Случайные процессы (871, 873, 874 - 876 группы ФУПМ)
2-ое задание
Основные задачи
43, 47, 48, 52 - 54, 56, 59 - 63
Дополнительные задачи
(необходимо решить не менее 10 задач; задачи, номера которых выделены желтым цветом, являются обязательными – должны входить в список восьми (или более) выбранных задач)

Срок сдачи задания 13 мая

д.м.ц. – дискретная марковская цепь
с.в. – случайная величина
i.i.d. - независимые одинаково распределённые с.в.

Задача* 1. *а) Пусть X_n - д.м.ц. с тремя возможными состояниями $X_n \in \{1,2,3\}$ и матрицей переходных вероятностей $P\left(X_{n+1}=j \middle| X_n=i\right)=p_{ij}>0$. Рассмотрим последовательность $Y_n=\begin{cases} X_n, & X_n=1 \\ 2, & X_n \neq 1 \end{cases}$. Показать, что последовательность Y_n может не обладать марковским свойством.

б) Пусть X_n - д.м.ц.. Верно ли, что тогда $Y_n=\{X_n\}$, где $\{x\}=x-[x]$ - дробная часть числа, тоже является д.м.ц.?

Задача 2 **(принцип сжимающих отображений и фокусирующие операторы[1]).**

а) Покажите, что если ограниченный оператор (вообще говоря, нелинейный) A действует в полном метрическом пространстве X и

$$\exists\ k \in \mathbb{N}:\ \forall\ x,y \in X \to \rho\left(A^k(x),A^k(y)\right) \le \theta\rho(x,y),\ \theta \in (0,1), \text{ то}$$

$$\exists!\ x^* \in X:\ A\left(x^*\right)=x^* \text{ и } \forall\ x \in X \to \rho\left(A^n(x),x^*\right)=\mathrm{O}\left(\theta^{n/k}\right).$$

б) Пусть $X=\mathrm{P}\mathbb{R}^n_{++}$ - множество лучей пространства $\mathbb{R}^n$, лежащих во внутренности неотрицательного ортанта, на котором введена метрика Дж. Биркгофа:

$$\rho(x,y)=\ln\min\left\{\frac{\beta}{\alpha}:\quad \alpha x \le y \le \beta x\right\}=\ln\min_{j,k=1,\ldots,n}\frac{x_j y_k}{x_k y_j}.$$

Покажите, что X - полное метрическое пространство. Покажите, что если линейный оператор $A:\quad X \to X$ ($A=\left\|a_{ij}\right\|_{i,j=1}^n$ - матрица $n\times n$) положительный, т.е.

$$\forall\ i,j=1,\ldots,n \to a_{ij}>0, \text{ то}$$

$$\exists\ \theta \in (0,1):\ \forall\ x,y \in X \to \rho(Ax,Ay) \le \theta\rho(x,y).$$

Задача 3 **(стохастический вариант теоремы Фробениуса – Перрона или эргодическая теорема для конечных однородных д.м.ц. [1, Т. 2, глава VIII, § 5, § 7], [2, стр. 126-130], см. также задачу 2).** Равносильны ли следующие условия для стохастической матрицы $n\times n$ P:

1) $\exists\ m_0 \in \mathbb{N}:\ P^{m_0}=\left\|p_{ij}(m_0)\right\|_{i,j=1}^n>0$, т.е. $\forall\ i,j=1,\ldots,n \to p_{ij}(m_0)>0$;

[1] Красносельский М.А., Лифшиц Е.А., Соболев А.В. Позитивные линейные системы. Метод положительных операторов, М.: Наука, 1985.

2) P - эргодическая матрица, т.е.

$$\exists\ \vec{p}^* > \vec{0}:\ \lim_{m\to\infty} P^m = \big[\underbrace{\vec{p}^*, \vec{p}^*, ..., \vec{p}^*}_{n}\big]^T;$$

причём $\vec{p}^*$ - является единственным решением системы: $\vec{p}^{*T} = \vec{p}^{*T} P,\ \sum_{k=1}^{n} p_k^* = 1$?[2]

Задача 4 **(о скорости сходимости в стохастическом варианте теоремы Фробениуса - Перрона).** Для конечной однородной эргодической д.м.ц. спектральный радиус матрицы переходных вероятностей P равен максимальному собственному значению (кратность которого равна одному) $\rho(P) = \lambda_1 = 1$.[3] Также известно, что

$$\left\| \vec{p}(n) - \vec{p}^* \right\| = \mathrm{O}\left(|\lambda_2|^n \right),$$

где λ_2 - следующее по модулю (после $\lambda_1 = 1$) собственное значение матрицы P. Предложите другие (менее точные, но более простые с точки зрения объёма вычислений) способы оценки скорости сходимости в эргодической теореме для конечных однородных д.м.ц. (см., например, доказательство эргодической теоремы для д.м.ц. в [2, стр. 126-130] или [5, глава VI, § 13], см. также [8, п. 1.13, 1.14] и задачу 19 ниже)[4].

Задача 5 **([1, ч. 2, глава VIII, § 5], [2, стр. 111-122]).** ***а)*** Расставьте, где нужно, стрелки импликации (что из чего следует)? Должно быть ровно две стрелки.

Возвратное состояние	Нулевое состояние
Невозвратное состояние	Ненулевое состояние

---

[2] Заметим, что из вида матрицы $\lim_{m\to\infty} P^m$ следует, что $\forall\ \vec{p}(1) \to \lim_{m\to\infty} \vec{p}(m) = \lim_{m\to\infty} \vec{p}^T(1) P^m = \vec{p}^*$. Это условие означает равенство финального распределения ($\lim_{m\to\infty} \vec{p}(m)$) стационарному $\vec{p}^*$ ($\vec{p}^{*T} = \vec{p}^{*T} P$), вне зависимости от начального распределения $\vec{p}(1)$. Заметим также, что условия 1), 2) равносильны следующим требованиям: конечная однородная д.м.ц. с матрицей переходных вероятностей P - неразложимая и непериодическая. Если убрать условие непериодичности, то [1, Т. 2, глава VIII, § 3, § 5]

$$\exists\ \vec{p}^* > \vec{0}:\ \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{m=1}^{N} P^m = \big[\underbrace{\vec{p}^*, \vec{p}^*, ..., \vec{p}^*}_{n}\big]^T;$$

причём $\vec{p}^*$ - является единственным решением системы: $\vec{p}^{*T} = \vec{p}^{*T} P,\ \sum_{k=1}^{n} p_k^* = 1$.

[3] Приведённый результат имеет достаточно простое следствие: на симплексе (точнее даже на гиперплоскости, содержащей этот симплекс)

$$S_n = \left\{ \vec{p} \in \mathbb{R}^n:\ \sum_{k=1}^{n} p_k = 1,\ \ p_k \ge 0 \right\}$$

по любому маленькому $\varepsilon > 0$ можно ввести такую норму (напомним, что в конечномерных пространствах все нормы эквивалентны, поэтому достаточно рассмотрение какой либо одной нормы), что линейный оператор P - является оператором сжатия в этой норме с коэффициентом сжатия $\theta = \lambda_2 + \varepsilon < 1$.

[4] Упомянем здесь также оценку Добрушина (см., например, Веретенников А.Ю. Параметрическое и непараметрическое оценивание для цепей Маркова. М.: Изд-во ЦПИ при механико–математическом факультете МГУ, 2000). Обратим внимание, что в книге А.Ю. Веретенникова, также как и в книге [8], дается доказательство эргодической теоремы для марковских процессов, основанное на каплинге – приеме с которым полезно познакомиться.

Приведите пример возвратного нулевого состояния (см. задачу 11).

б) Найдите математическое ожидание времени первого возвращения в **i**-ое состояние конечной однородной эргодической д.м.ц..

в) Может ли математическое ожидание времени первого возвращения в возвратное состояние однородной д.м.ц. с счётным числом состояний равняться бесконечности? А в случае д.м.ц. с конечным числом состояний?

Задача 6 **(см. [1, Т. 2, глава VIII, § 5], [2, стр. п. 3.2]).** Дана однородная д.м.ц., которая может находиться в 3-ёх состояниях. Вероятность перейти за один шаг из состояния 1 в состояние 2 равна 2/3, а в состояние 3 - 0. Вероятность перейти за один шаг из состояния 2 в состояние 1 равна 1/2, а в состояние 3 – 1/2. Вероятность перейти за один шаг из состояния 3 в состояние 1 равна 2/3, а в состояние 2 – 1/3.

1. Выписать матрицу переходных вероятностей за один шаг.
2. Нарисовать граф, соответствующий этой матрице переходных вероятностей.
3. Классифицируйте состояния цепи (сообщающиеся, существенные, нулевые, возвратные, периодические, эргодические).
4. Если цепь эргодическая, то найдите предельное распределение вероятностей.
5. Как, зная предельное распределение, определить элементы матрицы $\lim\limits_{n\to\infty} P^n$?
6. Оценить, пользуясь эргодической теоремой для однородных д.м.ц. с конечным числом состояний, скорость сходимости $\lim\limits_{n\to\infty} P^n$ (имеется ввиду оценить сверху основание геометрической прогрессии – ведь именно со скоростью геометрической прогрессии P^n сходится к $\tilde{P} = \lim\limits_{n\to\infty} P^n$).
7. Найдите математическое ожидание относительного времени нахождения цепи в состояниях: а) 1; б) 2; в) 3, считая, что $\vec{p}^T(0) = (1/4, \quad 1/2, \quad 1/4)$.

К задачам 7 – 10 можно рекомендовать [1, Т. 2, глава VIII, § 5, § 6], [5, глава VI, § 13, § 14]. Заметим также, что общие эргодические теоремы для марковских процессов (время, вообще говоря, течёт непрерывно, пространство состояний, вообще говоря, имеет континуальную мощность) имеются в монографии Боровков А.А. Эргодичность и устойчивость случайных процессов, М.: УРСС, 1999.

Задача 7. Решите предыдущую задачу, если матрица переходных вероятностей за один шаг имеет вид

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Задача 8. Дана однородная д.м.ц., которая может находиться в 5-и состояниях, с матрицей переходных вероятностей за один шаг

$$P = \begin{pmatrix} 1/8 & 1/4 & 1/8 & 3/8 & 1/8 \\ 0 & 1/4 & 0 & 0 & 3/4 \\ 0 & 0 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Нарисовать граф, соответствующий этой матрице переходных вероятностей. Классифицируйте состояния цепи (сообщающиеся, существенные, нулевые, возвратные, периодические, эргодические). Существует ли предел $\tilde{P} = \lim\limits_{m\to\infty} P^m$. Если существует, то найдите $\vec{p}^{\,T}(0)\tilde{P}$, где $p_3(0)+p_4(0)=1/3$, $p_2(0)+p_5(0)=1/4$.

Задача 9 **(конечное, но большое число состояний).** Дана однородная д.м.ц., которая может находиться в n состояниях, с матрицей переходных вероятностей за один шаг

$$P = \left.\underbrace{\begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ 1/2 & 1/2 & 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 & 0 \ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots 0 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}}_{n}\right\} n\,?$$

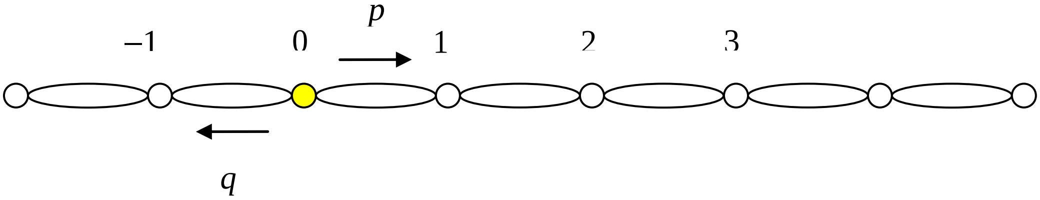
Нарисовать граф, соответствующий этой матрице переходных вероятностей. Классифицируйте состояния цепи (сообщающиеся, существенные, нулевые, возвратные, периодические, эргодические). Если цепь эргодическая, то найдите предельное распределение вероятностей. Существует ли предел $\tilde{P} = \lim\limits_{n\to\infty} P^n$? Если существует, то найдите его.

Задача 10 **(счётное число состояний).** Дана однородная д.м.ц. со счётным числом состояний и матрицей переходных вероятностей за один шаг

$$P = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ 1/2 & 1/2 & 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 0 & \ldots\ldots\ldots \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 & 0 \ \ldots \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \end{pmatrix}.$$

Нарисовать граф, соответствующий этой матрице переходных вероятностей. Классифицируйте состояния цепи (сообщающиеся, существенные, нулевые, периодические, эргодические). Если цепь эргодическая, то найдите предельное распределение вероятностей. Существует ли предел $\tilde{P} = \lim\limits_{n\to\infty} P^n$. Если существует, то найдите его.

Задача 11 **(случайное блуждание на прямой[5] [1, Т. 2, глава VIII, § 8]).** Дать классификацию состояний однородной д.м.ц. со счётным числом состояний, граф которой схематически изображён ниже.



[5] Заметим, что нулевое состояние симметричного случайного блуждания на плоскости, также как и на прямой, возвратно. В пространстве размерности 3 и выше – невозвратно. Также интересно заметить, что "с помощью случайных блужданий" можно численно решать задачу Дирихле для уравнения Лапласа (и других полуэллиптических уравнений), см., например, Сосинский А.Б. Мыльные плёнки и случайные блуждания, М.: МЦНМО, Библиотека "Математическое просвещение", вып. 6, 2000 (http://www.mccme.ru/mmmf-lectures/books/books/book.6.pdf). Более подробно см., в [6, глава 9].

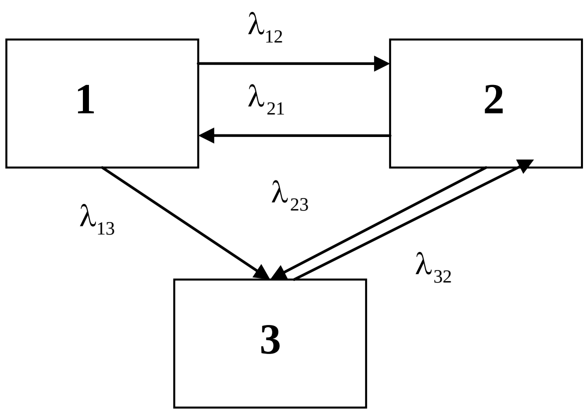
Когда (при каких $p \geq 0$, $q = 1 - p \geq 0$) состояние 0 возвратно? Найдите математическое ожидание времени возвращения в это состояние.

Задача 12 **(см. [3, глава 10, § 53 - § 55], [2, стр. 72, стр. 162-163]).** ***а)*** Является ли пуассоновский процесс марковским? А винеровский?

б) Написать прямое и обратное уравнение Колмогорова – Фёллера для пуассоновского процесса.

в) Написать прямое и обратное уравнение Колмогорова – Фоккера – Планка для винеровского процесса.

Задача 13 **(СМО[6] [5, глава VI, § 13 - § 19], [2, п. 3.3 (стр. 147)]).** Система **S** представляет собой техническое устройство (ТУ), которое может находиться в трёх состояниях. На приведённой ниже схеме λ_{ij} - означает интенсивность пуассоновского потока событий, переводящего систему из состояния **i** в состояние **j**.



1. Выписать уравнение Колмогорова (Колмогорова – Фёллера) для вероятностей состояний $\vec{p}^T(t) = \left(p_1(t),\quad p_2(t),\quad p_3(t)\right)$.
2. Найдите $\lim\limits_{t\to\infty} \vec{p}^T(t)$, если $\lambda_{12} = \lambda_{23} = \lambda_{32} = 1$, $\lambda_{13} = \lambda_{21} \equiv 2$.

Задача 14 **(см. [3, глава 10, § 55]).** В момент времени $t = 0$ имеется N радиоактивных атомов. Вероятность распада атома в промежутке времени $(t, t + \Delta t)$ равна $aN(t)\Delta t + o(\Delta t)$, где $a > 0$, $N(t)$ - число атомов, не распавшихся до момента времени t. Найдите вероятность того, что за время от t до τ произойдёт n распадов. Предполагается, что продукты распада атома сами не распадаются и не воздействуют на не распавшиеся атомы.

Задача 15 **(см. [3, глава 10, § 54]).** Решите уравнения Колмогорова – Фоккера – Планка (прямое и обратное) в случае, когда

$$f(\tau, y \mid t, x) = f(\tau, t; y - x).$$

Физически это означает, что процесс протекает однородно в пространстве.

---

[6] Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теории массового обслуживания, М.: УРСС, 2005.

Задача 16 **(ветвящийся процесс[7] [4, § 10]).** В колонию зайцев внесли зайца с необычным геном. Обозначим через p_k - вероятность того, что в потомстве этого зайца ровно k зайчат унаследуют этот ген ($k = 0,1,2,...$). Это же распределение вероятностей характеризует всех последующих потомков, унаследовавших необычный ген. Будем считать, что каждый заяц дает потомство один раз в жизни в возрасте одного года (как раз в этом возрасте находился самый первый заяц с необычным геном в момент попадания в колонию).

Обозначим через $G(z)$ - производящую функцию распределения p_k, $k = 0,1,2,...$, т.е. $G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k$. Пусть X_n - количество зайцев в возрасте одного года с необычным геном спустя n лет после попадания в колонию первого такого зайца. Производящую функцию с.в. X_n обозначим $\Pi_n(z) = M\left(z^{X_n}\right)$.

1) Получите уравнение, связывающее $\Pi_{n+1}(z)$ с $\Pi_n(z)$ посредством $G(z)$.

Указание. Покажите, что $M\left(z^{X_{n+1}} \middle| X_n\right) = \left[G(z)\right]^{X_n}$. Затем возьмите математическое ожидание от обеих частей равенства.

2) Покажите, что вероятность вырождения гена $q_n = P(X_k = 0; k \geq n) = \Pi_n(0)$. Существует ли предел $q = \lim_{n\to\infty} q_n$? Если существует, то найдите его.

Указание. Легко видеть, что функция $G(z)$ - выпуклая. Уравнение $z = G(z)$ имеет два корня: один в любом случае равен 1, другой $q \leq 1$. Если $\nu = G'(1) > 1$, то $q < 1$. Если $\nu \leq 1$, то $q = 1$.

Задача 17 **(задача о разборчивой невесте, предложенная Мартином Гарднером (~1957), и решённая Е.Б. Дынкиным (~1965)[8] [1, Т. 2, глава VIII, § 9], [4, § 11], [6, глава 10]).** В аудитории находится невеста, которая хочет выбрать себе жениха. За дверью выстроилась очередь из $N \gg 1$ женихов. Относительно любых двух женихов невеста может сделать вывод, какой из них для неё предпочтительнее. Таким образом, невеста задает на множестве женихов отношение порядка (естественно считать, что если A предпочтительнее B, а B предпочтительнее C, то A предпочтительнее C). Предположим, что все $N!$ вариантов очередей равновероятны и невеста об этом знает (равно, как и число N). Женихи запускаются в аудиторию по очереди. Невеста видит каждого из них в первый раз! Если на каком-то женихе невеста остановится (сделает свой выбор), то оставшаяся очередь расходиться. Невеста хочет выбрать наилучшего жениха (исследуя k–го по очереди жениха, невеста лишь может сравнить его со всеми предыдущими, которых она уже просмотрела и пропустила). Найдите оптимальную (в смысле максимизации вероятности выбора наилучшего жениха) стратегию невесты. Оцените (при $N \to \infty$) вероятность того, что невесте удастся выбрать наилучшего жениха, если она придерживается следующей стратегии: просмотреть (пропустить) первых по очереди $\lfloor N/e \rfloor$ кандидатов и затем выбрать первого кандидата, который лучше всех предыдущих (впрочем, такого кандидата может и не оказаться, тогда, очевидно, невеста не смогла выбрать наилучшего жениха).

---

[7] Афанасьев В.И. Случайные блуждания и ветвящиеся процессы, М.: МИАН, Лекционные курсы НОЦ, вып. 6, 2008; Ватутин В.А. Ветвящиеся процессы и их применение, М.: МИАН, Лекционные курсы НОЦ, вып. 8, 2008 (http://www.mi.ras.ru/index.php?c=lectures).

[8] См. Гусейн-Заде С.М. Разборчивая невеста, М.: МЦНМО, Библиотека “Математическое просвещение”, вып. 25, 2003 http://www.mccme.ru/mmmf-lectures/books/books/book.25.pdf).
Видео - http://www.mathnet.ru/php/presentation.phtml?option_lang=rus&presentid=46

Задача 18 **(мартингалы[9] и теорема о баллотировке [1, Т. 1, стр. 133-144]).** Пусть $S_n = \xi_1 + ... + \xi_n$, где $\{\xi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ - i.i.d., причём[10] $\xi_k = \begin{cases} 1, & p = 1/2 \\ -1, & p = 1/2 \end{cases}$. Покажите, что тогда

$$P\left(S_1 > 0,...,S_n > 0 \middle| S_n = a-b\right) = \frac{a-b}{a+b}, \text{ где } a > b \text{ и } a+b = n.$$

Задача 19 **(кинетика социального неравенства [7, приложение на стр. 225-246]).** В некотором городе живет $N \gg 1$ (например, 10 000) пронумерованных жителей. У каждого i-го жителя есть в начальный (нулевой) момент времени целое (неотрицательное) количество рублей $s_i(0)$ (монетками, достоинством в один рубль). Со временем пронумерованные жители (количество которых не изменяется, также как и суммарное количество рублей) случайно разыгрывают свое имущество. В каждый момент времени $t = 1,2,3,...$ случайно и независимо от предыстории выбираются два жителя: с вероятностью $1/2$ житель с большим номером отдаёт 1 рубль (если, конечно, он не банкрот) жителю с меньшим номером, и с вероятностью $1/2$ наоборот. Приблизительно такую постановку задачи в конце 18-го века предложил известный итальянский экономист Вильфредо Парето, чтобы объяснить социальное неравенство.

Пусть $c_s(t)$ - доля жителей города, имеющих ровно s рублей в момент времени t (заметим, что $c_s(t)$ - случайная величина). Пусть

$$S = \sum_{i=1}^{N} s_i(0),\ \bar{s} = \frac{S}{N}.$$

а) Покажите, что тогда по эргодической теореме для конечных однородных марковских цепей:[11]

$$\forall\ q = 0,...,S\ \exists\ \lambda_q > 0,\ T_q = \mathrm{O}\left(N^2\right):\ \forall\, t \ge T_q$$

$$P\left(\left|\frac{c_s(t)}{Ce^{-s/\bar{s}}} - 1\right| \le \frac{\lambda_q}{\sqrt{N}},\ s = 0,...,q\right) \ge 0.999,\quad (*)$$

где C определяется из условия нормировки:

$$\sum_{s=0}^{S} Ce^{-s/\bar{s}} = 1, \text{ т.е. } C \approx \frac{1}{\bar{s}}.$$

---

[9] Мартингалы уже встречались нам в задачах, пришедших из финансовой математики (см. задание 1). Важным свойством мартингалов является теорема Дж. Дуба [1, Т. 2, глава VII, § 2], и следствия из неё [1, Т. 2, глава VII, § 2, § 3, § 4]: тождество Вальда, мартингальные неравенства (базирующиеся также на неравенстве Чебышёва), теоремы о сходимости мартингалов (субмартингалов). Эти следствия играют важную роль в различных приложениях. Например, в страховании (теорема Крамера – Лундберга [1, Т. 2, глава VII, § 10]), в асимптотической комбинаторике (Алон Н., Спенсер Дж. Вероятностный метод, М.: Бином, 2006, глава 7), в численных методах оптимизации (Поляк Б.Т. Введение в оптимизацию, М.: Наука, 1983, глава 2, § 2).

[10] $\xi_k = 1$ будем интерпретировать как голос, поданный на выборах за кандидата **A**, $\xi_k = -1$ - за кандидата **B.** Тогда S_n есть разность числа голосов, поданных за кандидатов **A** и **B**, если в голосовании приняло участие n избирателей, а $P\left(S_1 > 0,...,S_n > 0 \middle| S_n = a-b\right)$ есть вероятность того, что кандидат **A** все время был впереди кандидата **B**, при условии, что **A** в общей сложности собрал a голосов, а **B** собрал b голосов и $a > b$, $a + b = n$.

[11] Эргодическая теорема используется для нахождения распределения случайных величин $c_s(t)$ на больших временах. Далее используются законы больших чисел или, другими словами, явление концентрации инвариантной (стационарной) меры. Точнее не само это явление, а его следствие о том, что “хорошие” (например, липшицевы) функции на “хороших” компактных пространствах с мерой большого числа измерений почти везде близки к медиане.

б) Постарайтесь точно оценить зависимость $T_q(N)$, исходя из результатов численных экспериментов и обзоров http://www.yann-ollivier.org/rech/publs/surveycurvmarkov.pdf, http://www.ams.org/journals/bull/2009-46-02/S0273-0979-08-01238-X/S0273-0979-08-01238-X.pdf (кто решит этот пункт, будет иметь определенные привилегии на сдаче задания). Также полезными могут оказаться п. 1.13, 1.14 (неравенства Пуанкаре и Чиггера) из очень хорошей книги по марковским процессам [8].

Скорость сходимости оценивается сверху исходя из оценок в доказательстве эргодической теоремы для однородных марковских цепей с конечным числом состояний.[12] Как показывают численные эксперименты оценка $\mathrm{O}(N^2)$ - точная. Так если в городе 10 000 жителей и за один день происходит в среднем около 5 000 обменов, то при начальном “социальном равенстве” с вероятностью близкой к единице через 20 – 30 лет установится “социальное неравенство”. Заметим, что описанный выше случайный процесс обратим во времени. Однако наблюдается необратимая динамика $c_s(t)$. Но в таком случае можно удивляться также и тому, что газ, собранный в начальный момент в одной половине сосуда, с течением времени равномерно распределится по сосуду.

Замечание. Приведем отчасти схожую постановку задачи (та же самая мера будет концентрироваться), восходящую к В.П. Маслову. Ниже приведен фрагмент его интервью 2009 года, посвященного объяснению финансового кризиса 2008 г.

В.П. Маслов: *Поясню на знаменитом трюке Коровьева-Фагота - помните булгаковского героя, который разбрасывал в варьете червонцы? Понятно, что кому-то досталось больше купюр, кому-то меньше, а кто-то вообще остался ни с чем. Вопрос: если купюр миллион, то сколько должно быть зрителей, чтобы ни один не остался без банкноты? Вроде очень неопределенная задача, не имеющая однозначного решения. И, тем не менее, ответ есть: примерно квадратный корень из миллиона, то есть тысяча зрителей.*

Точнее говоря, как следует из выше написанного, с вероятностью близкой к 1 доля банкротов будет равна примерно $1/\bar{s} \sim 0.001$, поскольку по условию $\bar{s}N = S = 10^6$ и $N \sim \sqrt{S}$. Поэтому количество банкротов с вероятностью близкой к 1 незначительно отличается от $N/\bar{s} \sim 1$.

Задача 20 **(модель Эренфестов, описывающая обмен теплом между двумя телам, находящимися в контакте и изолированными от окружающей среды либо описывающая диффузионный процесс – перемещение молекул газа и камеры А в камеру В и наоборот через малое отверстие в мембране, соединяющей эти камеры [1, Т. 2, глава 8, § 8, стр. 853]).** Пусть множество состояний $\{0,1,\ldots,.2k\}$, при этом состояние i интер-

---

[12] Необходимо оценить второе по величине модуля собственное значения матрицы переходных вероятностей – инфинитезимальной матрицы (первое собственное значение, которое для неотрицательных матриц часто называют *числом Фробениуса – Перрона*, равно единице, поскольку матрица стохастическая – все элементы неотрицательны и сумма всех элементов в любой строке равна единице), определяющего основание геометрической прогрессии, мажорируемой последовательность норм отклонений текущего состояния от стационарного в различные моменты времени. Здесь нельзя не упомянуть о том, что в этом направлении за последние несколько десятков лет произошла определенная революция, которую можно пояснить рассмотренной задачей (Кинетика социального неравенства). Несложно проверить, что число (макро-) состояний марковской цепи в этом примере, растет быстрее, чем экспоненциально с ростом N. В то время, как по прошествии всего лишь $\mathrm{O}(N^2)$ тактов распределение цепи будет уже довольно близко к финальному (предельному) = стационарному (инвариантному). Таким образом если возникает потребность быстро сгенерировать дискретные случайные величины, которые могут принимать огромное число значений, то в ряде случаев удается подобрать такую марковскую цепь, которая быстро “выйдет” на стационарный режим, соответствующий желаемому распределению. Несколько интересных примеров в этом направлении (модель Изинга и др.) собрано, например, в современном курсе марковских случайных процессов. Заметим, что при оценках второго по величине модуля собственного значения активно используется уже упоминавшийся принцип концентрации меры.

претируется как состояние: «в камере А находится i молекул». Переходные вероятности задаются:

$$p_{01}=1,$$
$$p_{2k(2k-1)}=1.$$
$$p_{ij}=\begin{cases}1-\dfrac{i}{2k}, \; j=i+1;\\ \dfrac{i}{2k}, \; j=i-1.\end{cases}$$

То есть перемещение из одной камеры в другую происходит следующим образом: случайным образом (с вероятность $1/2k$) выбирается молекула и переводится в другую камеру. Причем на каждом шаге выбор молекулы для перемещения происходит независимо от предыстории. Докажите, что стационарное распределение $(q_0,...,q_{2k})$ для д.м.ц., описывающей эту модель, задается формулой $q_i=C_{2k}^i 2^{-2k}, \quad i=0,...,2k$. Сравните этот результат с интуицией: какое наиболее вероятное состояние = равновесие (на нем достигается максимальное значение q_i)? Что можно сказать о возвратности состояний д.м.ц.? Постарайтесь понять связь этой задачи с задачей 19.

Обозначим

$$\tau(i)=\inf\{n\ge 0: X_n=i\}, \quad \sigma(i)=\inf\{n>0: X_n=i\}.$$

Времена первого попадания и первого возвращения в состояние i, если $X_0=i$. Покажите, что

а) $E_i\sigma(i)=2^{2k}\dfrac{i!(2k-i)!}{(2k)!}$, и, в частности, среднее время возвращения в нулевое состояние $E_0\sigma(0)=2^{2k}$ (где $E_i\sigma(i)$ – математическое ожидание времени первого возвращения в состояние i, если $X_0=i$);

б) $E_k\tau(0)=\dfrac{1}{2k}2^{2k}\left(1+O(k)\right)$ (где $E_k\tau(0)$ – математическое ожидание времени первого попадания в состояние 0, если $X_0=k$);

в) $E_0\tau(k)=k\ln k+k+O(1)$ (где $E_0\tau(k)$ – математическое ожидание времени первого попадания в состояние 0, если $X_0=0$).

На примере этой модели можно говорить о том, что в стохастических системах возврат к состояниям макроскопического неравновесия вполне допустим, но происходить это может только через очень большое время (циклы Пуанкаре), так что нам может не хватить отведенного времени, чтобы это заметить.

Задача 21 **(парадокс времени ожидания [9, стр. 169-174]).** Автобусы прибывают на остановку в соответствии с пуассоновским процессом с параметром $\lambda>0$. Вы приходите на остановку в фиксированный момент времени (скажем, в полдень). Каково математическое ожидание времени, в течение которого Вы ждёте автобуса?

Задача 22 **(замкнутая сеть, теорема Гордона–Ньюэлла, 1967 [7, приложение на стр. 270-287]).** Рассматривается транспортная сеть, в которой между N станциями курсируют M такси. Клиенты пребывают в *i*-й узел в соответствии с пуассоновским потоком с параметром $\lambda_i>0$ ($i=1,...,N$). Если в момент прибытия в *i*-й узел там есть такси, клиент забирает его и с вероятностью $p_{ij}\ge 0$ направляется в *j*-й узел, по прибытии в который покидает сеть. Такси остается ждать в узле прибытия нового клиента. Времена перемещений из узла в узел – независимые случайные величины, имеющие показательное распределение с параметром $\nu_{ij} > 0$ для пары узлов (i, j). Если в момент прихода клиента в узел там нет такси, клиент сразу покидает узел. Считая $p_{ij} = N^{-1}$, $\lambda_i = \lambda$, $\nu_{ij} = \nu$, покажите, что вероятность того, что клиент, поступившей в узел (в установившемся (стационарном) режиме работы сети), получит отказ, равна

$$p_{\text{отказа}}(N, M) = \sum_{k=0}^{M} \frac{C_{N-2+k}^{k} \rho^{M-k}}{(M-k)!} \Bigg/ \sum_{k=0}^{M} \frac{C_{N-1+k}^{k} \rho^{M-k}}{(M-k)!}, \ \rho = N\lambda/\nu .$$

Методом перевала покажите справедливость следующей асимптотики при $N \to \infty$:

$$p_{\text{отказа}}(N, rN) = 1 - \frac{2r}{\lambda/\nu + r + 1 + \sqrt{(\lambda/\nu + r + 1)^2 - 4\lambda r/\nu}} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{N}\right).$$

Метод перевала – очень полезный инструмент исследования асимптотик интегралов по параметру. Его подробное изложение имеется, например, здесь:

Федорюк М. В. Метод перевала. М.: УРСС, 2010.

Кто решит эту задачу, будет иметь определенные привилегии на сдаче задания.

Задача 23 **[4, стр.84 и далее].** На письменном столе лежит стопка из m книг. Если обозначить каждую книгу соответствующим номером, то порядок их расположения сверху вниз будет можно описать перестановкой из m чисел $(i_1, i_2, ..., i_m)$, где i_1 - номер книги, лежащей сверху, i_2 - номер следующей книги, i_m - номер последней книги, лежащей в самом низу. Предположим, что каждая книга берется с определенной вероятностью (книга с номером k берется с вероятностью p_k, $k = 1, ..., m$), причем при возвращении она кладется сверху. Представьте этот процесс в виде д.м.ц.[13] Всегда ли все $m!$ различных состояний $(i_1, i_2, ..., i_m)$ д.м.ц. будут возвратными? (то есть, что будет, если какую-то книгу не хотят брать). Опишите вид матрицы переходных вероятностей, найдите финальное распределение. Найдите финальную вероятность того, что книга с номером i лежит сверху.

Задача 24 **[1, Т. 1, глава 1, § 9].** Пусть имеются два неотрицательных целых числа A и B. Есть два игрока, у которых начальные капиталы равны соответственно A и B рублей. Они играют в орлянку: если выпал орел (с вероятность p) второй игрок платит первому рубль, если – решка – наоборот. Найти вероятности разорения игроков. Найдите среднюю продолжительность игры.

[13] Состояние д.м.ц. задается перестановкой $(i_1, i_2, ..., i_m)$. Если выбирается k-ая ($k = 2, ..., m$) сверху книга, ее номер i_k, то д.м.ц. переходит из состояния $(i_1, i_2, ..., i_k, ..., i_m)$ в состояние $(i_k, i_1, ..., i_{k-1}, i_{k+1}, ..., i_m)$. С вероятностью p_{i_1} д.м.ц. остается в том же состоянии)

Литература

1) Ширяев А.Н. Вероятность 1, 2, М.: МЦНМО, 2004.
2) Натан А.А., Горбачёв О.Г., Гуз С.А. Основы теории случайных процессов, М.: МЗ Пресс, 2003.
3) Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей, М.: Наука, 1969.
4) Розанов Ю.А. Лекции по теории вероятностей, Долгопрудный: Издательский дом “Интеллект”, 2008.
5) Булинский А.В., Ширяев А.Н. Теория случайных процессов, М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.
6) Оксендаль Б. Стохастические дифференциальные уравнения, М.: Мир, 2003.
7) Введение в математическое моделирование транспортных потоков: учеб. пособие / Гасников А.В., Кленов С.Л., Нурминский Е.А., Холодов Я.А., Шамрай Н.Б; Приложения: Бланк М.Л., Гасникова Е.В., Замятин А.А., Малышев В.А., Колесников А.В., Райгородский А.М; Под ред. А.В. Гасникова - М.: МФТИ, 2010. - 361 с. http://zoneos.com/traffic/
8) Кельберт М.Я., Сухов Ю.М. Вероятность и статистика в примерах и задачах. Т. 2. М.: МЦНМО, 2010.
9) Секей Г. Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике. М.–Ижевск: ИКИ, 2002.
10) Булинский А.В. Случайные процессы. Примеры, задачи и упражнения. М.: МФТИ, 2010. – эта книга рекомендуется для подготовки к сдаче задания.