. Надо сказать, что для произвольного многогранника эта задача крайне сложна. Но, так как M вписан в сферу, она допускает довольно простое решение. Действительно, введем систему координат, в которой O является началом, сфера, описанная вокруг M, имеет единичный радиус, а координаты точки P равны $(0, \ldots, 0, y_0)$, где $0 < y_0 < 1$. Тогда для произвольной точки сферы X с координатами $(y_1, \ldots, y_n$ имеем

$$XP^2 = y_1^2 + \cdots + y_{n-1}^2 + (y_n - y_0)^2 = 1 - 2y_n y_0 + y_0^2,$$

т.е. расстояние XP есть монотонно убывающая функция y_n. Отсюда следует, что ближайшей к P будет вершина, проекция которой на ось OP максимальна. Следовательно, задача сводится к максимизации линейной функции на множестве вершин выпуклого многогранника M или, что то же самое на всем многограннике. Таким образом, итоговое мнение экспертов может быть найдено, как решение стандартной задачи линейного программирования.

Пока неясно, насколько сильно найденное решение будет отличаться от полученного традиционными методами поиска медианы Кемени. Скорее всего, при достаточно высокой согласованности исходных экспертных оценок отличие будет невелико, хотя окончательный ответ на этот вопрос может дать только серия вычислительных экспериментов.

4. Дальнейшие направления исследований

Развитие предложенного подхода может оказаться полезным при решении следующих традиционных для анализа парных сравнений задач.

1. Определение степени противоречивости каждого эксперта. В качестве показателя противоречивости обычно берется количество нетранзитивных троек. Для сравнений с ничьими целесообразно приписывать тройкам различного вида разные веса [4,5]. Представляет интерес выяснение связи между уровнем нетранзитивности матрицы и положением соответствующей точки в многограннике M.

2. Оценка согласованности экспертов между собой и выделение подгрупп согласованных экспертов. Геометрическая интерпретация близости экспертов даст новые инструменты для решения этих задач.

3. В ряде исследований эксперту при сравнении двух объектов предлагалось не только ответить, какой из них предпочтительнее, но и указать степень этого предпочтения. В этом случае элементы матрицы X могут принимать не три, а большее число значений. Построение и содержательная интерпретация геометрических образов таких матриц могли бы стать подтверждением перспективности предложенного подхода.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Дэвид Г. Метод парных сравнений.— М.: Статистика, 1978.

[2] Кемени Дж., Снелл Дж. Кибернетическое моделирование.— М.: Советское радио, 1972.

[3] Гильбурд М. М. Об эвристических методах построения медианы в задачах группового выбора.— Автоматика и телемеханика, 1988, N 7, с.131-136.

[4] Казанская Т. А. Распространение коэффициента Кендалла-Смита на парные сравнения со связями.— В кн.: Экспертные оценки в задачах управления/ ИПУ АН СССР. М., 1982, с.42-50.

[5] Заславский А. А. О логичных и нелогичных турнирах.— Квант, 1997, N 5, с.11-13.

GEOMETRY OF PAIRED COMPARISONS

A.Zaslavsky

The paired comparisons with draws of n objects are considered. Each matrix of comparisons is in accordance with a point in R^n. Resulting configuration is treated by the methods of convex analysis and linear programming.