Производящие функции

Е.О. Черноусова (Ежова)

Производящие (характеристические) функции в теории вероятностей и (асимптотической) комбинаторике (пропаганда идеи: часто для нахождения чисел, имеющих комбинаторную или вероятностную природу, выгодно изучить некоторое функциональное уравнение относительно неизвестной функции, которая содержит в себе всю информацию об этих числах): формальные грамматики (теорема Лагранжа), перечислительная комбинаторика (теория Д. Пойа), метод включения и исключения и его обобщения (подход Дж.-К. Рота), метод отыскания значений (и их асимптотик) различных комбинаторных сумм (подход Г.П. Егорычева), сведение вычисления (асимптотики) чисел, имеющих вероятностную природу, к вычислению вычетов (к исследованию асимптотического поведения интегралов в комплексной плоскости, зависящих от параметра, с помощью метода перевала или стационарной фазы), предельные теоремы и законы больших чисел.

В начале, не вдаваясь в тонкости теории, покажем, как работает метод производящих функций в трех классических задачах.

1) ***Задача о взвешивании.*** В начале XVIII века Л.Эйлер решал задачу: *Какие грузы можно взвесить гирями в* $1,\quad 2,\quad 2^2,\quad 2^3,\quad \ldots,\quad 2^m,\quad \ldots$ *грамм, и сколькими способами?*

Эйлер рассматривает бесконечное произведение двучленов:

$$\alpha(x) = (1+x)\left(1+x^2\right)\left(1+x^4\right)\left(1+x^8\right)\cdots\left(1+x^{2^m}\right)\cdots$$

После раскрытия скобок и приведения подобных членов, получается «бесконечный» многочлен:

$$\alpha(x) = 1 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots$$

Замети, что коэффициенты A_k равны числу различных представлений числа k в виде суммы некоторых из чисел: $1,\quad 2,\quad 2^2,\quad 2^3,\quad \ldots,\quad 2^m,\quad \ldots$, другими словами это число способов взвесить груз в k грамм указанными гирями.

Для нахождения коэффициентов A_k домножим правую и левую часть последнего равенства на $(1-x)$ и воспользуемся тождествами:

$$\begin{aligned}
&(1-x)(1+x) = \left(1-x^2\right)\\
&\left(1-x^2\right)\left(1+x^2\right) = \left(1-x^4\right)\\
&\left(1-x^4\right)\left(1+x^4\right) = \left(1-x^8\right)\\
&\ldots
\end{aligned}$$

Получим:

$$(1-x)(1+x)\left(1+x^2\right)\left(1+x^4\right)\left(1+x^8\right)\cdots\left(1+x^{2^m}\right)\cdots = 1$$

Т.е.

$$(1-x)\alpha(x) = 1$$

$$\alpha(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots$$

Таким образом, $A_k = 1$ для всех k, т.е. всякий груз в целое число грамм можно взвесить гирями в $1,\quad 2,\quad 2^2,\quad 2^3,\quad \ldots,\quad 2^m,\quad \ldots$, притом единственным способом.

Упражнение. Доказать, что любое целое положительное число можно единственным образом в двоичной системе исчисления. (Указание: сравнить с задачей о взвешивании)

2) ***Задача о разбиении числа.*** Так Л.Эйлер назвал следующую задачу: *Найти число положительных целых решений уравнения:*

$$y_1 + y_2 + \cdots y_m = k,$$

где m и k - фиксированные натуральные числа.

Здесь к цели приводит выражение:

$$\beta(x) = \left(1 + x + x^2 + x^3 \ldots\right)^m$$

После раскрытия скобок и приведения подобных членов, получим:

$$\beta(x) = 1 + B_1 x + B_2 x^2 + B_3 x^3 \ldots$$

Теперь коэффициент B_k дает ответ к поставленной задаче.

Можно переписать выражение в виде:

$$\beta(x) = \left(1 + x + x^2 + x^3 \ldots\right)^m = \left(\frac{1}{1-x}\right)^m = 1 + B_1 x + B_2 x^2 + B_3 x^3 \ldots$$

Воспользовавшись дифференцированием последнего соотношения и подставляя $x = 0$, получим формулу для коэффициентов:

$$B_k = \frac{m(m+1)\cdots(m+k-1)}{k!}.$$

3) Задача о размене. *Сколькими способами можно разменять доллар монетами в* $1, \quad 5, \quad 10, \quad 25, \quad 50$ *центов? Или сколько неотрицательных целых решений имеет уравнение*

$$y_1 + 5y_2 + 10y_3 + 25y_4 + 50y_5 = 100?$$

В более общем виде «задачу о размене» ставят так: *Сколько неотрицательных целых решений имеет уравнение*

$$a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3 + \cdots + a_m y_m = k,$$

где $a_1, \ldots, a_m, n$ - фиксированные натуральные числа?

Для решения этой задачи воспользуемся выражением:

$$\gamma(x) = \left(1 + x^{a_1} + x^{2a_1} + x^{3a_1} + \ldots\right)\left(1 + x^{a_2} + x^{2a_2} + x^{3a_2} + \ldots\right) \times \ldots \times \left(1 + x^{a_m} + x^{2a_m} + x^{3a_m} + \ldots\right) =$$

$$= \frac{1}{\left(1 - x^{a_1}\right)\left(1 - x^{a_2}\right)\cdots\left(1 - x^{a_m}\right)} = 1 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \ldots$$

Теперь коэффициент C_k дает ответ на поставленный вопрос.

Теперь немного теории.

Производящей функцией для последовательности $a_0, \; a_1, \; \ldots \; a_n, \; \ldots$ называется формальный степенной ряд

$$A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

Термин «формальный» означает, что мы не находим область сходимости ряда $A(x)$, нигде не будем вычислять значений $A(x)$ для конкретных значений переменной x, будем лишь выполнять некоторые операции над такими рядами и определять коэффициенты при степенях x; таким образом, $A(x)$ интересует нас не как числовая функция от переменной x, а как «носитель» последовательности (a_k).

Суммой произвольных рядов

$$A(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k,\quad B(x)=\sum_{k=0}^{\infty}b_k x^k$$

называется ряд

$$A(x)+B(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(a_k+b_k)x^k.$$

Произведением ряда $A(x)$ на число λ называется ряд

$$\lambda A(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda a_k x^k.$$

Произведением рядов $A(x)$ и $B(x)$ называется ряд

$$A(x)B(x)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k x^k,$$

где $c_k=\sum_{i=0}^{k}a_i b_{k-i}$.

Из курса математического анализа известно, что если степенной ряд сходится в некоторой окрестности нуля, то в этой окрестности его сумма является аналитической функцией, по отношению к которой сам ряд является рядом Маклорена:

$$a_k=\frac{A^{(k)}(0)}{k!},\quad k=0,1,2,\ldots.$$

Ниже приведены производящие функции для некоторых простых последовательностей:

Последовательность (a_k)	Производящая функция $A(x)$
$1,1,\ldots,1,\ldots$	$\frac{1}{1-x}$
$1,\frac{1}{1!},\frac{1}{2!},\ldots,\frac{1}{k!},\ldots$	e^x
$1,2,2^2,\ldots,2^k,\ldots$	$\frac{1}{1-2x}$
$0,1,2,\ldots,k,\ldots$	$\frac{x}{(1-x)^2}$
$C_n^0,C_n^1,\ldots,C_n^k,\ldots,C_n^n,0,\ldots$	$(1+x)^n$
$1,\alpha,\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!},\ldots,\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!},\ldots$	$(1+x)^{\alpha}$

Покажем, как может быть получена производящая функция для последовательности неотрицательных целых чисел:

$$\sum_{k=0}^{\infty}kx^k=x\sum_{k=0}^{\infty}kx^{k-1}=x\sum_{k=0}^{\infty}\frac{d}{dx}\left(x^k\right)=x\frac{d}{dx}\left(\sum_{k=0}^{\infty}x^k\right)=x\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{x}{(1-x)^2}.$$

Применим аппарат производящих функций к решению следующей весьма общей по постановке задачи.

Найти a_k *- число всех неупорядоченных k-элементных выборок с повторениями, удовлетворяющих заданными ограничениями на число вхождений в них каждого элемента генеральной совокупности* $X=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$*: элемент* x_i *может* *присутствовать в выборке* y_i *раз, где* y_i *- элемент некоторого числового множества* $Y_i \subset \mathrm{N}_0$ *(*$i = 1, \ldots, n$*).*

Проиллюстрируем постановку задачи на примере:
Сколько разных наборов из k *шаров можно получить, имея 1 синий шар, 2 одинаковых белых и 4 одинаковых красных.*

Здесь генеральная совокупность состоит из синего, белого и красного шара. Возможное число вхождений каждого шара в набор определяется множествами $Y_1 = \{0,1\}$, $Y_2 = \{0,1,2\}$, $Y_3 = \{0,1,2,3,4\}$.

Пусть $A(x)$ производящая функция для последовательности (a_k). Тогда справедливо следующее соотношение:

$$A(x) = \prod_{i=1}^{n} \sum_{y_i \in Y_i} x^{y_i}.$$

Действительно,

$$A(x) = \prod_{i=1}^{n} \sum_{y_i \in Y_i} x^{y_i} = \sum_{y_1, \ldots, y_n} x^{y_1} \ldots x^{y_n} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k,$$

где $a_k = \sum\limits_{y_1 + \ldots + y_n = k} 1$. В выражении для a_k суммирование производится по всем наборам $(y_1, \ldots, y_n)$ таким, что $\forall i \;\; y_i \in Y_i$ и $y_1 + \ldots + y_n = k$, в результате чего получится искомое число k-выборок.

Для примера с шарами производящая функция имеет вид:

$$A(x) = (1+x)\left(1+x+x^2\right)\left(1+x+x^2+x^3+x^4\right) = 1+3x+5x^2+6x^3+6x^4+5x^5+3x^6+x^7.$$

Теперь рассмотрим применение аппарата производящих функций к выводу формул для числа сочетаний (без повторений и с повторениями). В обоих случаях будем считать, что генеральная совокупность состоит из n элементов.

Сочетания без повторений из n по k. Каждый элемент в выборке встречается не более одного раза, т.е. $\forall i \;\; Y_i = \{0,1\}$; k-выборка при этом является сочетанием (без повторения) из n по k. Производящая функция имеет вид:

$$A(x) = (1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k.$$

Сочетания с повторениями из n по k. Каждый элемент в выборке может появиться любое число раз: $\forall i \;\; Y_i = \mathrm{N}_0$; k-выборка при этом суть сочетание с повторениями из n по k. Производящая функция имеет вид:

$$A(x) = \left(1+x+x^2+\ldots\right)^n = \left(\frac{1}{1-x}\right)^n = (1-x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-n(-n-1)\cdots(-n-k+1)}{k!}(-x)^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{n(n+1)\cdots(n+k-1)}{k!}(-x)^k = \sum_{k=0}^{\infty} C_{n+k-1}^k x^k.$$

Число счастливых билетов

Трамвайные билеты имеют шестизначные номера. Билет называют счастливым, если сумма его первых трех цифр равна сумме трех последних.

Покажем, что существует взаимно-однозначное соответствие между множеством «счастливых» 6-значных номеров и множеством 6-значных номеров с суммой цифр 27.

Это соответствие задается так. Заменим в произвольном«счастливом» номере последние три цифры на цифры, дополняющие из до 9 (например, $147624 \to 147375$). Если сумма первых трех (и последних) цифр равна k, то после указанного преобразования сумма трех последних цифр станет равной $27-k$, а общая сумма шести цифр будет равна 27.
Таким образом, число счастливых билетов совпадает с числом билетов, сумма цифр у которых равна 27.
Каждый 6-значный номер с суммой цифр k можно рассматривать, как k-выборку, составленную из элементов генеральной совокупности $\left\{1, 10, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5\right\}$, причем каждый элемент может встречаться не более 9 раз. Пусть a_k - число таких k-выборок.
Производящая функция для последовательности $\left(a_k\right)$ (см. выше):

$$A(x) = \left(1 + x + x^2 + \ldots + x^9\right)^6 = \left(\frac{x^{10}-1}{x-1}\right)^6.$$

Задача, которую мы решаем, сводится к вычислению a_{27}.
Воспользуемся базисным фактом теории функций комплексного переменного – теоремой Коши.
Теорема Коши. *Для любого многочлена Лорана $p(z)$ его свободный член p_0 равен*

$$p_0 = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{p(z)dz}{z},$$

где интеграл берется по любой окружности на комплексной плоскости, содержащей внутри себя начало координат.
Для нашей задачи:

$$a_{27} = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|x|=1}\left(\frac{x^{10}-1}{x-1}\right)^6\frac{dx}{x^{28}} = \left[x = e^{i\varphi}\right] = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{e^{10i\varphi}-1}{e^{i\varphi}-1}\right)^6\frac{ie^{i\varphi}}{e^{28i\varphi}}d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{e^{5i\varphi}-e^{-5i\varphi}}{e^{i\varphi/2}-e^{-i\varphi/2}}\right)^6 d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{\sin 5\varphi}{\sin\left(\varphi/2\right)}\right)^6 d\varphi = \left[y = \frac{\varphi}{2}\right] = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\left(\frac{\sin 10y}{\sin y}\right)^6 dy = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin 10y}{\sin y}\right)^6 dy.$$

Таким образом, решение классической дискретной задачи записывается с помощью интеграла от тригонометрической функции!

Попробуем оценить значение последнего интеграла. График функции $f(y) = \dfrac{\sin 10y}{\sin y}$ на отрезке $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$ выглядит так, как показано на рисунке:

В нуле функция достигает своего максимума, равного 10. Вне отрезка $\left[-\dfrac{\pi}{10}; \dfrac{\pi}{10}\right]$ величина функции f не превосходит $\dfrac{1}{\sin\dfrac{\pi}{10}} \approx 3$. Основная составляющая интеграла сосредоточена на отрезке $\left[-\dfrac{\pi}{10}; \dfrac{\pi}{10}\right]$. Для оценки вклада этого отрезка методом стационарной фазы. Этот метод позволяет оценить значение интеграла

$$\int_{-\frac{\pi}{10}}^{\frac{\pi}{10}} f^{t}\,dy = \int_{-\frac{\pi}{10}}^{\frac{\pi}{10}} e^{t\ln f}\,dy$$

при $t \to \infty$. При больших значениях t величина интеграла определяется поведением функции $\ln f$ («фазы») в окрестности с стационарной точки 0 (точки, в которой $(\ln f)' = 0$, или, что то же самое, $f' = 0$). В окрестности нуля $f(y) \approx 10\left(1 - \frac{32}{2}y^2\right)$, а $\ln f(y) \approx \ln 10 - \frac{32}{2}y^2$. При больших t имеем

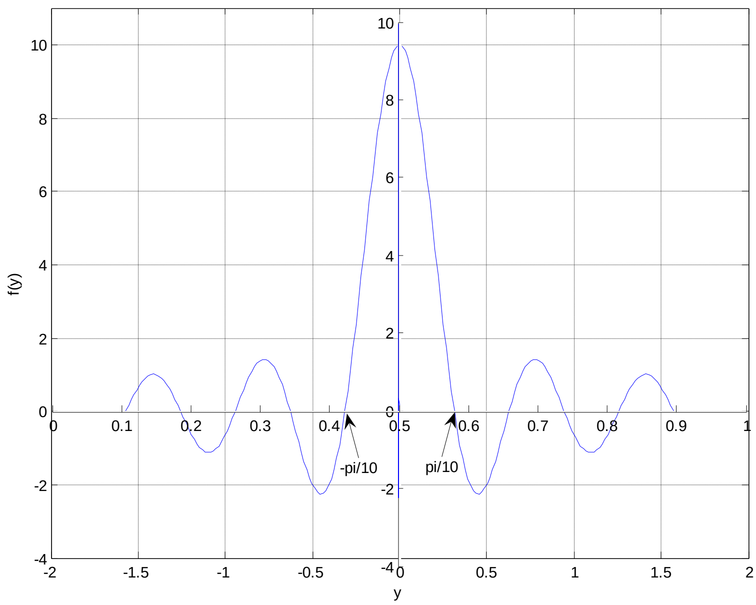
$$\int_{-\frac{\pi}{10}}^{\frac{\pi}{10}} e^{t\left(\ln 10 - \frac{33}{2}y^2\right)}dy = e^{t\ln 10}\int_{-\frac{\pi}{10}}^{\frac{\pi}{10}} e^{-\frac{33}{2}ty^2}dy \approx e^{t\ln 10}\,\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{33t}}.$$

Полагая $t = 6$, получаем окончательный результат:

$$a_k \approx \frac{10^6}{3\sqrt{11\pi}} \approx 56700$$

Полученный результат с хорошей точностью (отклонение составляет не более 3%) приближает искомое значение. Точное значение равно 55252.

Заметим, что задачу о числе счастливых билетов можно решить, зная формулу для числа сочетания с повторениями (см. выше) и метод включения-исключения.



Формула включения-исключения

Пусть для любого i множество A_i является подмножеством некоторого конечного множества A. Обозначим через $\bar{A}_i$ дополнение к A_i до множества A: $\bar{A}_i = A \setminus A_i$. Тогда

$$\left|\bar{A}_1 \bigcap \bar{A}_2 \ldots \bigcap \bar{A}_n\right| = |A| - \sum_{i=1}^{n}\left|\bar{A}_i\right| + \sum_{1\le i<j\le n}\left|\bar{A}_i \bigcap \bar{A}_j\right| - \ldots + (-1)^n \left|A_1 \bigcap A_2 \ldots \bigcap A_n\right|$$

Рассмотрим множество всех расстановок неотрицательных целых чисел с суммой 27 в шести позициях и введем шесть свойств таких расстановок. i - ое свойство состоит в том, что число в i - ой позиции не меньше 10. Число счастливых билетов равно числу указанных расстановок, не обладающих ни одним из шести таких свойств.
Число всех расстановок неотрицательных целых чисел с суммой 27 в шести позициях есть $\left|A\right| = C_{32}^{5}$ (сочетание с повторениями из 6 по 27). Далее, для любого i $\left|\bar{A}_i\right| = C_{22}^{5}$.
Действительно, мы можем поставить в i - ую позицию число 10, а оставшуюся сумму 17 произвольно распределить по шести позициям. Аналогично для любой пары $\left|\bar{A}_i \bigcap \bar{A}_j\right| = C_{12}^{5}$: мы ставим число 10 в i - ую и j - ую позиции, а оставшуюся сумму 7 произвольным образом распределяем по шести позициям. Заметим, что остальные слагаемые в формуле включения-исключения для этой задачи равны нулю, так как расстановки неотрицательных чисел с суммой 27 в шести позициях не могут обладать более, чем двумя свойствами одновременно. Таким образом, число счастливых билетов равно

$$C_{32}^{5} - 6C_{22}^{5} + 15C_{12}^{5}.$$

Теория Пойа

При решении ряда перечислительных задач комбинаторные объекты могут естественным образом отождествляться.
Примерами могут служить задача о числе различных ожерелий из n бусинок, где каждая окрашена в один из k цветов, задача о перечислении изомеров органических молекул заданной структуры, задача о компостере. Для таких комбинаторных объектов характерно то, что некоторые из них можно отождествить за счет вращений (трехмерная структура молекулы), осевой симметрии (рисунок компостера) или поворота (ожерелье, компостер).
В теории Пойа, названной так в честь американского математика венгерского происхождения, подсчет числа элементов некоторого множества осуществляется с точностью до отношения эквивалентности, заданного на данном множестве при помощи указания некоторой группы подстановок, действующей на данном множестве. В результате применения теории Пойа для числа классов эквивалентности различных видов строится производящая функция. Теория Пойа является хорошим примером демонстрации возможностей алгебраического аппарата при решении комбинаторных задач.
Пусть S - n-элементное множество. *Подстановкой* на множестве S называется взаимно-однозначное отображение S на себя.
Образ элемента $s \in S$ при действии на него подстановкой $\pi : S \to S$ будем обозначать πs. *Тождественная подстановка* ε переводит каждый элемент S в себя:

$$\forall s \in S \quad \varepsilon s = s$$

Произведением $\pi_1\pi_2$ подстановок π_1 и π_2 на множестве S назовем их композицию – подстановку, определяемую последовательным выполнением данных подстановок:

$$\forall s \in S \quad (\pi_1\pi_2)s = \pi_1(\pi_2 s).$$

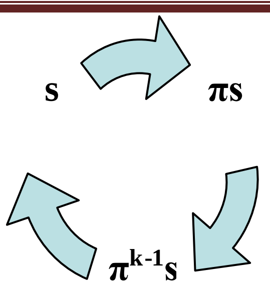
Операция умножения подстановок обладает свойством ассоциативности, а значит степень (π^n) определяется как n-кратное произведение $\pi \cdot \pi \cdot \ldots \cdot \pi = \pi^n$.
Если некоторое множество подстановок на S

1) замкнуто относительно операции умножения;
2) содержит тождественную подстановку;
3) вместе с каждой подстановкой содержит ей обратную,

то оно образует *группу*, в которой в роли нейтрального элемента выступает тождественная подстановка ε, а умножение подстановок является (групповой) бинарной операцией.
Самой «бедной» (по числу ее элементов) является группа, содержащая лишь ε. Самая «богатая» группа содержит все подстановки на множестве S, их число совпадает с числом перестановок n элементов и равно $n!$. Такую группу называют симметрической и обозначают S_n.
Зафиксируем некоторый элемент $s \in S$ и рассмотрим последовательность

$$s, \pi s, \pi^2 s, \pi^3 s, \ldots.$$

Данная последовательность не может содержать бесконечное число различных элементов ввиду конечности множества S. Первый элемент, который повторно встретится в последовательности, есть s. Наименьшее натуральное число k такое, что $\pi^k s = s$, называют порядком элемента s. Последовательность $s, \pi s, \pi^2 s, \pi^3 s, \pi^{k-1} s$ называют *орбитой* (или *циклом*) элемента s.
Элементы орбиты циклически переставляются подстановкой π.



Возьмем какой-нибудь элемент, не входящий в орбиту s (если конечно такой элемент существует, что будем в случае, когда орбита s не исчерпывает всего множества S); он порождает свою орбиту, не имеющей общих элементов с орбитой s. Если при этом остались элементы множества S, не вошедшие в построенные орбиты, то можно указать еще одну орбиту и т.д. В результате множество S разбивается на непересекающиеся орбиты (каждая подстановка, вообще говоря, задает свое разбиение S).
Длиной орбиты называют число ее элементов. Если подстановка разбивает множество S на k_1 орбит длины 1, k_2 длины 2, … k_n орбит длины n, то говорят, что подстановка имеет тип $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$. Сумма длин всех орбит равна числу элементов множества S:

$$\sum_{i=1}^{n} ik_i.$$

Цикловым индексом подстановки называют одночлен

$$x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n},$$

где $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ - тип подстановки.

Цикловым индексом группы подстановок G называют среднее арифметическое цикловых индексов ее элементов:

$$P_G(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{G} \sum_{g \in G} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}.$$

Примеры

1) Тождественная подстановка ε порождает n орбит длины 1, поэтому цикловой индекс группы, состоящей только из тождественной подстановки, равен:

$$P_{\{\varepsilon\}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^{n}.$$

2) Найдем циклового индекс группы подстановок вершин тетраэдра, порожденных его вращениями.

Вращение тетраэдра вокруг его высоты на 120^0 в любом направлении задает подстановку на множестве вершин, имеющую тип $(1, 0, 1, 0)$ (вершина, через которую проходит высота, при вращении остается на месте, три другие вершины циклически переставляются, образуя цикл длины 3). Всего имеем 8 таких вращений, соответственно 8 подстановок, имеющий цикловой индекс $x_1^1 x_3^1$.

Вращение тетраэдра на 180^0 вокруг прямой, соединяющей середины противоположных ребер, порождает подстановку типа $(0, 2, 0, 0)$ (концы каждого из указанных ребер меняются местами при повороте, образуя 2-элементную орбиту). Поэтому в группе подстановок имеется трип подстановки с цикловым индексом x_2^2.

Учтя, наконец, тождественную подстановку, имеющую цикловой индекс x_1^4, запишем цикловой индекс рассматриваемой группы:

$$P_G(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{12}\left(8x_1x_3 + 3x_2^2 + x_1^4\right).$$

Пусть $R^D = \{ f : D \to R\}$ - множество всевозможных функций с областью определения D и принимающих значения на множестве R, где R и D - некоторые конечные множества. Каждую такую функцию можно отождествить с размещением с повторениями из $|R|$ элементов по $|D|$; поэтому $\left|R^D\right| = |R|^{|D|}$.

Пусть G - группа подстановок, действующих на множестве D. Назовем функции f_1 и f_2 из R^D *эквивалентными* ($f_1 \sim f_2$), если для некоторой подстановки $g \in G$ $f_1(g) = f_2$, т.е.

$$\forall d \in D \quad f_1\big(g(d)\big) = f_2(d).$$

Введенное отношение эквивалентности обладает свойствами рефлексивности, транзитивности, симметричности.

Каждому элементу r множества R придадим некоторый *вес* $w(r)$. (Вес – это элемент некоторого коммутативного кольца.) *Весом функции* $f \in R^D$ назовем произведения весов образов всех элементов множества D при отображении f:

$$W(f) = \prod_{d \in D} w(f(d)).$$

Пример.

Пусть $D = \{1, 2, 3, 4\}$ - множество вершин тетраэдра;

$R = \{\text{синий, красный, зеленый, белый}\} = \{\text{с,к,з,б}\}$ - множество цветов. Тогда R^D - множество всевозможных раскрасок вершин тетраэдра в указанные цвета. С помощью G - группы подстановок вершин, возникающих в результате вращений тетраэдра, множество R^D разбивается на классы эквивалентности. Класс эквивалентности составляют раскраски, переходящие друг в друга в результате вращений тетраэдра, такие раскраски будем называть геометрически неразличимыми. Например, с точность до геометрической неразличимости существует ровно одна раскраска, при которой три вершины – белые, а одна – синяя. Каждому элементу множества R придадим вес: $w(\text{с}) = x$; $w(\text{к}) = y$; $w(\text{з}) = z$; $w(\text{б}) = t$. Вес упомянутой выше раскраски равен xt^3.

Теорема (без доказательства).

Эквивалентные функции имеют одинаковый вес:

$$f_1 \sim f_2 \Rightarrow W(f_1) = W(f_2).$$

Теперь становится корректным следующее определение. Весом класса эквивалентности называется вес любой функции из этого класса; если F - класс эквивалентности и $f \in F$, то $W(F) = W(f)$.

Заметим, что и у неэквивалентных функций могут совпадать веса.

Теорема Д. Пойа (1937 г.). *Сумма весов классов эквивалентности рана*

$$\sum_F W(F) = P_G\left(\sum_{r \in R} w(r), \sum_{r \in R} w^2(r), \sum_{r \in R} w^3(r), \dots\right),$$

где P_G - цикловой индекс группы подстановок G.

Следствие. *Число классов эквивалентности равно* $P_G\left(|R|, |R|, |R|, \dots\right)$.

Действительно. Если положить вес каждого элемента R равным 1, то и вес каждой функции, и, значит, каждого класса эквивалентности будет равен 1; поэтому сумма весов всех классов эквивалентности будет равна их числу.

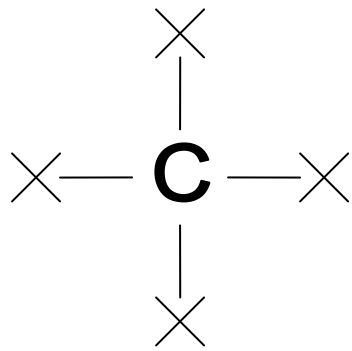
Примеры.

1) Воспользуемся теоремой Пойа для ***подсчета числа существенно различных раскрасок вершин тетраэдра в k цветов.*** Так как цикловой индекс группы подстановок вершин тетраэдра, порожденных его вращениями, равен:

$$P_G(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{12}\left(8x_1x_3 + 3x_2^{\ 2} + x_1^{\ 4}\right).$$

Применив следствие теоремы Пойа, получим

$$\frac{1}{12}\left(11k^2 + k^4\right).$$



2) Задача о перечислении числа изомеров органических молекул заданной структуры, где C - атом углерода, а места, обозначенные крестиками, могут занимать метил (CH_3), этил (C_2H_5), водород (H) и хлор (Cl).
Математическая модель этих молекул – тетраэдр, в центре которого расположен атом углерода.
Расположение в вершине тетраэдра определенной группы атомов будем считать покраской вершины в определенный цвет (один из четырех). Таким образом, задача сведена к предыдущей (при $k = 4$). Общее число молекул равно $\frac{1}{12}\left(11 \cdot 4^2 + 4^4\right) = 36.$

Для того чтобы подсчитать число молекул с фиксированным числом атомов водорода, положим:

$$w(H) = x; \quad w(Cl) = w(CH_3) = w(C_2H_5) = 1.$$

Тогда вес молекулы с i атомами водорода будет равен x^i. Применяя теорему Пойа, получим:

$$P_G\left(x+3,\ x^2+3,\ x^3+3,\ x^4+3\right) = x^4 + 3x^3 + 6x^2 + 11x + 15.$$

Значит, существует одна молекула CH_4 (метан), три молекулы с 3 атомами водорода, шесть молекул с 2 атомами водорода и 15 молекул без атомов водорода.
3) Задача о числе ожерелий. Имеется неограниченный запас бусинок k цветов. Сколько можно составить различных ожерелий из n бусинок (ожерелья, получаемые плоскими вращениями не будем различать)?
Считая, что бусинки располагаются в вершинах правильного n-угольника, сведем задачу к задаче о числе геометрически различных (т.е. не получающихся друг из друга вращениями в плоскости) раскрасок вершин правильного n-угольника в k цветов. При этом D - множество вершин, R - множество цветов, $|D| = n$, $|R| = k$; R^D - множество раскрасок. Отношение эквивалентности на множестве R^D задается с помощью G - группы подстановок вершин, порожденной вращениями правильного n-угольника; $|G| = n$.
Пусть $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$, где g_j - подстановка, возникающая в результате поворота на угол $\frac{2\pi}{n} j$ ($j = 1, \dots, n$) (в частности, тождественная подстановка $\varepsilon = g_n$). Тогда, если отождествить вершину с ее номером, положив $D = \{1, 2, \dots, n\}$ (номера проставляются по порядку против часовой стрелки), то подстановка g_j описывается соотношением:

$$g_j(i) \equiv i + j \pmod{n}.$$

Длину орбиты произвольного элемента можно найти как наименьшее натуральное число k, для которого kj делится на n. Если (n, j) - наибольший общий делитель j и n, то

$j = j_1(n, j)$, $n = n_1(n, j)$, где j_1 и n_1 - взаимно простые числа. Поэтому $kj = kj_1(n, j)$ делится $n = n_1(n, j)$ тогда и только тогда, когда k делится на n_1, наименьшее натуральное k с таким свойством равно $n_1 = \dfrac{n}{(n, j)}$. Итак при повороте на угол $\dfrac{2\pi}{n} j$ все орбиты имеют длину (n, j). Запишем цикловой индекс группы подстановок:

$$P_G(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \left(x_{\frac{n}{(n,j)}} \right)^{(n,j)}.$$

По следствию из теоремы Пойа общее число раскрасок N выражается формулой:

$$N = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} k^{(n,j)}.$$

В полученной сумме показатели степеней k принимают значения делителей числа n. Несложно видеть, что общее количество чисел из множества $\{1, 2, \ldots, n\}$, для которых их наибольший делитель с n равен d, где $d \mid n$, совпадает с количеством натуральных чисел, не превосходящих число $\dfrac{n}{d}$ и взаимно простых с ним, т.е. равно $\varphi\left(\dfrac{n}{d}\right)$ (φ - функция Эйлера). Таким образом,

$$N = \frac{1}{n} \sum_{d \mid n} k^d \varphi\left(\frac{n}{d}\right).$$

Упражнение. На листках бумаги пишутся числа от 00000 до 99999. Будем считать, что при переворачивании цифры 0, 1, 8 не меняются, а цифры 6 и 9 переходят друг в друга. Например, для чисел 06981 и 18690 можно приготовить только один листок. Сколько всего понадобится листков?

Числа Каталана.

Числом Каталана c_n называется число различных правильных скобочных структур из n пар скобок.

Удобно полагать $c_0 = 1$. Тогда последовательность чисел Каталана начинается так:

$$1,\quad 1,\quad 2,\quad 5,\quad 14,\quad 42,\quad 132,\quad \ldots$$

Чтобы вывести производящую функцию для чисел Каталана, найдем сначала рекуррентное соотношение для этих чисел.

Всякая правильная скобочная структура удовлетворяет следующим двум условиям:

1) число левых и правых скобок в правильной скобочной структуре одинаково;
2) число левых скобок в любом начальном отрезке правильной скобочной структуры не меньше числа правых скобок.

Наоборот, всякая (конечная) скобочная структура, удовлетворяющая условиям 1) и 2) является правильной.

В правильной скобочной структуре все скобки разбиваются на пары: каждой левой скобке соответствует парная ей правая. Парная правая скобка выделяется следующим правилом: это первая правая скобка справа от данной левой скобки, такая, что между выбранными двумя скобками стоит правильная скобочная структура.

Рассмотрим в правильной скобочной структуре из $n+1$ пар скобок пару скобок, в которую входит самая левая скобка структуры. Тогда последовательность скобок внутри этой пары образует правильную скобочную структуру и последовательность скобок вне этой пары образует правильную скобочную структуру. Если число пар скобок во внутренней скобочной структуре равно k, то во внешней структуре $n-k$ пар скобок. Наоборот, по каждой паре скобочных структур из k и $n-k$ пар скобок можно

восстановить структуру из $n+1$ пар скобок, заключив первую структуру в скобки и приписав к результату справа вторую структуру.
Отсюда мы получаем рекуррентное соотношение для чисел Каталана:
$$c_{n+1} = c_0 c_n + c_1 c_{n-1} + \ldots + c_n c_0.$$
Рассмотрим производящую функцию для чисел Каталана:
$$Cat(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots$$
Возведем ее в квадрат и умножим результат на x, получим
$$cCat^2(x) = c_0{}^2 x + \left(c_0 c_1 + c_1 c_0\right) x^2 + \left(c_0 c_2 + c_1 c_1 + c_2 c_0.\right) x^3 + \ldots =$$
$$= c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \ldots = Cat(x) - c_0 = Cat(x) - 1,$$
Что дает нам квадратное уравнение на производящую функцию
$$xCat^2(x) - Cat(x) + 1 = 0,$$
откуда
$$Cat(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}.$$
(Второй корень отбрасывается, так как $\dfrac{1+\sqrt{1-4x}}{2x} = \dfrac{1}{x} + \ldots$ содержит отрицательные степени x.)
Согласно биному Ньютона
$$c_n = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2}\cdot 4^{n+1}}{2(n+1)!} = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} = \frac{1}{n+1} C_{2n}^{n}.$$
Можно получить и более простое рекуррентное соотношение для чисел Каталана:
$$c_{n+1} = \frac{4n+2}{n+2} c_n.$$
Числа Каталана перечисляют самые разнообразные комбинаторные объекты.
Это и число различных триангуляции выпуклого многоугольника (разбиение многоугольника непересекающимися диагоналями на треугольники), число способов расставить 2n людей в очередь за покупкой товара в 50 руб., если у n человек есть только купюра в 100 руб., а у n человек - купюра в 50 руб., при этом изначальна кассам магазина пуста, и никто не хочет ждать свою сдачу.

Формальные грамматики с однозначным выводом. Теорема Лагранжа.

Снова рассмотрим правильные скобочные структуры, описываемые числами Каталана. Если обозначить левую скобку буквой a, а правую b, то можно переписать правильные скобочные структуры в виде «слов» в алфавите $\{a,b\}$.

Определение. Пусть $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_k\}$ - произвольный конечный набор различных букв. *Словом* в алфавите A называется произвольная конечная последовательность букв $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m$, где $\alpha_i\in A$ $i=1,\ldots,m$. Число m называется *длиной слова*. *Языком над алфавитом* A называется произвольное (конечное или бесконечное) множество слов в алфавите A.
Пустое слово λ имеет длину 0 и может входить или не входить в язык.
Множество правильных скобочных структур вместе с пустой структурой образует язык над алфавитом $\{a,b\}$. Этот язык называется *языком Дика*.
Производящей функцией языка L называется производящая функция

$$L(x)=l_0+l_1x+l_2x^2+\ldots,$$

где l_k есть число слов длины k в языке L.
Рассмотрим *правила вывода в языке Дика*:

$$1)\quad r\to\lambda;$$

$$2)\quad r\to arbr.$$

Действительно, всякое слово в языке Дика есть либо
1) пустое слово, либо
2) слово, в котором внутри самой левой пары соответственных скобок стоит некоторое слово языка Дика и после этой пары стоит слово языка Дика.

Вычислим с помощью правил вывода производящую функцию для языка Дика. Для этой цели напишем «некоммутативный производящий ряд», перечисляющий слова языка. Этот ряд представляет собой просто формальную сумму всех слов языка, выписанных в порядке возрастания длины:

$$D(a,b)=\lambda+ab+aabb+abab+aaabbb+aababb+\ldots$$

Теорема. Этот ряд удовлетворяет уравнению

$$D(a,b)=\lambda+aD(a,b)bD(a,b).$$

Доказательство основано на правилах вывода языка.
Чтобы перейти от некоммутативного производящего ряда к обычному, сделаем подстановку $a=x$, $b=x$, $\lambda=x^0=1$. Тогда получим

$$D(x,x)=1+x^2D^2(x,x).$$

Отсюда обозначив $D(x,x)$ через $d(x)$, получим

$$d(x)=1+x^2d^2(x).$$

Решение

$$d(x)=\frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{2x^2}$$

Этого уравнения, конечно же, совпадает (с точностью до возведения формальной переменной в квадрат) с производящей функцией для чисел Каталана. Необходимость подстановки переменной x^2 вместо x объясняется тем, что в языке Дика длина слова, составленного из n пар скобок, равна $2n$, тогда как ранее мы перечисляли эти слова по числу пар скобок.

Определение. Слово $w = \beta_1 \ldots \beta_m$ языка L называется *неразложимым* в этом языке, если никакое его непустое подслово $\beta_i \beta_{i+1} \ldots \beta_{i+l}$, $1 \le i,\ i + l \le m,\ l \ge 0$, отличное от самого слова w, не принадлежит языку L.

В частности, пустое слово в любом языке, содержащим его, неразложимо. Предположим, что язык L обладает следующими свойствами:

1) пустое слово входит в язык L;

2) начало всякого неразложимого слова не совпадает с концом другого или того же самого неразложимого слова;

3) если между любыми двумя буквами любого слова языка L вставить слово языка L, то получится слово языка L;

4) если из любого слова языка L выкинуть подслово, входящее в язык L, то получится слово языка L.

Обозначим через $n(y) = n_0 + n_1 y + n_2 y^2 + \ldots$ производящую функцию для числа неразложимых слов языка L.

Теорема (без доказательства). *Производящая функция для языка* L, *удовлетворяющего свойствам 1)-4), и производящей функцией для подъязыка неразложимых слов в нем связаны между собой уравнением Лагранжа*

$$l(x) = n\left(xl(x)\right).$$

Пример. Для языка Дика $n(y) = 1 + y^2$. Неразложимые слова – это λ и ab. Отсюда немедленно получаем уравнение $l(x) = 1 + \left(xl(x)\right)^2$ на производящую функцию для языка Дика.

Уравнение Лагранжа – функциональное уравнение, связывающее между собой производящие функции для числа слов в языке и числа неразложимых слов в нем. Оказывается, если одна из функций известна, то оно всегда разрешимо.

Приведем уравнение к классическому виду. Положим $xl(x) = \tilde{l}(x)$. Тогда уравнение Лагранжа примет вид:

$$\tilde{l}(x) = xn(\tilde{l}(x)).$$

Теорема Лагранжа. *Пусть задана одна из производящих функций* $\tilde{l}(x)$ ($\tilde{l}_0 = 0$, $\tilde{l}_1 \ne 0$) *или* $n(y)$ ($n_0 \ne 0$). *Тогда вторая производящая функция однозначно восстанавливается по ней из уравнения* $\tilde{l}(x) = xn(\tilde{l}(x))$.

Обобщения метода включения исключения

Напомним в чем заключается “Метод включения-исключения”.
Классическая формула.
Для любых конечных множеств $X_1, X_2, \ldots, X_n$ справедливо

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} X_i\right| = \sum_{i=1}^{n}|X_i| - \sum_{1\le i_1<i_2\le n}\left|X_{i_1}\bigcap X_{i_2}\right| + \ldots (-1)^k \sum_{1\le i_1<i_2<\ldots i_k\le n}\left|X_{i_1}\bigcap X_{i_2}\ldots\bigcap X_{i_k}\right| + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^n\left|X_1\bigcap X_2\ldots\bigcap X_n\right|$$

Эта формула легко доказывается индукцией по n. База индукции:

$$\left|X\bigcup Y\right| = |X| + |Y| - \left|X\bigcap Y\right|,$$

что справедливо в силу правила суммы для любых конечных множеств X, Y:

$$\left|X\bigcup Y\right| = \left|X\bigcap Y\right| + \left|X \setminus X\bigcap Y\right| + \left|Y \setminus X\bigcap Y\right| =$$
$$= \left|X\bigcap Y\right| + \left(|X| - \left|X\bigcap Y\right|\right) + \left(|Y| - \left|X\bigcap Y\right|\right) =$$
$$= \left|X\bigcup Y\right| = |X| + |Y| - \left|X\bigcap Y\right|.$$

Далее, полагая $X = \bigcup_{i=1}^{n-1} X_i, Y = X_n$, получаем формулу.

Обобщим теперь классическую формулу включения-исключения.
Рассмотрим N элементов $a_1, a_2, \ldots, a_N$, которым соответственно приписаны веса $w(a_1), w(a_2), \ldots, w(a_N)$, являющиеся элементами некоторого коммутативного кольца K. Каждый из заданных элементов может обладать или не обладать некоторыми свойствами $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Обозначим через $M(r)$ суммарный вес элементов, обладающих точно r свойствами, а через M_r - суммарный вес элементов, обладающих не менее чем r свойствами. Покажем, что

$$M(r) = \sum_{k=r}^{n}(-1)^{k-r} C_k^r S_k, \quad r = 0,1,\ldots,n,$$
$$M_r = \sum_{k=r}^{n}(-1)^{k-r} C_{k-1}^{r-1} S_k, \quad r = 0,1,\ldots,n,$$

где

$$S_0 = \sum_{i=1}^{N} w(a_i), \quad S_k = \sum_{1\le i_1<i_2<\ldots i_k\le n} M\left(A_{i_1}A_{i_2}\ldots A_{i_k}\right), \quad k = 1,2,\ldots,n,$$

$M\left(A_{i_1}A_{i_2}\ldots A_{i_k}\right)$ - суммарный вес элементов, обладающих фиксированными свойствами $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k}$.

Для доказательства первого тождества покажем, что в правую часть равенства входят все веса элементов, обладающих r свойствами, и только они.
Веса элементов, обладающих точно r свойствами, учитываются один раз в сумме S_r и не входят в остальные суммы $S_{r+1}, \ldots, S_n$. Веса элементов, обладающих $\mu > r$ свойствами, в сумме S_k, $k > r$, учитываются C_μ^k раз. Поэтому в правую часть доказываемого равенства вес таких элементов входит с коэффициентом:

$$\sum_{k=r}^{n}(-1)^{k-r}C_k^r C_\mu^k = C_\mu^r\sum_{j=0}^{\mu-r}(-1)^j C_{\mu-r}^j = 0.$$

Веса элементов, обладающих $\mu < r$ свойствами, не входят в правую часть доказываемого тождества.

Справедливость второго тождества вытекает из следующего:

$$M_r = \sum_{j=r}^{n} M(j) = \sum_{j=r}^{n}\sum_{k=j}^{n}(-1)^{k-j}C_k^j S_k = \sum_{k=r}^{n} S_k \sum_{j=r}^{k}(-1)^{k-j}C_k^j.$$

Сумма

$$\sum_{j=r}^{k}(-1)^{k-j}C_k^j = \sum_{j=0}^{k-r}(-1)^j C_k^j$$

Есть коэффициент при x^{k-r} в выражении $(1-x)^k(1-x)^{-1}$. С другой стороны, этот коэффициент равен $(-1)^{k-r}C_{k-1}^{k-r}$.

Если $w(a_1) = w(a_2) = \ldots = w(a_N) = 1$, то $M(r)$ представляет собой число элементов, обладающих ровно r свойствами из числа заданных $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Если Ψ_i - множество элементов, обладающих свойством A_i, $i = 1, \ldots, n$, то число элементов, обладающих одновременно свойствами $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k}$, равно $M\left(A_{i_1}A_{i_2}\ldots A_{i_k}\right) = \left|\Psi_{i_1}\bigcap\Psi_{i_2}\bigcap\ldots\bigcap\Psi_{i_k}\right|$.

Кроме того, число элементов, обладающих хотя бы одним из свойств $A_1, A_2, \ldots, A_n$, равно $M_1 = \left|\bigcup_{i=1}^{n}\Psi_i\right|$, таким образом, получается классическая формула включения-исключения.

Неравенства Бонферрони.

Будем предполагать, что элементы коммутативного кольца K, определяющего веса элементов $a_1, a_2, \ldots, a_N$, являются неотрицательными числами. В этом предположении выведем неравенства, которые в ряде случаев упрощают применение метода включения-исключения, так как в пределах допустимой точности позволяют ограничиться подсчетом в знакопеременной сумме $M(r) = \sum_{k=r}^{n}(-1)^{k-r}C_k^r S_k$ лишь нескольких членов.

Для $r+1 \le d \le n$ имеем:

$$M(r) - \sum_{k=r}^{d-1}(-1)^{k-r}C_k^r S_k = (-1)^{d-r}U(d,r),$$

где $U(d,r) = \sum_{k=d}^{n}(-1)^{k-d}C_k^r S_k$.

Сначала выразим величины S_k, $k = 0,1,\ldots,n$ через $M(r)$, $r = 0,1,\ldots,n$:

$$\sum_{r=k}^{n}C_r^k M(r) = \sum_{r=k}^{n}C_r^k\sum_{l=r}^{n}(-1)^{l-r}C_l^r S_l = \sum_{l=k}^{n}S_l\sum_{r=k}^{l}(-1)^{l-r}C_r^k C_l^r.$$

Выражая биноминальные коэффициенты через факториалы, получаем:

$$\sum_{r=k}^{l}(-1)^{l-r}C_r^k C_l^r = C_l^k\sum_{r=k}^{l}(-1)^{l-r}C_{l-k}^{l-r} = C_l^k\sum_{j=0}^{l-k}(-1)^j C_{l-k}^j = \begin{cases}1, & l=k,\\ 0, & l>k.\end{cases}$$

Поэтому получаем:

$$S_k = \sum_{r=k}^{n}C_r^k M(r), \quad k = 0,1,\ldots,n.$$

В силу этого равенства можно переписать:

$$U(d,r)=\sum_{k=d}^{n}(-1)^{k-d}C_k^r S_k=\sum_{k=d}^{n}(-1)^{k-d}C_k^r\sum_{j=k}^{n}C_j^k M(j)=\sum_{j=d}^{n}M(j)\sum_{k=d}^{j}(-1)^{k-d}C_k^r C_j^k.$$

Заметим, что

$$\sum_{k=d}^{j}(-1)^{k-d}C_k^r C_j^k=C_j^r\sum_{k=d}^{j}(-1)^{k-d}C_{j-r}^{k-r}=C_j^r\sum_{l=0}^{j-d}(-1)^{j-l-d}C_{j-r}^{l}$$

При этом $\sum_{l=0}^{j-d}(-1)^{j-l-d}C_{j-r}^{l}$ есть коэффициент при x^{j-d} в разложении $(1+x)^{j-r}(1+x)^{-1}$. С другой стороны, он равен C_{j-r-1}^{j-d}. Поэтому окончательно получаем:

$$U(d,r)=\sum_{j=d}^{n}C_{j-r-1}^{d-r-1}C_j^r M(j)\ge 0.$$

С учетом этого неравенства, получаем:

$$M(r)-\sum_{k=r}^{r+2\nu-1}(-1)^{k-r}C_k^r S_k=(-1)^{2\nu}U(r+2\nu,r)\ge 0,$$

$$M(r)-\sum_{k=r}^{r+2\nu}(-1)^{k-r}C_k^r S_k=(-1)^{2\nu+1}U(r+2\nu+1,r)\le 0.$$

Из этих двух соотношений вытекают так называемые неравенства Бонферрони:

$$\sum_{k=r}^{r+2\nu-1}(-1)^{k-r}C_k^r S_k=(-1)^{2\nu}U(r+2\nu,r)\le M(r)\le\sum_{k=r}^{r+2\nu}(-1)^{k-r}C_k^r S_k=(-1)^{2\nu+1}U(r+2\nu+1,r),$$

где $0\le\nu\le{(n-r)}/{2}$.

Из этих неравенств следует, что, отбрасывая в сумме $M(r)=\sum_{k=r}^{n}(-1)^{k-r}C_k^r S_k$ слагаемые, начиная с некоторого, мы получим погрешность, знак которой совпадает со знаком первого из отброшенных членов, а абсолютная величина погрешности не превосходит абсолютной величины первого из отброшенных членов.

Задача о беспорядках.

Перестановка π элементов множества $\{1,2,\dots,n\}$ называется беспорядком, если $\pi(k)\ne k$ ни при каких $k=1,\dots,n$. Обозначим через d_n число беспорядков на множестве из n элементов.

Чтобы посчитать число беспорядков, введем n свойств перестановок на множестве из n элементов. Свойство c_i состоит в том, что перестановка оставляет на месте элемент i. Число всех перестановок равно $n!$ Число перестановок, удовлетворяющих свойству c_i, равно $(n-1)!$: мы фиксируем i-й элемент, а остальные переставляем произвольно. Число перестановок, удовлетворяющих свойствам c_i и c_j равно $(n-2)!$: два элемента фиксируются, остальные переставляются произвольно. Вообще, число перестановок, удовлетворяющих m фиксированным свойствам, равно $(n-m)!$. Таким образом,

$$d_n=C_n^0 n!-C_n^1(n-1)!+C_n^2(n-2)!-\ldots=n!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}\right).$$

Этой задаче можно придать такую интерпретацию: группа из n фанатов выигрывающей футбольной команды на радостях подбрасывают в воздух свои шляпы. Шляпы возвращаются в случайном порядке – по одной к каждому болельщику. Какова вероятность того, что никому из фанатов не вернется своя шляпа?

Из описанного выше, получаем, что искомая вероятность равна

$$1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}\underset{n\to\infty}{\to}e^{-1}.$$

Общий подход.

Зафиксируем некоторую последовательность $\{\alpha_n\}$. Каждой последовательности $\{a_n\}$ мы можем сопоставить производящую функцию

$$\{a_n\}\mapsto\sum_{n=0}^{\infty}a_n\alpha_n x^n,$$

определяемую последовательностью $\{\alpha_n\}$. Если в последовательность $\{\alpha_n\}$ отсутствуют нулевые элементы, то такое сопоставление однозначно. Если $\alpha_n\equiv 1$, то получаем обычную производящую функцию. Если $\alpha_n=\frac{1}{n!}$ - экспоненциальную производящую функцию.

Операции с обычными производящими функциями уже были описаны выше. Посмотрим на поведение экспоненциальных производящих функций.

Сумма ведет себя обычным образом, а вот произведение иначе:

$$C(x)=A(x)B(x)=\left(\frac{a_0}{0!}+\frac{a_1}{1!}x+\frac{a_2}{2!}x^2+\cdots\right)\left(\frac{b_0}{0!}+\frac{b_1}{1!}x+\frac{b_2}{2!}x^2+\cdots\right)=\frac{c_0}{0!}+\frac{c_1}{1!}x+\frac{c_2}{2!}x^2+\cdots$$

где $c_n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a_k b_{n-k}$ - биномиальная свертка.

Покажем, что экспоненциальная производящая функция для числа беспорядков, есть $D(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d_n}{n!}x^n=\frac{e^{-x}}{1-x}$.

Обозначим, за $d_{n,k}$ - число перестановок на множестве из n элементов, оставляющих на месте ровно k элементов (то есть число неподвижных точек равно k). При таком обозначении $d_{n,0}=d_n$. Более того, $d_{n,k}=C_n^k d_{n-k}$ (C_n^k способами можно выбрать k неподвижных элементов, а остальные $n-k$ образуют беспорядок). Из правила суммы, получаем:

$$n!=\sum_{k=0}^{n}d_{n,k}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k d_{n-k}=\sum_{k=0}^{n}C_n^{n-k}d_{n-k}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k d_k.$$

То есть получилась биномиальная свертка:

$$a_k=d_k,\quad b_k=1,\quad c_k=k!$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d_n}{n!}x^n\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n\Rightarrow$$

$$\frac{1}{1-x}=D(x)e^x$$

Задача. Сколько существует остовных деревьев в полном графе с n вершинами $\{1,2,\ldots,n\}$?

Решение.

Обозначим это число t_n. Полный граф содержит $\frac{n(n-1)}{2}$ ребер, так что по существу ищется число способов соединить n объектов, проведя только $n-1$ ребер.

Выделим одну вершину и посмотрим на те связные компоненты или блоки, на которое разобьется остовное дерево, если проигнорировать все ребра, проходящие через выделенную вершину. Если невыделенные вершины образуют m компонент размеров $k_1, k_2, \ldots, k_m$, то их можно соединить с выделенной вершиной $k_1 k_2 \cdots k_m$ способами.
Такие рассуждения приводят к рекуррентному соотношению

$$t_n = \sum_{m>0} \frac{1}{m!} \sum_{k_1+k_2+\ldots+k_m=n-1} \binom{n-1}{k_1, k_2, \ldots, k_m} k_1 k_2 \cdots k_m \, t_{k_1} t_{k_2} \cdots t_{k_m},$$

при любом $n > 1$. Действительно, имеется $\binom{n-1}{k_1, k_2, \ldots, k_m} = \frac{(n-1)!}{k_1! k_2! \cdots k_m!}$ (полиномиальный коэффициент) способов представить $n-1$ объект в виде последовательности из m компонент размеров, соответственно, $k_1, k_2, \ldots, k_m$; имеется $t_{k_1} t_{k_2} \cdots t_{k_m}$ способов соединить вершины внутри этих компонент какими-то остовными деревьями; имеется $k_1 k_2 \cdots k_m$ способов соединить вершину n с этими компонентами; далее надо разделить на $m!$, так как не должен учитываться порядок компонент.
Теперь обозначим $u_n = n t_n$, тогда рекуррентное соотношение примет следующий вид:

$$\frac{u_n}{n!} = \sum_{m>0} \frac{1}{m!} \sum_{k_1+k_2+\ldots+k_m=n-1} \frac{u_{k_1}}{k_1!} \frac{u_{k_2}}{k_2!} \cdots \frac{u_{k_m}}{k_m!}, \quad n > 1.$$

Обозначим за $U(x)$ ЭПФ для последовательности $\{u_n\}$ (то есть $U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{n!} x^n$). Тогда правая часть полученного соотношения есть коэффициент при x^{n-1} в разложении $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} U^m(x) = e^{U(x)}$ или по-другому, коэффициент при x^n в $xe^{U(x)}$. В то же время, слева - коэффициент при x^n в $U(x)$. Таким образом,

$$U(x) = xe^{U(x)}$$

Заметим, что числа t_n можно интерпретировать, как число помеченных деревьев на n вершинах. Если в дереве выделить одну вершину и назвать ее корнем, то получим корневое помеченное дерево. .Так как выделить в качестве корня среди n помеченных вершин дерева можно n способами, то последовательность чисел u_n есть число помеченных корневых деревьев на n вершинах.
Итак, ЭПФ для числа помеченных корневых деревьев удовлетворяет уравнению Лагранжа

$$U(x) = xe^{U(x)}.$$

Для нахождения явной формулы для этой последовательности, можно воспользоваться следующим уточнением теоремы Лагранжа.
Теорема. *Пусть функции $\varphi = \varphi(x)$ ($\varphi(0) = 0$) и $\psi = \psi(z)$ связаны между собой уравнением Лагранжа*

$$\varphi(x) = x\psi\left(\varphi(x)\right).$$

Тогда коэффициенты при x^n в функции φ равен коэффициенту при z^{n-1} в разложении

$$\frac{1}{n} \psi^n(z).$$

Применяя это утверждение к нашей задаче, получаем: $u_n = n^{n-1}$.
То есть число помеченных корневых деревьев на n вершинах равно n^{n-1} (утверждение Кэли), а число помеченных деревьев равно n^{n-2}. (или для первоначальной формулировки задачи – число остовных деревьев в полном графе с n вершинами $\{1, 2, \ldots, n\}$).

Задача (Парадокс дней рождений).
Сколько студентов (в среднем) должно быть в группе, чтобы нашлось хотя бы двое с одинаковым днями рождения?
Решение.
Пусть дискретная случайная величина X равна числу человек в произвольном классе, в котором нет совпадающих дней рождений.
Распределение случайной величины X:
$P(X>n)=\dfrac{r(r-1)(r-2)\ldots(r-n+1)}{r^n}$, $r=365$ - число дней в году (не високосном)
Введем обозначение коэффициент при z^n в разложении функции $f(z)$ в ряд Тейлора в окрестности нуля: $\left[z^n\right]f(z)$. Тогда $P(X>n)=\dfrac{n!}{r^n}\left[z^n\right](1+z)^r=n!\left[z^n\right]\left(1+\dfrac{z}{r}\right)^r$.
Математическое ожидание случайной величины X:
$$EX=\sum_{n=0}^{\infty}P(X>n)=1+\sum_{n=1}^{r}\frac{r(r-1)(r-2)\ldots(r-n+1)}{r^n}.$$
Для подсчета математического ожидания можно не вычислять значение последней суммы, а обратиться к экспоненциальной производящей функции.
Экспоненциальной производящей функцией (ЭПФ) последовательности $a_0,\ a_1,\ \ldots\ a_n,\ \ldots$ называется формальный степенной ряд
$$A(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}z^n$$
Тогда для последовательности $\left\{a_n=P(X>n)\right\}_{n=0}^{\infty}$ получим ЭПФ $A(z)=\left(1+\dfrac{z}{r}\right)^r$, откуда
$$EX=\sum_{n=0}^{\infty}P(X>n)=\sum_{n=0}^{\infty}n!\left[z^n\right]\left(1+\frac{z}{r}\right)^r=\int_0^{\infty}e^{-t}\left(1+\frac{t}{r}\right)^r dt.$$
В последнем равенстве, мы воспользовались преобразованием Лапласа:
Если $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}f_nz^n$, то $\sum\limits_{n=0}^{\infty}n!\,f_n=\int\limits_0^{\infty}e^{-t}f(t)dt$.

Далее для приближенного вычисления интеграла $\int\limits_0^{\infty}e^{-t}\left(1+\dfrac{t}{r}\right)^r dt=r\int\limits_0^{\infty}e^{r(\ln(1+u)-u)}du$

воспользуемся методом Лапласа:
$$\int_0^{\infty}f(u)e^{rS(u)}du\approx f(u_0)e^{rS(u_0)}\int_{u_0-\delta}^{u_0+\delta}e^{\frac{rS''(u_0)(u-u_0)^2}{2}}du\ \underset{\sqrt{-rS''(u_0)}\delta\to\infty}{\overset{x=\sqrt{-rS''(u_0)}(u-u_0)}{\underset{r\to\infty}{\longrightarrow}}}\ \frac{f(u_0)e^{rS(u_0)}}{\sqrt{-rS''(u_0)}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\frac{f(u_0)e^{rS(u_0)}}{\sqrt{-rS''(u_0)}},$$
где u_0 - единственная точка максимума вещественнозначной функции $S(u)$ на полубесконечном интервале $(0;+\infty)$. Основная идея асимптотического представления интеграла Лапласа заключается в представлении функции $S(u)$ в окрестности точки максимума u_0 в ряд Тейлора.
В нашей задаче $S(u)=\ln(1+u)-u$, $u_0=0$, $f(u)\equiv 1$.

$\int\limits_0^\infty e^{r(\ln(1+u)-u)}du \approx \int\limits_0^\delta e^{-r\frac{u^2}{2}}du \overset{x=\sqrt{r}u}{=} \frac{1}{\sqrt{r}}\int\limits_0^{\sqrt{r}\delta} e^{-\frac{x^2}{2}}dx \approx \frac{1}{\sqrt{r}}\int\limits_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \sqrt{\frac{\pi}{2r}}$. Значит

$$EX = \int\limits_0^\infty e^{-t}\left(1+\frac{t}{r}\right)^r dt = r\int\limits_0^\infty e^{r(\ln(1+u)-u)}du \approx \sqrt{\frac{\pi r}{2}}.$$

Так как $r = 365 \gg 1$, то ответ приблизительно 24,6.

Замечание. На эту задачу можно смотреть, как на отображение $[1..n] \to [1..r]$. Вопрос коллизии дня рождений в терминах отображений будет таким: при каком n отображение будет инъективным.

Задача. Покажите, что распределение случайной величины X из предыдущей задачи имеет асимптотически распределение Релея при $n = t\sqrt{r}$:

$$P\left\{X > t\sqrt{r}\right\} \sim e^{-\frac{t^2}{2}} \quad P\left\{X = t\sqrt{r}\right\} \sim \frac{1}{\sqrt{r}}te^{-\frac{t^2}{2}}$$

Решение.

Для решения задачи воспользуемся знаниями из ТФКП (теорема Коши, седловая точка).

$$P(X > n) = n!\left[z^n\right]\left(1+\frac{z}{r}\right)^r = \frac{1}{n!}\frac{1}{2i\pi}\oint\limits_{|z|=\rho}\left(1+\frac{z}{r}\right)^r\frac{dz}{z^{n+1}}$$

В полярных координатах:

$$\frac{1}{2i\pi}\oint\limits_{|z|=\rho}\left(1+\frac{z}{r}\right)^r\frac{dz}{z^{n+1}} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(1+\frac{\rho e^{i\theta}}{r}\right)^r\frac{d\theta}{\rho^n e^{in\theta}}$$

Перепишем интеграл в таком виде:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{r\ln\left(1+\frac{\rho e^{i\theta}}{r}\right)-n\ln\rho-in\theta}d\theta = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}e^{f(\rho e^{i\theta})}d\theta,$$

$$f(z) = r\ln\left(1+\frac{z}{r}\right)-n\ln z, \quad z=\rho e^{i\theta};$$

Далее, выберем ρ таким, чтобы точка $z = \rho e^{i\theta}\big|_{\theta=0} = \rho$ была седловой точкой. То есть $f'(z)\big|_{z=\rho} = 0,\ f''(z)\big|_{z=\rho} \neq 0$ (простая седловая точка).

Тогда $f(\rho e^{i\theta}) = f(\rho) - \frac{1}{2}\beta(\rho)\theta^2 + O(\theta^3)$ для $|\theta| < \delta$ (разложение Тейлора) (выбор параметра δ будет показан ниже), где $\beta(\rho) = \rho^2\left[\left(\frac{d}{dz}\right)^2 f(z)\right]\Bigg|_{z=\rho}$.

Отсюда интеграл по части окружности $|z| = \rho$ можно представить:

$$\int\limits_{-\delta}^{\delta}e^{f(\rho e^{i\theta})}d\theta = e^{f(\rho)}\int\limits_{-\delta}^{\delta}e^{-\frac{1}{2}\beta(\rho)\theta^2+O(\theta^3)}d\theta = \frac{e^{f(\rho)}}{\sqrt{\beta(\delta)}}\int\limits_{-\delta\sqrt{\beta(\rho)}}^{\delta\sqrt{\beta(\rho)}}e^{-\frac{1}{2}u^2+O(u^3)}du \underset{\beta(\rho)\to\infty}{\to} \frac{e^{f(\rho)}}{\sqrt{\beta(\delta)}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}u^2}du =$$

$$= \sqrt{2\pi}\,\frac{e^{f(\rho)}}{\sqrt{\beta(\delta)}}.$$

Заметим, что здесь важно, что $\beta(\rho) \to \infty$.

Выбор δ должен быть таким, чтоб «хвосты» оставшегося интеграла удовлетворяли:

$$\int_{-\pi}^{-\delta} e^{f(\rho e^{i\theta})}d\theta = o\left(\int_{-\delta}^{\delta} e^{f(\rho e^{i\theta})}d\theta\right);\quad \int_{\delta}^{\pi} e^{f(\rho e^{i\theta})}d\theta = o\left(\int_{-\delta}^{\delta} e^{f(\rho e^{i\theta})}d\theta\right);$$

Тогда будет справедливо асимптотическое приближение исходного интеграла:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{f(\rho e^{i\theta})}d\theta \approx \frac{e^{f(\rho)}}{\sqrt{2\pi\beta(\rho)}}.$$

В нашей задаче уравнение на седловую точку принимает вид:

$$f'(z)\big|_{z=\rho} = 0,\ f(z) = r\ln\left(1+\frac{z}{r}\right) - n\ln z \Rightarrow \frac{r}{r+\rho} = \frac{n}{\rho} \Rightarrow \rho = \frac{nr}{r-n} = \frac{tr}{\sqrt{r}-t}.$$

Далее

$$\beta(\rho) = \rho^2\left[\left(\frac{d}{dz}\right)^2 f(z)\right]\Bigg|_{z=\rho} = n\left(1-\frac{n}{r}\right) \overset{n=t\sqrt{r}}{=} t\sqrt{r}\left(1-\frac{t}{\sqrt{r}}\right) = t\sqrt{r}-t^2 \underset{r\to\infty}{\to} \infty$$

$$e^{f(\rho)} = e^{-n\ln n-(r-n)\ln\left(1-\frac{n}{r}\right)} = \frac{1}{n^n}\left(1-\frac{n}{r}\right)^{-(r-n)} = \frac{1}{n^n}\left(1-\frac{n}{r}\right)^{-\frac{r}{n}\left(n-\frac{n^2}{r}\right)} \approx \frac{e^{n-\frac{n^2}{r}}}{n^n} = \left(\frac{e}{n}\right)^n e^{-\frac{n^2}{r}}$$

$$n!\frac{e^{f(\rho)}}{\sqrt{2\pi\beta(\rho)}} = n!\left(\frac{e}{n}\right)^n e^{-\frac{n^2}{r}}\frac{1}{\sqrt{2\pi n\left(1-\frac{n}{r}\right)}} \approx \cancel{n!\frac{1}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}}\, e^{-\frac{n^2}{r}}\frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{n}{r}\right)}} \overset{n=t\sqrt{r}}{=} e^{-\frac{t^2}{2}}\frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{t}{\sqrt{r}}\right)}} \xrightarrow[r\gg 1]{} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

То есть $P\left\{X > t\sqrt{r}\right\} \sim e^{-\frac{t^2}{2}}$.

Соответственно

$$P\left\{X = t\sqrt{r}\right\} = t\sqrt{r}\,\frac{dP\{X<x\}}{dx}\Bigg|_{x=t\sqrt{r}} \sim -t\sqrt{r}\,\frac{de^{-\frac{x^2}{2r}}}{dx}\Bigg|_{x=t\sqrt{r}} = t\sqrt{r}\left(\frac{x}{r}e^{-\frac{x^2}{2r}}\right)\Bigg|_{x=t\sqrt{r}} = \frac{1}{\sqrt{r}}te^{-\frac{t^2}{2}}$$

Задача («двойственная» задача относительно парадокса дня рождений) Сколько в среднем должно быть студентов на потоке, чтобы каждый день в течение всего года находился хотя бы один студент, празднующий в этот день свой день рождения. (или в терминах отображения $[1..n]\to[1..r]$, при каком n отображение будет сюръективным.)
Ответ: 2365

Задача (со ссылкой на задачу про заключеных и задачу Вершика о подсчете среднего числа циклов длины r, см. задачи к семинару Стохастический анализ в задачах).
1) Доказать, что среднее число циклов в случайной перестановке длины n, имеющих длину от $\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil$ до n рано $\sum_{r=\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil}^{n}\frac{1}{r}\underset{n\to\infty}{\to}\ln 2$.

2) Доказать, что вероятность того, что в случайной перестановке из n элементов есть только циклы длины от $\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil$ до n рано $\sum_{r=\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil}^{n}\frac{1}{r}\underset{n\to\infty}{\to}\ln 2$.