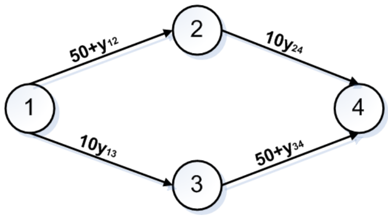
Контрольная работа по курсу
Введение в математическое моделирование транспортных потоков
Проходила к 15 апреля 2011 г. (ауд. 301а, 18.40-20.40)

Задача 1 (парадокс Брайеса, 1968; 1+2 баллов). Пусть корреспонденция $x_{14} = 6$ (тысяч автомобилей/ч). Вес ребра (удельные затраты на проезд по этому ребру) есть время движения по ребру (в минутах), если поток через ребро есть y_{ij} (тысяч автомобилей/ч). Например, в случае 2 (см. рис. 1): $y_{24} = x_{124} + x_{1324}$. Естественно считать, что время движения – возрастающая функция потока.

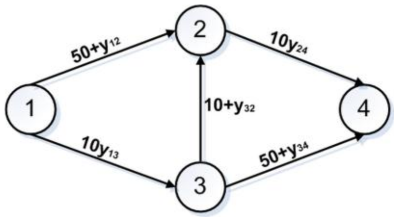
а) Покажите, что ниже выписаны оба равновесия Нэша–Вардропа (в случаях 1 и 2). Почему других равновесий нет?

Случай 1: $x_{124} = x_{134} = 3$.
Полное время в пути $T = 83$ мин

Случай 2: $x_{124} = x_{1324} = x_{134} = 2$.
Полное время в пути $T = 92$ мин



Случай 1



Случай 2

Рис. 1

б)* Приведите пример, вводя цену за проезд (т.е. вес ребра складывается из времени в пути и цены проезда, при этом считайте, что, в отличие от времени в пути, цена проезда – убывающая функция потока), когда равновесия Нэша-Вардропа не единственно.

Задача 2 (оптимальный размер ячейки; 2+1 баллов). Распределение мест проживания населения по городу, имеющему форму квадрата со стороной A км и не имеющего дорог, равномерное. Условное распределение мест работы жителей (при условии, что зафиксировано место жительства) также равномерное (и, как следствие, не зависит от места жительства). Руководство города решило построить сеть дорог в виде квадратной решётки со стороной квадратной ячейки, равной $a = A/n$. Известно, что затратами на строительство сети дорог можно пренебречь по сравнению с последующими суммарными затратами на её поддержание. Пусть C_L – стоимость поддержания 1 км дороги (в одну сторону) в течение 1 года, C_T – стоимость 1 часа, потраченного одним человеком в дороге. Число жителей в городе N. Каждый человек $Q = 300$ раз в год направляется из дома на работу и обратно с работы домой. Скорость движения человека не по дороге v км/ч, скорость движения человека по дороге V км/ч ($V \gg \mathrm{v}$), время, потраченное на прохождение одного перекрёстка, есть $t \geq 0$ мин.

а) Постройте целевую функцию, отвечающую за эффективность построенной транспортной сети.

б) Какое значение n «оптимально» выбрать руководству города? Рассмотрите два случая:

$$1)\ n \sim 1\text{–}10; \qquad 2)\ n \gg 1.$$

Задача 3 (замкнутая сеть, теорема Гордона–Ньюэлла, 1967; 3+2 баллов). Рассматривается транспортная сеть, в которой между N станциями курсируют M такси. Клиенты пребывают в i-й узел в соответствии с пуассоновским потоком с параметром $\lambda_i > 0$ ($i = 1, \ldots, N$). Если в момент прибытия в i-й узел там есть такси, клиент забирает его и с вероятностью $p_{ij} \geq 0$ направляется в j-й узел, по прибытии в который покидает сеть. Такси остается ждать в узле прибытия нового клиента. Времена перемещений из узла в узел – независимые случайные величины, имеющие показательное распределение с параметром $\nu_{ij} > 0$ для пары узлов (i, j). Если в момент прихода клиента в узел там нет такси, клиент сразу покидает узел.

а) Считая $p_{ij} = N^{-1}$, $\lambda_i = \lambda$, $\nu_{ij} = \nu$, покажите, что вероятность того, что клиент, поступившей в узел (в установившемся (стационарном) режиме работы сети), получит отказ, равна

$$p_{\text{отказа}}(N, M) = \sum_{k=0}^{M} \frac{C_{N-2+k}^{k} \rho^{M-k}}{(M-k)!} \Bigg/ \sum_{k=0}^{M} \frac{C_{N-1+k}^{k} \rho^{M-k}}{(M-k)!}, \quad \rho = N\lambda/\nu .$$

б)* Покажите справедливость следующей асимптотики при $N \to \infty$:

$$p_{\text{отказа}}(N, rN) = 1 - \frac{2r}{\lambda/\nu + r + 1 + \sqrt{(\lambda/\nu + r + 1)^2 - 4\lambda r/\nu}} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{N}\right).$$

Задача 4 (сеть Штейнера; 1+3+2 баллов). *Сетью Штейнера* называется систем прямых дорог, такая, что любая дорога соединяет напрямую какие-то две точки, где точками могут быть города, а также вспомогательные узлы, обладающая следующими свойствами:

1. В каждом вспомогательном узле сходятся ровно три дороги под углами в 120° друг к другу.
2. Из каждого города должно выходить не более трех дорог; если из города выходят две дороги – они должны образовывать угол не менее 120°, если три – все образованные ими углы должны быть по 120°.

а) Обязана ли такая сеть обладать минимальной суммой расстояний среди всех возможных сетей дорог (таких, что из любого города можно доехать до любого другого)?

б) Покажите, что сеть с минимальной суммой расстояний нужно искать среди возможных сетей Штейнера. Постройте сети Штейнера для городов, расположенных в вершинах равностороннего треугольника, треугольника с углом большим, чем 120°, прямоугольника.

в)* Отношение длины минимального остовного дерева (веса ребер – расстояния на плоскости) к минимальной сети Штейнера называется числом Джильберта–Поллака. Покажите, что это отношение не превосходит числа 2. Это грубая оценка сверху, точная оценка – $\sqrt{3}/2$. Приведите пример, когда оценка $\sqrt{3}/2$ достигается.

Задача 5 (равновесие макросистем; 5 баллов). На рис. 2 показано (в долях) равновесное распределение потоков для любого значения параметра $x \in [0, 0.5]$ (веса рёбер $\tau(y)$, как функции потоков y, считайте линейными функциями $\tau(y) = y$). Предположим, что число водителей (игроков) $N \gg 1$. Каждый водитель каждый (игровой) день, вне зависимости от всех остальных игроков действует по правилу:

- с вероятностью $\gamma = 0.9$ – действует (выбирает путь следования) точно также как вчера;
- с вероятностью $\gamma \cdot (1-\gamma)$ – выбирает кратчайший путь вчерашнего дня; с вероятностью $\gamma \cdot (1-\gamma)^2$ – выбирает следующий (по длине) путь вчерашнего дня; с вероятностью $\gamma \cdot (1-\gamma)^3$ – выбирает следующий (по длине) путь вчерашнего дня; с вероятностью $(1-\gamma)^4$ – выбирает самый длинный путь вчерашнего для дня (всего 4 различных пути).

Что будет происходить на больших временах? Зависит ли ответ от “точки старта”?

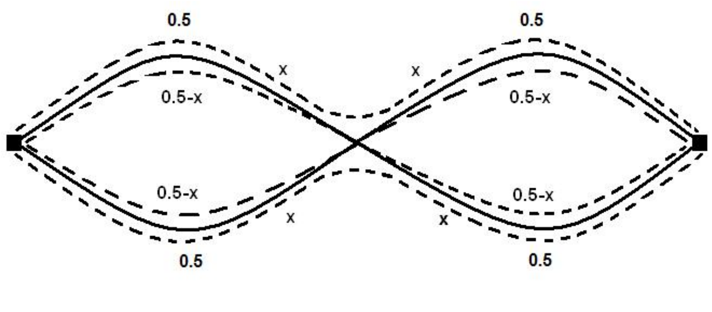


Рис. 2