# Случайные процессы (874 – 876 группы ФУПМ)

## 1-ое задание

(Необходимо сдать до 1 апреля 2011 г.)
Задачи 4, 9, 13, 23 - 25, 28, 32, 36, 37, 40 из
А.А. Натан и др, Случайные процессы: учебно - методическое пособие, М.: МФТИ, 2006.
Также необходимо решить не менее 7 дополнительных задач или набрать не менее 11 звёздочек.

**Принятые сокращения**[1]

с.в. – случайная величина
ц.п.т. – центральная предельная теорема
d – distribution (по распределению)
a.s. - almost significant (почти наверное (п.н.), почти всюду (п.в.), с вероятностью 1)
i.i.d. – independent identically distributed (независимые одинаково распределенные)
$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ - биномиальный коэффициент

***Определение.***[2] ***Процессом Леви*** $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ называется стохастически непрерывный случайный процесс, удовлетворяющий следующим условиям:

1. $X(0) \overset{a.s.}{=} 0$;
2. для любых $t > s \geq 0$ распределение $X(t) - X(s)$ зависит только от $t - s$ (также говорят, что $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ имеет **стационарные приращения** или $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ - однородный);
3. для любых $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n$ выполняется: $X(t_1) - X(t_0)$, …, $X(t_n) - X(t_{n-1})$ - независимые в совокупности с.в. (также говорят, что $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ имеет **независимые приращения**).

## Дополнительные задачи

***Задача 1*.*** Из теории вероятностей известно[3], что в качестве предельных (при $n \to \infty$) распределений сумм, $\sum_{k=1}^{n} x_{kn}$ состоящих (при каждом $n \in \mathbb{N}$) из последовательностей независимых одинаково распределенных с.в., выступают всевозможные безгранично делимые[4] законы распределения (и только они). При этом имеет место **представление Леви – Хинчина**:

---

[1] Если не оговорено противного, то производные и интегралы от случайного процесса второго порядка понимаются как пределы в смысле сходимости в среднем квадратичном (см. соответствующие определения А.А. Натан, О.Г. Горбачев, С.А. Гуз, Основы теории случайных процессов, М.: МЗ_Пресс, 2003, стр. 40 – 49.). Также везде предполагается, что случайные процессы, заданны при $t \geq 0$.

[2] См. А.Н. Ширяев, Основы финансовой стохастической математики, М.: ФАЗИС, 2004, т. 1, глава 3, п. 1.

[3] См. Б.В. Гнеденко, Курс теории вероятностей, М.: Наука, 1969, глава 9 и § 56; А.Н. Ширяев, Вероятность-1, М.: МЦНМО, 2004, глава 3, § 6; А.Н. Ширяев, Основы финансовой стохастической математики, М.: ФАЗИС, 2004, т. 1, глава 3, п. 1.

[4] С.в. $X$ называется безгранично делимой, а ее распределение вероятностей безгранично делимым, если для любого $n \in \mathbb{N}$ найдутся i.i.d. с.в. $\{X_{kn}\}_{k=1}^{n}$: $X \overset{d}{=} \sum_{k=1}^{n} X_{kn}$ (т.е. $\forall\ x \in \mathbb{R} \to F_X(x) = F_{\sum_{k=1}^{n} X_{kn}}(x)$).

$X$ - безгранично делимая с.в. $\Leftrightarrow \ \exists \ \left(b, c, \nu(dx)\right): \ c \ge 0, \ \int_{-\infty}^{\infty} \max\left(1, x^2\right) \nu(dx) < \infty, \ \nu(dx) \ge 0$ :[5]

$$\varphi_X(\mu) = M\, e^{i\mu X} = \exp\left\{ i\mu b - c\mu^2/2 + \int_{-\infty}^{\infty} \left( e^{i\mu x} - 1 - i\mu x I\left(|x|<1\right)\right) \nu(dx) \right\}, \ I\left(|x|<1\right) = \begin{cases} 1, & |x|<1 \\ 0, & |x| \ge 1 \end{cases}.$$

Причем триплет $\left(b, c, \nu(dx)\right)$ определяется единственным образом.

Покажите, что если $X(t)$ - процесс Леви, то:

$$\exists! \ \left(b, c, \nu(dx)\right): \ c \ge 0, \ \int_{-\infty}^{\infty} \max\left(1, x^2\right) \nu(dx) < \infty, \ \nu(dx) \ge 0:$$

$$\forall \ t \ge 0 \to \varphi_{X(t)}(\mu) = M\, e^{i\mu X(t)} = \exp\left\{ t\left[ i\mu b - c\mu^2/2 + \int_{-\infty}^{\infty} \left( e^{i\mu x} - 1 - i\mu x I\left(|x|<1\right)\right) \nu(dx) \right] \right\}.$$

***Задача 2***.*** **1) (биномиальная однопериодная модель Кокса – Росса - Рубинштейна)** Пусть на “идеализированном” фондовом рынке имеется всего две ценные бумаги, и торговля осуществляется всего в два момента времени. Пусть цена первой бумаги $S$ (будем называть её акцией (stock)) известна в первый момент. Цена второй бумаги $C$ (будем называть ее call – опционом европейского типа[6]) не известна в первый момент. Пусть с ненулевой вероятностью $p > 0$ к моменту времени 2 цена акции вырастет в $u > 1$ (up) раз и с вероятностью $1 - p$ цена акции “вырастет” в $d < 1$ (down) раз, т.е. падает. Пусть также известны возможные цены опциона во второй момент: $C_u$ - если акция выросла в цене и $C_d$ - если акция упала в цене. Для простоты будем считать, что банк работает с нулевым процентом, т.е. класть деньги в банк, в расчете на проценты, бессмысленно. Говорят, что **рынок безарбитражный**, если не существует таких $k_S$, $k_C$, что[7]

$$X(1) = k_S S + k_C C = 0, \ P\left(X(2) \ge 0\right) = P\left(k_S S(2) + k_C C(2) \ge 0\right) = 1, \text{ причем } P\left(X(2) > 0\right) > 0.$$

Докажите, что рассматриваемый рынок безарбитражный тогда и только тогда, когда[8]

$$C = \tilde{p} C_u + \left(1 - \tilde{p}\right) C_d, \text{ где } \tilde{p} = \frac{1-d}{u-d}.$$

**2) (биномиальная n-периодная модель Кокса – Росса - Рубинштейна)** Предложите обобщение рынка и соответствующих понятий п. 1 на $n$ - периодный рынок. С возможностью класть деньги в банк под процент $r - 1$ ($d < r < u$) - за один период (под такой же процент брать деньги из банка). Опцион исполняется в заключительный $n+1$-ый момент. Платежи по опциону в этот момент известны - описываются известной функцией $\bar{C}(S)$ (например, для указанного в п. 1 опциона[9] $\bar{C}(S) = \max\left\{0, S - X\right\}$), т.е. $C_k(n+1) = \bar{C}\left(S_k(n+1)\right)$, где $k$ -

---

[5] Последнее условие означает, что мера Леви $\nu(dx)$ - неотрицательная мера (не заряд), т.е. $\nu(A) \ge 0$ - для любого измеримого множества $A \subseteq \mathbb{R}$.

[6] Опцион характеризуется датой исполнения (в нашем случае - момент времени 2) и платежами в момент исполнения ($C_u$ и $C_d$). Причем эти платежи - заранее известные функции от цены акции в этот момент (введение опционов было мотивированно, желанием “хеджироваться”, страховаться от нежелательных изменений цен акций). Основная задача заключается в установлении “справедливой” цены опциона $C$ в момент времени 1 (см. А.Н. Ширяев, Вероятность-2, М.: МЦНМО, 2004, глава 7, § 11; А.Н. Ширяев, Основы финансовой стохастической математики, М.: ФАЗИС, 2004, т. 1, т. 2).

[7] Не имея в начальный момент 1 капитала $X(1) = 0$, но, проделав некоторую махинацию (продав одних ценных бумаг (в зависимости от специфики рынка, иногда разрешается “вставать в короткую позицию” – продавать ценные бумаги, не имея их в наличие; приобретая при этом долг) и купив на вырученные деньги других бумаг), можно в момент времени 2 гарантированно ничего не проиграть, и при этом с ненулевой вероятностью выиграть (не уточняя сколько – поскольку, “прокручивая” по имеющемуся арбитражу (пропорционально увеличивая коэффициенты $k_S$, $k_C$) сколь угодно большую сумму, можно получить с ненулевой вероятностью сколь угодно большой выигрыш).

[8] $\tilde{p}$ - называется мартингальной вероятностью (смысл такого определения будет раскрыт позже) и задает **мартингальную меру**. Если существует единственная мартингальная мера, то рынок называется **полным**. На полном рынке неизвестная цена опциона $C$ в начальный момент определяется однозначно и может интерпретироваться как “справедливая цена”.

[9] $X$ - называется ценной исполнения опциона и считается известной. Собственно, вид функции $\bar{C}(S) = \max\left\{0, S - X\right\}$ проясняет смысл опциона. Опцион дает право купить (у того, кто продал нам опцион) в момент исполнения опциона акцию по цене $X$. Если акция стоит дороже в этот момент, то, конечно, мы этим правом воспользуемся и получим прибыль (продавец опциона обязан про-

состояние в котором находится рынок в момент времени $n+1$. Считайте, что $S_k(n+1) = Su^k d^{n-k}$, т.е. $k$ - характеризует то, сколько раз акция поднималась в цене. Также как и в п. 1, требуется определить "справедливую" цену опциона.
***Указание.*** Обоснуйте формулу Кокса – Росса – Рубинштейна:

$$C = \frac{1}{r^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\tilde{p}^k(1-\tilde{p})^{n-k}\,\bar{C}\left(Su^k d^{n-k}\right),\ \text{где}\ \tilde{p} = \frac{r-d}{u-d}. \qquad \text{(i)}$$

**3) (континуальная биномиальная модель Блэка - Шоулса)** Уместим на отрезке времени $[0,t]$ $n+1$ - моментов (промежутки между которыми одинаковы), в которые осуществляется торговля согласно п. 2. Введем два параметра: $a$ - **снос**, $\sigma^2 \ge 0$ - **волатильность** (дисперсия). Положим,

$$\mu = a + \frac{\sigma^2}{2},\ r = \exp\left(\mu\frac{t}{n}\right),\ u = \exp\left(\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}\right),\ d = \exp\left(-\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}\right),\ \tilde{p} = \frac{r-d}{u-d} \approx \frac{1}{2}\left(1+\frac{a}{\sigma}\sqrt{\frac{t}{n}}\right). \qquad \text{(ii)}$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$ в формуле (i) (с $\bar{C}(S) = \max\{0, S-X\}$), согласно (ii), получите формулу Блэка – Шоулса для справедливой цены опциона в "континуальной биномиальной модели". Почему вводится именно два параметра (а не один, три и т.д.)? Почему

$$r-1 \sim \frac{\mu t}{n},\ u-1 \approx \sigma\sqrt{\frac{t}{n}},\ d-1 \approx -\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}\ ?$$

Возможны ли какие-нибудь другие осмысленные варианты соотношений типа (ii), при которых будет существовать предел при $n \to \infty$ в формуле (i) (для простоты вычислений считайте, что $\bar{C}(S) := S$)?

**4) (броуновское движение (процесс Башелье) и винеровский процесс).** Исходя из формулы (i), имеем, что "рынок" при определении "справедливой" цены опциона считает, что случайный процесс $S(m)$ (цена акции в момент времени $m$) - эволюционирует согласно биномиальной модели с неизменными параметрами[10] $d$, $u$, $\tilde{p}$. Построим случайный процесс $S(t)$ (в непрерывном времени), исходя из процесса $S(m)$, заданного в дискретном времени предельным переходом, аналогичным п. 3. Назовем, полученный процесс $S(t)$ - **геометрическим броуновским движением** (или случайным процессом Башелье - Самуэльсона) с параметрами[11] $a$, $\sigma^2 \ge 0$, а случайный процесс $B(t) = \ln\frac{S(t)}{S(0)}$ - **броуновским движением** с параметрами $a$, $\sigma^2 \ge 0$.

Если $a = 0$, $\sigma^2 = 1$, то такое броуновское движение имеет специальное название – **винеровский процесс** $W(t)$. Покажите, что броуновское движение является процессом Леви. Найдите триплет $(b, c, \nu(dx))$.

дать нам акцию). Если же цена акции меньше цены исполнения опциона, то нам уже не выгодно покупать акцию по более дорогой цене, чем рыночная, и мы не исполняем опцион, т.е. ничего не делаем (ведь опцион дает нам право, ни к чему не обязывая).

[10] Кстати говоря, один из альтернативных способов введения мартингальных вероятностей $\tilde{p}$ основывается на, так называемых, "риск нейтральных" или "мартингальных" соображениях. Заключающихся в том, что $\tilde{p}$ выбирается исходя из равенства $M_{\tilde{p}}\left[Su^{\sum_{k=1}^{n}x_k}d^{n-\sum_{k=1}^{n}x_k}\right] = Sr^n$, где i.i.d. $x_k \in Be(\tilde{p})$ или исходя из того, что процесс приведенной (продисконтированной) стоимости акции $\tilde{S}(m) = S(m)/r^m$ - должен быть **мартингалом** относительно мартингальной меры $\tilde{p}$ (отсюда и название), т.е.

$$M_{\tilde{p}}\left(\tilde{S}(m+1)\middle|\left(\tilde{S}(1),...,\tilde{S}(m)\right)\right) = \tilde{S}(m)$$

(см. А.В. Летчиков, Лекции по финансовой математике, Москва - Ижевск, РХД, 2004, глава 3).

[11] Эти параметры имеют следующий смысл: $a = \frac{1}{t}M\left[\ln\frac{S(t)}{S(0)}\right]$, $\sigma^2 = \frac{1}{t}D\left[\ln\frac{S(t)}{S(0)}\right]$.

**5) (геометрическое броуновское движение или процесс Башелье - Самуэльсона)** В условиях п. 4 покажите, что геометрическое броуновское движение удовлетворяет следующему стохастическому дифференциальному уравнению:[12]

$$dS(t) = \left(a + \frac{\sigma^2}{2}\right) S(t)\,dt + \sigma S(t)\,dW(t),$$

которое определяет $S(t)$, как случайный процесс, удовлетворяющий соотношению:

$$S(t) = S(0) + \left(a + \frac{\sigma^2}{2}\right)\int_0^t S(\tau)\,dt + \sigma \int_0^t S(\tau)\,dW(\tau),$$

где второй интеграл понимается в смысле Ито (см. задачу 11, п. 4).

**6) (формула Ито)[13]** Поясните, почему $\Delta S(t) = \Delta\big(S(0)\exp(B(t))\big) = \Delta\big(S(0)\exp(at + \sigma W(t))\big) \simeq$

$$\simeq aS(0)\exp\big(at + \sigma W(t)\big)\Delta t + \sigma S(0)\exp\big(at + \sigma W(t)\big)\Delta W(t) + \frac{\sigma^2}{2!} S(0)\exp\big(at + \sigma W(t)\big)\big(\Delta W(t)\big)^2 \simeq$$

$$\simeq \left(a + \frac{\sigma^2}{2}\right) S(0)\exp\big(at + \sigma W(t)\big)\Delta t + \sigma S(0)\exp\big(at + \sigma W(t)\big)\Delta W(t) = \left(a + \frac{\sigma^2}{2}\right) S(t)\Delta t + \sigma S(t)\Delta W(t),\text{ где}$$

$$\Delta S(t) = S(t+h) - S(t),\ \Delta W(t) = W(t+h) - W(t),\ \Delta t = t + h - t = h,\ h > 0.$$

Предложите общий вид формулы для $\Delta g\big(t, W(t)\big)$ ($dg\big(t, W(t)\big)$).

***Задача 3* (пуассоновский процесс).*** В приложениях (в теории надежности, теории массового обслуживания) широко используются **процессы восстановления** (**потоки Пальма**). Основным (и наиболее удобным для анализа) представителем таких процессов является **пуассоновский процесс**, который можно определить следующим образом:[14]

$$K(t) = \max\left\{k:\ \sum_{i=1}^{k} T_i < t\right\},\text{ где}^{15}\text{ i.i.d. с.в. } T_i \in \mathrm{Exp}(\lambda),\text{ т.е.}^{16}\ P(T_i > t) = \mathrm{e}^{-\lambda t},\ \lambda > 0.$$

Покажите, что $K(t)$ является процессом Леви. Найдите триплет $\big(b, c, \nu(dx)\big)$.

***Задача 4* (сложный пуассоновский процесс).*** В микроэкономике, страховании и в ряде других приложений часто возникает **сложный (взвешенный) пуассоновский процес**с, который можно определить следующим образом:[17] $Q(t) = \sum_{i=1}^{K(t)} V_i$, где i.i.d. $V_i$ ($dF_{V_i}(x) = \nu(dx)/\nu(\mathbb{R})$) не зависят от пуассоновского процесса

---

[12] Случайные процессы, которые задаются стохастическими дифференциальными уравнениями наподобие рассмотренного, задают по определению **диффузионный процесс (Ито)** (см. Б. Оксендаль, Стохастические дифференциальные уравнения, М.: Мир, 2003, главы 7, 8).

[13] См. Б. Оксендаль, Стохастические дифференциальные уравнения, М.: Мир, 2003, глава 4.

[14] $K(t)$ - число отказов приборов к моменту времени $t \geq 0$ (отказавший прибор сразу же заменяется исправным). Все приборы идентичны, т.е. имеют одинаковое распределение времени безотказной работы. Кроме того, приборы работают независимо друг от друга.

[15] Параметр $\lambda > 0$ принято называть интенсивностью пуассоновского процесса.

[16] Напомним важную особенность показательного распределения "отсутствие последействия": $P(T_i > t + \tau \mid T_i > t) = P(T_i > \tau)$. Заметим также, что общие процессы восстановления задаются аналогичной формулой с той лишь разницей, что i.i.d. $T_i \geq 0$ п.н. уже не обязательно распределены по показательному закону.

[17] $Q(t)$ может интерпретироваться, как прибыль фирмы к моменту времени $t$. При этом предполагается, что к этому моменту времени фирма осуществляет $K(t)$ сделок (т.е. число сделок, вообще говоря, случайно), причем каждая сделка, в независимости от остальных сделок (и их количества), приносит случайный доход $V_i$.

$K(t)$, интенсивность, которого равна $\lambda = \nu(\mathbb{R}) < \infty$. Покажите, что $Q(t)$ является процессом Леви. Найдите триплет $(b, c, \nu(dx))$.

***Замечание.*** Исходя из задачи 2 п. 4 и задачи 4 можно выдвинуть гипотезу, что любой процесс Леви может быть получен как сумма броуновского движения и сложного пуассоновского процесса. Такого рода утверждение действительно имеет место и называется **представлением Леви – Ито**. Однако, вместо сложного пуассоновского процесса в этом представлении в общем случае следует брать процесс, который может быть получен как "предел" сложных пуассоновских процессов[18]. Сделанное замечание отчасти поясняет важность трех ключевых распределений теории вероятностей и трех типов процессов Леви: вырожденного нормального[19] (вырожденное броуновское движение), нормального (броуновское движение), распределения Пуассона (пределы сложных пуассоновских процессов). Помимо того, что при наиболее естественных для приложений предположениях имеет место сходимость к одному из этих трех безгранично делимых законов, они в некотором смысле являются базисом: любое распределение, которое может возникать в пределе при суммировании независимых одинаково распределенных с.в., "может быть получено" исходя из этих трех базовых распределений. Задача 4 частично проясняет, в каком смысле любое распределение "может быть так получено".

***Задача 5* (сложный процесс восстановления).*** Если в определении сложного пуассоновского процесса заменить пуассоновский процесс $K(t)$ общим процессом восстановления $\tilde{K}(t)$, то получится **сложный процесс восстановления** $\tilde{Q}(t)$ (также играющий важную роль в разнообразных приложениях). Считая известными $M\tilde{K}(t)$, $D\tilde{K}(t)$ и $MV_i$, $DV_i$, определите $M\tilde{Q}(t)$, $D\tilde{Q}(t)$. Используя ц.п.т. (в форме А.А. Натана) найдите (приближенно) распределение сечения процесса $\tilde{Q}(t)$ при $t \gg 1$.

***Задача 6* (поток Эрланга m-го порядка).*** Будет ли m раз "просеянный" пуассоновский процесс $E_m(t)$ с параметром $\lambda > 0$

$$E_m(t) = \max\left\{k : \sum_{i=1}^{k} T_i < t\right\}, \text{ где i.i.d. с.в.}^{20}\ T_i \in \underbrace{\mathrm{Exp}(\lambda) + \ldots + \mathrm{Exp}(\lambda)}_{m} = \Gamma(\lambda, m),\ \lambda > 0$$

процессом Леви?

***Задача 7**.*** Найдите семейства конечномерных распределений броуновского (винеровского) $B(t)$ ($W(t)$) и пуассоновского $K(t)$ процесса, определите их математические ожидания и корреляционные функции.

1. Будут ли эти процессы равномерно стохастически непрерывными[21]?
2. Будут ли эти процессы непрерывны (дифференцируемы) в среднем квадратичном?
3. Будут ли они дифференцируемы по вероятности (по распределению)?
4. Будут ли они интегрируемы[22] с непрерывной функцией $g(t)$ на конечном временном отрезке по Риману, по Риману – Стилтьесу?

---

[18] См. K.-I. Sato, Levy processes and infinitely divisible distributions. Cambridge, 1999.

[19] Когда дисперсия равняется нулю.

[20] $\Gamma(\lambda, m) = \underbrace{\mathrm{Exp}(\lambda) + \ldots + \mathrm{Exp}(\lambda)}_{m}$ - гамма распределение (сумма независимых показательных с.в.).

[21] Процесс $X(t)$ называется равномерно стохастически непрерывным, если

$$\forall\ \varepsilon > 0,\ b \ge a \ge 0 \to P\left\{\sup_{t \in [a,b]} \left|X(t+h) - X(t)\right| \ge \varepsilon\right\} \xrightarrow[h \to 0]{} 0. \qquad \text{(i)}$$

Заметим, что определение стохастической непрерывности, получается из (i) при $b = a$.

[22] Определения соответствующих понятий см. А.А. Натан, О.Г. Горбачев, С.А. Гуз, Основы теории случайных процессов, М.: МЗ_Пресс, 2003, стр. 45 – 49.

5. Существует ли у этих процессов такие **стохастически эквивалентные модификации**[23], что почти все реализации модифицированных процессов непрерывны[24]?
6. Верно ли, что почти все реализации этих процессов – почти везде дифференцируемые (почти ни где не дифференцируемые) функции[25]?

***Задача 8**.*** **1)** Покажите, что если дополнительно в определении процесса Леви потребовать, чтобы процесс $X(t)$ был равномерно стохастически непрерывным (см. п. 1 задачи 7), то семейство так определенных процессов будет совпадать с двух параметрическим $a$, $\sigma^2 \geq 0$ семейством броуновских процессов[26].
**2)** Покажите, что если дополнительно в определении процесса Леви потребовать, чтобы процесс $X(t)$ мог принимать значения только из множества $\mathbb{N}\bigcup\{0\}=\{0,1,2,3,...\}$, причем $P\{X(t)>1\}=o(t)$, то семейство так определенных процессов будет совпадать с одно параметрическим $\lambda \geq 0$ семейством пуассоновских процессов[27].

***Задача 9* (принцип зеркального отражения).*** Пусть $W(t)$ - винеровский процесс. Найдите следующую вероятность

$$P\left(\max_{0\leq s\leq t} W(s)\geq x\right).$$

Почему такую вероятность можно посчитать[28].

***Задача 10* (закон арксинуса).*** Используя результат предыдущей задачи, найдите вероятность того, что вышедший из нуля винеровский процесс пересечёт ось абсцисс (т.е. прямую $W=0$ в полуплоскости $(t,W)$, $t\geq 0$) в момент времени между $t_0$ и $t_1$ ($t_1>t_0$).

***Задача 11**.*** Пользуясь непрерывностью скалярного произведения[29] $\langle X,Y\rangle_{L_2} \overset{def}{=} M(XY)$ в гильбертовом пространстве[30] $L_2$ относительно топологии, порожденной этим же скалярным произведением, докажите, что

$$M\left[\underset{n\to\infty}{l.i.m.}\, X_n \,\underset{m\to\infty}{l.i.m.} Y_m\right]=\lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}} M\left[X_n Y_m\right].$$

Используя, это свойство математического ожидания, решите следующие задачи.

1) Пусть $X(t)$ - интегрируемый и дифференцируемый в среднем квадратичном случайный процесс, причем $\eta(t)=X'(t)$, $I(t)=\int_0^t X(\tau)\,d\tau$. Можно ли при сделанных предположениях относительно $X(t)$

---

[23] $X(t)$ - стохастическая (эквивалентная) модификация $X(t)$ тогда и только тогда, когда $\forall\ t\geq 0 \to P\{X(t)=Y(t)\}=1$.

[24] Для пуассоновского процесса ответ "нет", что достаточно очевидно. Для броуновского (винеровского) процесса ответ положительный. Для того чтобы это установить, удобно воспользоваться теоремой А.Н. Колмогорова (см. А.Д. Вентцель, Курс теории случайных процессов, М.: Наука,1975, глава 5, § 5.2, стр. 98 - 99).

[25] Для пуассоновского процесса ответ очевиден – "почти везде дифференцируемы". Для винеровского процесса ответ – "почти нигде не дифференцируемы". Чтобы лучше это "прочувствовать", покажите, что $\underset{\substack{a=t_0<...<t_n=b,\ n\to\infty\\ \max\limits_{k=1,...,n}(t_k-t_{k-1})\xrightarrow[n\to\infty]{}0}}{\text{l.i.m.}} \sum_{k=1}^{n}\left(W(t_k)-W(t_{k-1})\right)^2=b-a$.

[26] См. Б.В. Гнеденко, Курс теории вероятностей, М.: Наука, 1969, § 56.

[27] См. А.А. Натан, О.Г. Горбачев, С.А. Гуз, Основы теории случайных процессов, М.: МЗ_Пресс, 2003, стр. 69 – 73.

[28] Заметим, что $W(t)$ - стохастически непрерывный процесс, как процесс Леви (далее см. А.Д. Вентцель, Курс теории случайных процессов, М.: Наука,1975, глава 5, § 5.2, стр. 101 - 102).

[29] Понимаемого, как билинейная форма – функция от двух аргументов (элементов рассматриваемого гильбертова пространства).

[30] $X\in L_2 \Leftrightarrow M\left(X^2\right)<\infty$.

найти (выразить через $R_X(t_1, t_2)$) следующую взаимную корреляционную функцию $R_{\eta,I}(t_1, t_2) = M \overset{o}{\eta}(t_1) \overset{o}{I}(t_2)$? Если можно, то найдите ее. Если же, вообще говоря, нельзя, то добавьте необходимые дополнительные условия относительно $X(t)$, и найдите $R_{\eta,I}(t_1, t_2)$.

**2)** Пусть $W(t)$ - виннеровский процесс, $I(t) = \int_0^t \tau dW(\tau)$. Найдите $MI(t)$ и $DI(t)$.

**3)** Посчитайте интеграл из п. 2, используя правило интегрирования по частям:
Если $f(t)$ - непрерывно дифференцируемая функция, то

$$\int_a^b f(\tau)d\xi(\tau) = f(b)\xi(b) - f(a)\xi(a) - \int_a^b \xi(\tau) f'(\tau)d\tau,$$

где $\xi(\tau)$ - случайный процесс на отрезке [a, b], такой что существует $\int_a^b f(\tau)d\xi(\tau)$.

**4)** Посчитайте интеграл $I = \int_0^T W(t)dW(t) = \underset{\substack{0=t_0<\ldots<t_n=T,\ n\to\infty \\ \max\limits_{k=1,\ldots,n}(t_k - t_{k-1}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0}}{\text{l.i.m.}} \sum_{k=1}^n W(t_k^*)(W(t_k) - W(t_{k-1}))$.

**(i)** Когда $t_k^* = t_{k-1}$ - случай Ито.

**(ii)** Когда $t_k^* = (t_{k-1} + t_k)/2$ - случай Стратоновича.

В каком из двух случаев справедлива формула интегрирования по частям (см. п. 3)?

***Задача 12***.*** Пусть $X(t)$ - **гауссовский процесс**[31].

**1)** Докажите, что если $(X(t_1), \ldots, X(t_n))^T \in N(\vec{m}, R)$, т.е. $\varphi_{(X(t_1),\ldots,X(t_n))}(\vec{\mu}) = \exp\{i\langle\vec{\mu}, \vec{m}\rangle - (1/2)\vec{\mu}^T R\vec{\mu}\}$, то $\vec{m} = (MX(t_1), \ldots, MX(t_n))^T$ - вектор математических ожиданий, $R = \left\| M \overset{o}{X}(t_i) \overset{o}{X}(t_j) \right\|_{i,j=1}^n$ - корреляционная матрица[32].

**2)** Докажите, что стационарность $X(t)$ в узком и широком смыслах совпадают.

**3)** Установите эквивалентность следующих утверждений:
некоррелированность $X(\tilde{t})$ с $(X(t_1), \ldots, X(t_n))$ $\Leftrightarrow$ независимость $X(\tilde{t})$ от $(X(t_1), \ldots, X(t_n))^T$.

**4)** Пусть $\vec{Y} = A \cdot (X(t_1), \ldots, X(t_n))^T + \vec{b}$. Покажите, что $\varphi_{\vec{Y}}(\vec{\mu}) = \exp\{i\langle\vec{\mu}, A\vec{m} + \vec{b}\rangle - (1/2)\vec{\mu}^T ARA^T\vec{\mu}\}$.

**5)** Если $\det R = 0$, то $(X(t_1), \ldots, X(t_n))^T \overset{a.s.}{\in} (\text{Ker } R)^\perp$ ($(\text{Ker } R)^\perp$ - ортогональное дополнение в $\mathbb{R}^n$ подпространства натянутого на собственные векторы[33] матрицы $R$, соответствующие собственному значению $\lambda = 0$). Докажите также обратное утверждение:

---

[31] Процесс $X(t)$ называется гауссовским, если $\forall\ n \in \mathbb{N},\ 0 \le t_1 < \ldots < t_n\ \exists\ \vec{m} \in \mathbb{R}^n,\ R = \|r_{ij}\|_{i,j=1}^n \ge 0$ ($R$ - симметрическая неотрицательно определенная матрица): $\varphi_{(X(t_1),\ldots,X(t_n))}(\vec{\mu}) = M\,e^{i\langle\vec{\mu}, (X(t_1),\ldots,X(t_n))^T\rangle} = \exp\{i\langle\vec{\mu}, \vec{m}\rangle - (1/2)\vec{\mu}^T R\vec{\mu}\}$ - характеристическая функция случайного вектора $(X(t_1), \ldots, X(t_n))^T$. Другое (эквивалентное) определение: $X(t)$ называется гауссовским, если

$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ 0 \le t_1 < \ldots < t_n,\ \vec{c} \in \mathbb{R}^n\ \exists\ m \in \mathbb{R},\ \sigma \ge 0: \left\langle \vec{c}, (X(t_1), \ldots, X(t_n))^T \right\rangle \in N(m, \sigma^2).$$

Уже встречавшимся нам примером гауссовского процесса является броуновское движение (винеровский процесс).

[32] Напомним, что корреляционной функцией называется $R(t_1, t_2) = M \overset{o}{X}(t_1) \overset{o}{X}(t_2)$. Таким образом, $R = \|R(t_i, t_j)\|_{i,j=1}^n$.

Если $\left(X(t_1),...,X(t_n)\right)^T \overset{a.s.}{\in} \left(\mathrm{Lin}\{\vec{c}_1,..,\vec{c}_k\}\right)^{\perp}$, то $\mathrm{Lin}\{\vec{c}_1,..,\vec{c}_k\} \subseteq \mathrm{Lin}\{\mathrm{Ker}\, R\}$ (причем последнее включение превращается в равенство, если $k$ было выбрано максимально возможным).

**6)** Пусть $\exists\ X^{(k)}(t)$ (или $\int_0^t g(\tau)X(\tau)dt$, или $\int_0^t g(\tau)dX(\tau)$). Тогда эти процессы также будут гауссовскими[34]. Найдите их математические ожидания и корреляционные функции.

**7)** Пусть[35] $\vec{X} = \left(\vec{X}_1, \vec{X}_2\right)^T = \left(\left(X(t_1),...,X(t_m)\right)^T, \left(X(t_{m+1}),...,X(t_{m+n})\right)^T\right) \in N\left(\begin{pmatrix} m_{\vec{X}_1} \\ m_{\vec{X}_2}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} R_{\vec{X}_1,\vec{X}_1} & R_{\vec{X}_1,\vec{X}_2} \\ R_{\vec{X}_2,\vec{X}_1} & R_{\vec{X}_2,\vec{X}_2}\end{pmatrix}\right)$. Считая, $\det\left\|R_{\vec{X}_1,\vec{X}_1}\right\| \neq 0$, найдите условное распределение случайного вектора $\vec{X}_2$, при условии, что значения случайного вектора $\vec{X}_2$ зафиксированы. Как изменится ответ, если не предполагать, что $\det\left\|R_{\vec{X}_1,\vec{X}_1}\right\| \neq 0$.

**8)** Используя вид характеристической функции $\varphi_{\left(X(t_1),...,X(t_n)\right)}(\vec{\mu}) = \exp\left\{i\langle\vec{\mu},\vec{m}\rangle - (1/2)\vec{\mu}^T R\vec{\mu}\right\}$, найдите

$$M\left(\left[\left(\overset{o}{X}(t_1)\right)^{k_1}...\left(\overset{o}{X}(t_n)\right)^{k_n}\right]\right).$$

***Задача 13*.*** **1)** $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3\end{pmatrix} \in \mathrm{N}\left(\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{Vmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33}\end{Vmatrix}\right)$. Найдите $M\left[x_1^3 x_2^2 x_3^2\right]$.

**2)** $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3\end{pmatrix} \in \mathrm{N}\left(\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{Vmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 5\end{Vmatrix}\right)$. Найдите $M\left[(x_1 - 2x_2 + x_3)(x_1 - x_3)^2 x_3^2\right]$.

***Задача 14** (задача о наилучшем приближении).*** Предположим, что случайные векторы $\vec{X}_1 \in L_2^m$, $\vec{X}_2 \in L_2^n$. Докажите, что[36]

$$M\left[\left(\vec{X}_2 - M\left(\vec{X}_2 \middle| \vec{X}_1\right)\right)^T \left(\vec{X}_2 - M\left(\vec{X}_2 \middle| \vec{X}_1\right)\right)\right] = \left\|\vec{X}_2 - M\left(\vec{X}_2 \middle| \vec{X}_1\right)\right\|_{L_2^n}^2 = \min_{\vec{\varphi}\in \mathrm{H}} \left\|\vec{X}_2 - \vec{\varphi}\left(\vec{X}_1\right)\right\|_{L_2^n}^2, \qquad \text{(i)}$$

где Н - подпространство (пространства $L_2^n$) всевозможных борелевских[37] вектор функций $\vec{\varphi}\left(\vec{X}_1\right) \in L_2^n$; $M\left(\vec{X}_2 \middle| \vec{X}_1\right)$ - условное математическое ожидание $\vec{X}_2$ относительно $\sigma$-алгебры порожденной $\vec{X}_1$.

***Пояснение.*** Утверждение задачи означает, что в гильбертовом пространстве $L_2^n(\Omega, \Xi, P)$ всевозможных квадратично интегрируемых случайных векторов над заданным вероятностным пространством $(\Omega, \Xi, P)$, ог-

---

[33] Поскольку $R$ - симметрическая матрица, то существует базис из собственных векторов, поэтому размерность подпространства $(\mathrm{Ker}\, R)^{\perp}$ равняется $n-k$, где $k$ - кратность собственного значения $\lambda = 0$ матрицы $R$. Поскольку $\det R = 0$, то $k \geq 1$.

[34] Покажите, что если $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ - последовательность нормально распределенных с.в. и $X_k \xrightarrow[k\to\infty]{L_2} X$, то с.в. $X$ также нормально распределена. Для того чтобы это доказать, заметим: $M\left[\left(\exp(i\mu X_k) - \exp(i\mu X)\right)^2\right] \leq |\mu|^2 M\left[(X_k - X)^2\right] \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$.

[35] См. А.А. Натан, О.Г. Горбачев, С.А. Гуз, Основы теории случайных процессов, М.: МЗ_Пресс, 2003, стр. 100 – 101.

[36] Можно даже написать точнее $M\left[\left(\left(\vec{X}_2\right)_k - M\left(\left(\vec{X}_2\right)_k \middle| \vec{X}_1\right)\right)^2\right] = \left\|\left(\vec{X}_2\right)_k - M\left(\left(\vec{X}_2\right)_k \middle| \vec{X}_1\right)\right\|_{L_2}^2 = \min_{\varphi\in\mathrm{H}} \left\|\left(\vec{X}_2\right)_k - \varphi\left(\vec{X}_1\right)\right\|_{L_2}^2$, $k = 1,...,n$, где Н - подпространство (пространства $L_2$) всевозможных борелевских вектор функций $\varphi\left(\vec{X}_1\right) \in L_2$

[37] Функции (вектор - функции) измеримые относительно борелевской $\sigma$ –алгебры называются борелевскими.

раниченный линейный оператор условного математического ожидания $M\left(\,\cdot\,\middle|\vec{X}_1\right):\ L_2^n \to L_2^n\ \left(\vec{X} \to M\left(\vec{X}\,\middle|\vec{X}_1\right)\right)$ есть ни что иное, как проекция $\vec{X} \in L_2^n$ на подпространство $\mathrm{H}$. Заметим, что поскольку $L_2^n$ плотно в $L_1^n$, то линейный ограниченный оператор условного математического ожидания $M\left(\,\cdot\,\middle|\vec{X}_1\right):\ L_2^n \to L_2^n$, определенный соотношением (i), можно продолжить по непрерывности (с сохранением свойства ограниченности и, разумеется, линейности) на $L_1^n$. Таким образом, получаем новое определение, условного математического ожидания, которое в ряде задач оказывается более удобным, поскольку имеет ясную геометрическую интерпретацию.

***Задача 15* (нормальная регрессия).*** В условиях п. 7 задачи 12 покажите, что минимум в (i) достигается на линейной вектор функции вида $\vec{\varphi}\left(\vec{X}_1\right) = A\vec{X}_1 + \vec{b}$.

***Задача 16* (оценивание сигнала на фоне шума)***[38]**.** Рассмотрим следующий диффузионный процесс (Ито) $\xi(t)$, заданный простейшим[39] стохастическим дифференциальным уравнением:[40]

$$d\xi(t) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \theta_k(t) dt + dW(t),$$

где $W(t)$ - винеровский процесс, отвечающий за неконтролируемые помехи (случайные шумы). Функции $\theta_k(t)$ - известны, параметры $\alpha_k$ - неизвестны и подлежат определению на основе наблюдения за процессом $\xi(t)$ на промежутке $t_0 \le t \le T$. При этом оценки неизвестных параметров $\vec{\alpha}^*$ ищутся в классе несмещенных оценок, т.е.[41] $\forall\ \vec{\alpha} \to M_{\vec{\alpha}}\vec{\alpha}^* = \vec{\alpha}$. Критериями являются:[42]

$$\min_{\vec{\alpha}^* \in L_2^n:\ M_{\vec{\alpha}}\vec{\alpha}^* = \vec{\alpha}} \left\|\vec{\alpha}^* - \vec{\alpha}\right\|_{L_2^n(\vec{\alpha})} = \min_{\vec{\alpha}^* \in L_2^n:\ M_{\vec{\alpha}}\vec{\alpha}^* = \vec{\alpha}} \left(M_{\vec{\alpha}}\left[\left(\vec{\alpha}^* - \vec{\alpha}\right)^T \left(\vec{\alpha}^* - \vec{\alpha}\right)\right]\right)^{1/2}.$$

Используя задачу 15 (см. также сноску 36), найдите $\vec{\alpha}^*$.

***Указание.*** Согласно задаче 15, $\vec{\alpha}^*$ - “имеет смысл поискать” в классе линейных функционалов от $\left\{\xi(t)\right\}_{t_0 \le t \le T}$ с коэффициентами, зависящими от $\left\{\theta_k(t)\right\}_{k=1,\ t_0 \le t \le T}^{n}$.

---

[38] Для решения этой задачи можно рекомендовать книгу Ю.А. Розанова, Случайные процессы. Краткий курс., М.: Наука, 1979, часть 2, § 8 - § 10.

[39] Простейшим, потому что в правую часть не входит $\xi(t)$.

[40] Шум принято описывать, именно, винеровским процессом (при этом совсем не обязательно, чтобы коэффициент при $dW(t)$ равнялся единице; допускается, что в общей постановке коэффициенты при $dt$ и $dW(t)$ зависят от $t$ и $\xi(t)$ (см., например, задачу 2, п. 5)). Тому есть несколько причин, которые в основном говорят о том, что шум следует выбирать в классе процессов Леви (при этом, если изучаемым явлениям не присущи “тяжелые хвосты”, то “удобнее” брать винеровский процесс, поскольку он является к тому же еще и гауссовским). Детали см. Б. Оксендаль, Стохастические дифференциальные уравнения, М.: Мир, 2003; А.Н. Ширяев, Основы финансовой стохастической математики, М.: ФАЗИС, 2004, т. 1, т. 2.

[41] Запись $M_{\vec{\alpha}}\vec{\alpha}^*$ - означает, что математическое ожидание вектора $\vec{\alpha}^*$ считается в предположении, что истинные значения неизвестных параметров равны (нижний индекс) $\vec{\alpha}$.

[42] Обратим внимание, что критериев много (каждому $\vec{\alpha}$ соответствует свой критерий, но поскольку истинного значения $\vec{\alpha}$ мы не знаем (цель как раз и заключается в том, чтобы это значение оценить), то “хотелось бы”, чтобы нашлось такое $\vec{\alpha}^*$, которое доставляет оптимум всем критериям, при сделанных ограничениях несмещенности). Оказывается, что такое $\vec{\alpha}^*$ найдется и это не “везение”, а общее свойство подобного рода задач оценивания, фильтрации, прогнозирования.

***Задача 17*.*** В модели Блэка – Шоулса – Мертона[43] эволюция цены акции описывается геометрическим броуновским движением $S(t)=S(0)\exp\left(at+\sigma W(t)\right)$, где $W(t)$ - винеровский процесс ($\sigma>0$). С помощью эргодической теоремы для случайных процессов оцените неизвестный параметр $a$, если известна реализация процесса $S(t)$ на достаточно длинном временном отрезке $[0,T]$. Предложите способ оценки неизвестного параметра $\sigma$. Имеет ли смысл пытаться строить по $S(t)$ процесс $Y(t)=f\left(S(t)\right)$ (подбирать функцию $f(\,\cdot\,)$) так, чтобы $Y(t)$ был эргодичен по математическому ожиданию и $Mf\left(S(t)\right)=\sigma^2$?

***Задача 18** (Вейль).*** Рассмотрим последовательность $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, где $a_k$ - первая цифра в десятичной записи числа $2^k$. Положим $I_m(a_k)=\begin{cases}1, & a_k=m\\ 0, & a_k\neq m\end{cases}$ ($m=1,2,\ldots,9$). Существует ли $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}I_m(a_k)$? Если существует, то найдите его.

**Указание.** Рассмотрим вероятностное пространство $X=(\Omega,\Xi,P)$, где $\Omega=[0,1)$, $\Xi$ - $\sigma$-алгебра борелевских множеств[44] на $[0,1)$, а $P$ - равномерная мера на $\Xi$, т.е. $P\left([a,b)\right)=b-a$. Рассмотрим с.в.

$$x(\omega)=\begin{cases}1, & \omega\in\left[\log_{10}m,\log_{10}(m+1)\right)\\ 0, & \omega\in\left[0,\log_{10}m\right)\cup\left[\log_{10}(m+1),1\right)\end{cases}.$$

Рассмотрим случайный процесс (в дискретном времени)

$X_k(\omega)=x\left(T^k\omega\right)$, где $T:\,[0,1)\to[0,1)$ определяется по формуле[45] $T\omega=\left(\omega+\log_{10}2\right)\mod 1$.

Покажите, что случайный процесс $X_k$ - стационарный в узком смысле. В предположении, что этот процесс эргодичен по математическому ожиданию[46] найдите искомый предел[47].

***Задача 19** (Гаусса – Гильдена - Вимана - Кузьмина)*[48]. Каждое число из промежутка $\Omega=[0,1)$ может быть разложено в цепную дробь (вообще говоря, бесконечную). Цепные дроби играют важную роль, например, в различных вычислениях (поскольку позволяют строить в определенном смысле наилучшие приближения иррациональных чисел рациональными), в теории динамических систем (КАМ теории). Для ра-

---

[43] Эта модель широко использовалась на практике (см. задачу 2, пп. 3, 5). В 1990 г. М. Шоулс и Р. Мертон за свою работу были награждены нобелевской премией по экономике. Сейчас популярным классом моделей является $S(t)=S(0)\exp\left(L\left(\tau(t)\right)\right)$, где $L(\,\cdot\,)$ - процесс Леви, $\tau(t)$ - случайный процесс, не зависящий от $L(\,\cdot\,)$, с возрастающими почти наверное траекториями.

[44] Т.е. $\Xi$ - минимальная $\sigma$-алгебра, содержащая всевозможные открытые множества $\Omega=[0,1)$.

[45] Важно заметить, что преобразование $T$ сохраняет меру, т.е. $\forall\ A\in\Xi\to P\left(T^{-1}A\right)=P(A)$. Собственно, и в более общей ситуации, известная из курса случайных процессов эргодическая теорема схожим образом переносится на динамические системы, которые задаются фазовым пространством $\Omega$ и динамикой $T:\ \Omega\to\Omega$. Согласно теореме Крылова – Боголюбова (см. Я.Г. Синай, Введение в эргодическую теорию, М.: ФАЗИС, 1996, лекция 2), если $\Omega$ - компакт, то всегда найдется как минимум одна инвариантная относительно $T$ мера на $\Xi$. Если построенной по такой динамической системе случайный процесс окажется эргодическим, то доля времени пребывания динамической системы в заданной области просто равняется мере (той самой инвариантной и эргодической) этой области. Ввиду вышесказанного интересно заметить, что установление эргодичности является трудной задачей. До сих пор строго не обоснована “эргодическая гипотеза Лоренца” для идеального газа в сосуде (см. В.В. Козлов, Тепловое равновесие по Гиббсу и Пуанкаре, Москва – Ижевск, РХД, 2002, Р. Минлос, Введение в математическую статистическую физику, М.: МЦНМО, 2002).

[46] См. А.Н. Ширяев, Вероятность-2, М.: МЦНМО, 2004, глава 5, § 2.

[47] Стоит обратить внимание, что в эргодической теореме фигурирует сходимость либо в $L_2$, либо в $L_1$, либо п.н.. А в данной задаче требуется (для доказательства существования предела и его вычисления), сходимость поточечная. Оказывается, для данной задачи из сходимости в $L_2$ легко следует сходимость п.н., откуда (в свою очередь) следует поточечная (подробности см. Я.Г. Синай, Введение в эргодическую теорию, М.: ФАЗИС, 1996, лекция 3 и И.П. Корнфельд, Я.Г. Синай, С.В. Фомин, Эргодическая теория, М.: Наука, 1980).

[48] См. В.И. Арнольд, Цепные дроби, М.: МЦНМО, 2001.

циональных чисел такие дроби конечны, для квадратичных иррациональностей – периодические (см. пример ниже, в котором период равен 1):[49]

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\ldots}}}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}}.$$

Покажите, что, не смотря на приведенный выше пример, для почти всех (в равномерной мере) точек $\omega\in[0,1)$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}I_m\left(a_k(\omega)\right)=\frac{1}{\ln 2}\ln\left(1+\frac{1}{m(m+2)}\right).$$

**Указание.** Покажите, что преобразование $T$: $[0,1)\to[0,1)$

$$T\omega=\begin{cases}\left\{\dfrac{1}{\omega}\right\}, & \omega\in(0,1)\\ 0, & \omega=0\end{cases},$$

где $\{5.8\}=0.8$ - дробна часть числа, сохраняет меру Гаусса

$$\forall\ A\in\Xi\to P(A)=\frac{1}{\ln 2}\int_A\frac{dx}{1+x}.$$

Далее рассуждайте аналогично предыдущей задаче (эргодичность возникшего случайного процесса можно не доказывать).

***Задача 20*.*** **1)** Может ли функция

$$R(t)=\begin{cases}1, & t\in[-T,T]\\ 0, & t\notin[-T,T]\end{cases}$$

быть характеристической функцией некоторой с.в.?

**2)** А корреляционной функцией некоторого стационарного в широком смысле случайного процесса?

**3)** Изменится ли ответ, если “чуть-чуть” размазать (сгладить) разрывы функции $R(t)$ в точках $t=\pm T$ ?

**4)** Что понимается под неотрицательной определенностью функции одного аргумента (двух аргументов)?

**5)** Верно ли, что все свойства характеристической функции (корреляционной функции) следуют из свойства неотрицательной определенности?

**6)** Равносильно ли свойство неотрицательной определенности характеристической функции некоторой абсолютно непрерывной (имеющей плотность распределения) с.в. свойству неотрицательности функции плотности распределения этой с.в.?

**7)** Какой физический смысл имеет спектральная плотность стационарного в широком смысле случайного процесса?

**8)** Равносильно ли свойство неотрицательной определенности корреляционной функции некоторого стационарного в широком смысле случайного процесса свойству неотрицательности спектральной плотности этого же процесса (в предположении, что рассматриваемый процесс, имеет спектральную плотность)?

***Задача 21*.*** На колебательный контур, содержащий конденсатор емкости $C$, катушку индуктивности $L$ и сопротивление $R$, подается случайное напряжение – стационарный в широком смысле случайный процесс $X(t)$, с известным математическим ожиданием $m_X$ спектральной функцией $s_X(\nu)$. На сопротивлении изме-

---

[49] Чтобы проверить выписанное соотношение достаточно заметить, что $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ - является корнем уравнения $x=\frac{1}{1+x}$ (причем, из принципа сжимающих отображений следует, что последовательность $x_{n+1}=\frac{1}{1+x_n}$, $x_0=1$ сходится именно к этому корню).

ряется напряжение $Y(t)$ (тоже случайный процесс). При каких условиях на $s_X(\nu)$ случайный процесс $Y(t)$ будет стационарным в широком смысле, и будет иметь спектральную плотность? Найдите, при этих условиях $m_Y$ и $s_Y(\nu)$. Сравнить полученный результат, со случаем вынужденных колебаний, т.е. когда напряжение неслучайное и, для определенности, синусоидальное (необходимые, но не заданные параметры задайте самостоятельно).

***Задача 22*.*** Может ли в условиях теоремы о непрерывности (дифференцируемости) случайного процесса в среднем квадратичном[50] ковариационная функция случайного процесса быть непрерывной, как функция двух переменных (иметь смешанную производную), на биссектрисе и иметь разрыв (не иметь смешанную производную) в какой-то точке вне биссектрисы?

***Задача 23*.*** Решить методом Монте - Карло линейное интегральное уравнение вида:

$$\varphi(x)=\int_G K(x,x')\varphi(x')\,dx'+f(x)=K\varphi(x)+f(x),$$

в предположении, что спектральный радиус линейного интегрального оператора $K$ меньше 1.

***Указание.*** В условиях задачи единственное решение интегрального уравнения представляется рядом Неймана, в котором можно ограничиться конечным числом слагаемых. Количество слагаемых определяется точностью, которую мы хотим получить. В фиксированной точке $x_0$, имеем

$$\varphi(x_0)\approx f(x_0)+Kf(x_0)+\ldots+K^l f(x_0). \qquad \text{(i)}$$

Таким образом, задача сводится к приближенному вычислению слагаемых этого ряда, т.е. кратных интегралов типа $K^j f(x_0)$.

Выберем в $G$ такую плотность $p(x)>0$ и условную плотность $p(x|x')>0$, что $\int_G p(x)dx=\int_G p(x|x')dx=1$. Определим в $G$ случайную траекторию $T_k=\{x_0\to x_1\to\ldots\to x_k\}$, где $x_0$ - реализация с.в. $\xi_0$ с плотностью $p(x)$, $x_j$ - реализация с.в. $\xi_j$ с плотностью $p(x_j|x_{j-1})$, $j=1,\ldots,k$. Положим, $w_0=1$, $w_j=w_{j-1}K(x_{j-1},x_j)/p(x_j|x_{j-1})$, $j=1,\ldots,k$; $v_j=w_j\dfrac{\varphi(x_0)}{p(x_0)}f(x_j)$, $j=1,\ldots,k$. Покажите, что $Mv_j=\langle\varphi,K^j f\rangle$, где $\langle\ ,\ \rangle$ - означает скалярное произведение в гильбертовом пространстве $L_2(G)$.

Реализовав $n$ случайных траекторий $(T_{k1},T_{k2},\ldots,T_{kn})$, получаем оценку $\breve{u}_j$ скалярных произведений $\breve{u}_j=\langle\varphi,K^j f\rangle$ согласно формулам

$$\breve{u}_j=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}v_{ij}, \qquad \text{(ii)}$$

где $v_{ij}$, $i=1,\ldots,n$ - реализация с.в. $v_j$ на $i$-й траектории $T_{ji}$.

Положим $\varphi(x)=\delta(x-x_0)$. Тогда $\langle\delta(x-x_0),K^j f(x)\rangle=K^j f(x_0)$. Возьмем в качестве $p(x)=\delta(x-x_0)$, т.е. все траектории $T_{ji}$ “стартуют” из фиксированной точки $x_0$ и $v_{j0}=w_j f(x_j)$. Имеем: $Mv_{j0}=K^j f(x_0)$.

Обоснуйте, почему слагаемые в (i) можно оценивать формулой (ii), где $v_{ij}$, $i=1,\ldots,n$ - реализация с.в. $v_j$ на $i$-й траектории $T_{ji}$ с фиксированной точкой “старта” $x=x_0$ для всех траекторий.

---

[50] См. А.А. Натан, О.Г. Горбачев, С.А. Гуз, Основы теории случайных процессов, М.: МЗ_Пресс, 2003, стр. 40 – 43.