

А.А. Белолипецкий

Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН
Московский физико-технический институт (государственный университет)

Математическое моделирование процесса десублимации изотопов водорода в лазерной мишени

Решается одна из задач математического моделирования технологических процессов производства лазерных мишеней. Это направление исследований в общей проблеме управляемого термоядерного синтеза занимает в настоящее время важное место. Инерциальный термоядерный синтез основан на очень быстром доведении ядерного топлива до сверхплотного состояния, а с этим и до термоядерных температур. Контейнер, содержащий ядерное топливо, называется мишенью. Мишень симметрично облучают со всех сторон лазерным излучением. При этом энергия излучения поглощается во внешней абляционной оболочке мишени, аблятор испаряется, ионизируется и разлетается. Создаваемый при таком разлете реактивный импульс давления сжимает неиспарившееся топливо, которое в центре мишени достигает необходимой плотности и температуры. Это и позволяет зажечь D-T термоядерную реакцию. Создание лазерной мишени предполагает накачку мишени газом до высоких давлений с последующим резким охлаждением ее. В работе изучается процесс вымораживания газообразных изотопов водорода на внутренней стенке оболочки лазерной мишени.

Ключевые слова: лазерная мишень, управляемый термоядерный синтез, математическая модель, параболические уравнения, сингулярные возмущения.

I. Введение

Настоящая работа посвящена решению одной из задач математического моделирования технологических процессов производства лазерных мишеней. Это направление исследований в общей проблеме управляемого термоядерного синтеза занимает в настоящее время одно из главных мест. Сам управляемый термоядерный синтез с инерциальным удержанием, или ИТС — инерциальный термоядерный синтез, основан на очень быстром доведении ядерного топлива до сверхплотного состояния, а с этим и до термоядерных температур [1–4]. Контейнер, содержащий ядерное топливо, а как правило, это дейтерий-тритиевая смесь, называется мишенью. Исследования показывают, что абляционное сжатие сферически или цилиндрически симметричной топливной мишени для формирования центра горения является энергетически оптимальным процессом. Для этого мишень симметрично облучают со всех сторон лазерным излучением или иными видами излучения (рентгеновское, ионные и электронные пучки) [5–6]. При этом энергия излучения поглощается во внеш-

ней абляционной оболочке мишени, аблятор испаряется, ионизируется и разлетается со скоростью порядка 100 км/с. Создаваемый при таком разлете реактивный импульс давления сжимает неиспарившееся топливо, которое в центре мишени достигает необходимой плотности и температуры. Последнее и позволяет зажечь D-T термоядерную реакцию. образующиеся в результате реакции альфа-частицы с энергией 3,52 МэВ теряют её во внутреннем слое холодного топлива и нагревают его. Образуется фронт термоядерного горения, который быстро распространяется в слое холодного топлива. Теоретические расчёты показывают, что для достижения условия брейквен (breakeven — условие, при котором энергия выхода в реакции термоядерного синтеза не меньше вложенной) необходимо существенное сжатие и нагрев вещества мишени до температур 10 кэВ. Для этого можно использовать одну из трёх схем облучения топливной мишени. Это прямое облучение, прямое зажигание, или быстрый поджиг, и непрямое рентгеновское облучение. Структура мишени и её физические характеристики, вообще говоря, зависят от схемы облучения, но неизменной остаётся одна черта:

мишень должна представлять собой сферическую оболочку с твёрдым слоем D-T топлива внутри нее. На первый взгляд, это простая конструкция. Но она оказалась достаточно сложной при её технической реализации [7–8]. Первая проблема состоит в том, чтобы доставить топливо внутрь многослойной полистироловой оболочки мишени, не разрушив ее. Одно из решений — поместить оболочку в камеру с D-T газообразной смесью, находящейся под давлением. В результате газ проникает через стенку мишени, постепенно заполняя ее. Давление газа внутри мишени повышается, а вместе с этим следует повышать и внешнее давление, но так, чтобы не разрушить оболочку. Поскольку в оптимальном по быстродействию режиме разность внешнего и внутреннего давлений не должна превышать критического значения, при котором может разрушиться оболочка, необходимо с высокой степенью точности определять давление газа внутри мишени, измерить которое невозможно. При этом внутреннее давление может достигать от 300 до 1000 атм. Было необходимо разработать адекватную математическую модель заполнения газопроницаемых оболочек до высоких давлений [9–10], когда состояние газа описывается уравнением Ван-дер-Ваальса. Результаты модельных расчётов в дальнейшем использовались при конструировании системы заполнения оболочек в лаборатории термоядерных мишеней нейтронно-физического отдела ФИАН им. П.Н. Лебедева. После заполнения газом мишень помещается в криостат, где охлаждается до температур фазовых переходов, в результате которых газ оседает на внутренней стенке мишени в виде твёрдого слоя. В работе изучается процесс вымораживания газообразных изотопов водорода на внутренней стенке оболочки лазерной мишени без образования жидкой фазы, то есть процесс десублимации.

II. Предположения модели и некоторые вспомогательные соотношения

На рис. 1 изображена лазерная мишень, которая представляет собой многослойную полистироловую сферическую

оболочку, внутри которой находится дейтерий-тритиевая газообразная смесь, охлаждённая до температуры тройной точки. В процессе десублимации на внутренней стенке оболочки вымерзает твёрдый шарообразный слой изотопов водорода, который далее будем называть криогенным, или топливным слоем.

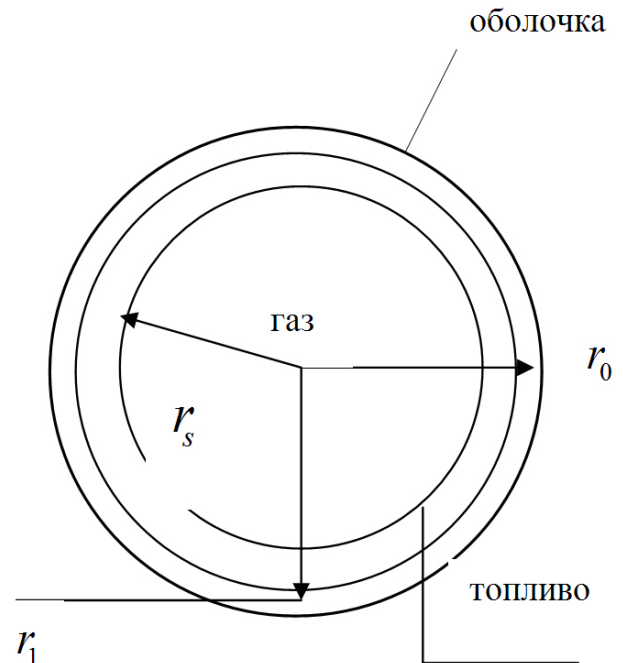


Рис. 1

Будем считать, что в процессе десублимации газ внутри оболочки представляет собой насыщенный пар, и его температура, давление и плотность связаны уравнением Клапейрона–Клаузиуса. Такой подход представляется более реалистичным, чем предположение о постоянстве температуры газообразной фазы, сделанное в работе [11]. Поэтому полученные ниже результаты несколько отличаются от тех, что были приведены в статье [11].

Вначале проведём анализ уравнения Клапейрона–Клаузиуса для газа, термодинамическое состояние которого описывается уравнением Клапейрона–Менделеева. Последнее допущение является в некоторой степени идеализацией и оправдывается в первую очередь попыткой аналитического решения поставленной ниже задачи.

Давление p , температура T и удельные объёмы v_g, v_s газообразного и твёрдого водорода в области тройной точки на фазовой диаграмме связаны уравнением Клапейрона–Клаузиуса

$$\frac{dp}{dT} = \frac{\lambda_s}{T(v_g - v_s)},$$

где λ_s — удельная теплота сублимации. Для водорода и его изотопов в окрестности тройной точки отношение v_s/v_g мало, поэтому предыдущее уравнение можно приблизить уравнением

$$\frac{dp}{dT} = \frac{\lambda_s}{T v_g}. \quad (1)$$

Термодинамическое равновесное состояние газообразной фазы внутри оболочки описывается уравнением Ван-дер-Ваальса. Наше упрощение сводится к предположению об идеальности газа, то есть к уравнению Клапейрона–Менделеева $pV = \frac{m}{\mu}RT$, откуда следует, что $v_g = \frac{V}{m} = \frac{RT}{\mu p}$, (μ — молярная масса газа). Подставим это выражение в (1) и проинтегрируем уравнение (1) по T . Получим хорошо известное соотношение между давлением и температурой идеального насыщенного пара:

$$p = C \exp \left\{ -\frac{\lambda_s \mu}{RT} \right\}. \quad (2)$$

Наша ближайшая задача найти связь между толщиной криогенного слоя $w = r_1 - r_s$ и температурой газа внутри оболочки, которая предполагается однородной по объёму. Обозначим T_{tp, ρ_0} — температуру, при которой начался процесс десублимации, и начальную плотность газа в мишени. Пусть r_1, r_s — внутренний радиус оболочки мишени и расстояние от центра мишени до внутренней поверхности шарового криогенного слоя соответственно. Тогда толщина криогенного слоя $w = r_1 - r_s$, а его объём $V_s = V_0 - \frac{4}{3}\pi r_s^3 = \frac{4}{3}\pi (r_1^3 - r_s^3)$, где V_0 — начальный объём газа. Левую часть уравнения (2) согласно закону Клапейрона–Менделеева запишем как

$$p = \frac{\rho}{\mu}RT = \frac{\rho_0 V_0 - \rho_s V_s}{V_0 - V_s} \frac{RT}{\mu} = \frac{\rho_0 RT}{\varepsilon \mu} \left(1 - \frac{1 - \nu}{(1 - \bar{w})^3} \right), \quad (3)$$

где $\nu = \frac{\rho_0}{\rho_s} \approx 0,22$ для изотопов водорода при температуре, близкой к тройной точке, а $\bar{w} = \frac{w}{r_1}$ — безразмерная относительная толщина криослоя. Подставляя выражение (3) в левую часть формулы (2) и учитывая, что при $T = T_{tp}$ плотность газа

$\rho = \rho_0$ и относительная толщина криослоя $\bar{w} = 0$, получим значение постоянной

$$C = \frac{\rho_0 RT_{tp}}{\mu} \exp \left\{ \frac{\alpha}{T_{tp}} \right\}.$$

Здесь $\alpha = \frac{\lambda_s \mu}{R} \approx \frac{990,2}{8,13} \text{ К} \approx 243 \text{ К}$. Вновь подставим (3) в левую часть (2) и используем только что полученное выражение для C . Теперь (2) примет вид

$$1 - \frac{1 - \nu}{(1 - \bar{w})^3} = \nu \frac{T_{tp}}{T} \exp \left\{ \alpha (T_{tp}^{-1} - T^{-1}) \right\} \equiv \nu G(T).$$

Разрешим это уравнение относительно \bar{w} . Получим

$$\bar{w} = 1 - \left[\frac{1 - \nu}{1 - \nu G} \right]^{1/3}. \quad (4)$$

Если $\nu = \frac{\rho_0}{\rho_s}$ мало, то (4) можно разложить в ряд по малому параметру ν и получить аналитическую зависимость $\bar{w}(T)$:

$$\bar{w} = \frac{w}{r_1} = \frac{\nu}{3} \left[1 - \frac{T_{tp}}{T} \exp \left\{ \alpha (T_{tp}^{-1} - T^{-1}) \right\} \right] + O(\nu^2). \quad (5)$$

Нетрудно видеть, что $\frac{d}{dT} (T e^{\frac{\alpha}{T}}) = e^{\frac{\alpha}{T}} \left(1 - \frac{\alpha}{T} \right) \leq 0$, если $T \leq \alpha \approx 243 \text{ К}$, что справедливо для того диапазона температур, при котором происходит десублимация. Отсюда следует, что правая часть (4) или (5) является монотонно убывающей функцией T . Таким образом, при убывании T от T_0 до 0 величина $\bar{w}(T)$ монотонно возрастает от 0 до примерно $\bar{w}_{\max} = 1 - \sqrt[3]{1 - \nu} \approx 0,08$. Если $\nu = \frac{\rho_0}{\rho_s}$ мало, то $\bar{w}_{\max} \approx \frac{\rho_0}{3\rho_s}$. Из уравнения (4) (а при малых значениях ν из (5)) получаем трансцендентную зависимость

$$T = F(\bar{w}) \equiv F \left(\frac{w}{r_1} \right), \quad (6)$$

где $F(\bar{w})$ — функция, обратная к функции, стоящей в правой части соотношения (4) (или (5)).

III. Математическая постановка начально-краевой задачи

Ниже $T_i(r,t)$, $k_i(T)$, $c_i(T)$, $\rho_i(T)$ обозначают температуру, коэффициент теплопроводности, теплоёмкость и плотность веществ соответственно. Индекс $i = sh, s, g$, где sh относится к оболочке, s, g определяют криогенный слой и газ. Тепловые потоки в оболочке и криослое описываются в сферически симметричном случае уравнением теплопроводности

$$\rho_i c_i \frac{\partial T_i}{\partial t} = \frac{\chi}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 k_i \frac{\partial T_i}{\partial r}, i = sh, s. \quad (7)$$

Коэффициент χ определяет отношение характерного пятна контакта, через которое идёт теплообмен с внешней средой, к поверхности мишени. Если мишень полностью погружена в охлаждающую среду, то для тонких оболочек $\chi \approx 1$.

На внешней поверхности оболочки справедливо равенство

$$T_{sh}(r_0, t) = T_{ext}, \quad (8)$$

где T_{ext} — внешняя температура, которая может зависеть от времени. Условие

$$T_{sh}(r_1, t) = T_s(r_1, t) \quad (9)$$

определяет непрерывность температуры на границе оболочка–криогенный слой. Баланс тепловых потоков на этой границе задаётся равенством

$$k_{sh} \frac{\partial T_{sh}}{\partial r} \Big|_{r=r_1} = k_s \frac{\partial T_s}{\partial r} \Big|_{r=r_1} \quad (10)$$

Баланс тепловых потоков на границе криослой–газ учитывает тепло, выделяющееся при десублимации,

$$\begin{aligned} \chi k_s \frac{\partial T_s}{\partial r} \Big|_{r=r_1-w(t)} &= \\ &= \chi k_g \frac{\partial T_g}{\partial r} \Big|_{r=r_1-w(t)} - \lambda_s \rho_s \frac{dw}{dt}. \end{aligned}$$

Здесь λ_s — удельная теплота десублимации. Поскольку температура газа предполагается однородной по объёму, то первое

слагаемое справа равно нулю и последнее равенство запишется в виде

$$\chi k_s \frac{\partial T_s}{\partial r} \Big|_{r=r_1-w(t)} = -\lambda_s \rho_s \frac{dw}{dt}. \quad (11)$$

Равенство температур на границе газ–криогенный слой имеет вид $T_s(r_1 - w(t), t) = T_g(t)$, которое согласно (6) записывается как

$$T_s(r_1 - w(t), t) = F(w(t)). \quad (12)$$

Считаем, что процесс десублимации начинается в момент $t = 0$. Тогда начальные условия таковы:

$$w(0) = 0, \quad (13)$$

$$T_g(0) = T_{tp}, \quad (14)$$

$$T_{sh}(r, 0) = \varphi(r), \quad (15)$$

где T_{tp} — температура, при которой начался процесс десублимации, например, температура тройной точки газа, а $\varphi(r)$ — распределение температур внутри оболочки в начальный момент времени. Считаем, что граничные условия для $\varphi(r)$ согласованы с граничными условиями нашей задачи, то есть

$$\varphi(r_0) = T_{ext}, \quad \varphi(r_1) = T_s(r_1, 0) = T_g(0).$$

Сразу отметим, что решение поставленной выше задачи «забывает» начальные условия, поэтому условие (15) далее существенной роли играть не будет.

Введём безразмерную температуру $\theta = \frac{T}{T_{ext}}$. Для физических коэффициентов криогенного слоя k_s, c_s, ρ_s используем линейные аппроксимации

$$k_s = 5 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Дж}}{\text{см} \cdot \text{с} \cdot \text{К}},$$

$$c_s = \bar{c}_s \cdot \theta, \quad \text{где } \bar{c}_s = 1 \frac{\text{Дж}}{\text{г} \cdot \text{К}}, \quad \rho_s = 0,09 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}.$$

Для упрощения исследования поставленной начально-краевой задачи (8)–(15) для системы уравнений (7) запишем её в безразмерной форме. Для этого введём следующие переменные и параметры.

Характерное время процесса десублимации можно оценить величиной

$$t_1^* = \frac{\rho_0 V_g \lambda_s}{\chi \bar{k}_{sh} 4\pi r_0^2 \left(\frac{(T_{tp} - T_{ext})}{(r_0 - r_1)} \right)}.$$

Здесь $\lambda_s \approx 990$ Дж/г — удельная теплота сублимации.

Введём $\tau = \frac{t}{t_1^*}$ — безразмерное время; $\theta_i = \frac{T_i}{T_{ext}}$ — безразмерная температура в слое $i = sh, s, g$; $x = \frac{r_0-r}{r_0-r_1}$, $u = \frac{r_1-r}{w_{max}}$ — безразмерные пространственные переменные в оболочке и криослое соответственно; $\delta = \frac{r_0-r_1}{r_0}$ — безразмерная толщина оболочки; параметр δ^{-1} называется ещё аспектным отношением. Пусть далее $\bar{w} = \frac{w}{w_{max}}$ — безразмерная толщина криогенного слоя.

Переменная x будет использоваться для точек оболочки. Очевидно, что на её внутренней и внешней границах значения x равны 1 и 0 соответственно. Пространственную переменную u будем использовать для точек криогенного слоя. На внешней и внутренней границе этого слоя u равны соответственно 0 и \bar{w} .

Будем считать оболочку стеклянной (стекло «пирекс»). Зависимость c_g, c_{sh}, k_{sh} от температуры можно приближённо задать линейными соотношениями $k_{sh} = \bar{k}_{sh} \cdot (1 + \alpha_{sh}\theta)$, $c_{sh} = \bar{c}_{sh} \cdot (1 + \beta_{sh}\theta)$, где $\theta = T/T_{ext}$ — безразмерная температура.

В частности, параметры, входящие в приведённые выше формулы для водорода, заключённого в стеклянную оболочку под давлением 250 атм, при температурах порядка 300 К имеют следующие значения:

$$\bar{k}_{sh} = 1,4 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Вт}}{\text{см} \cdot \text{К}}, \alpha_{sh} = 0,14,$$

$$\bar{c}_{sh} = 6 \cdot 10^{-2} \frac{\text{Дж}}{\text{г} \cdot \text{К}}, \beta_{sh} = 0,2, \quad \rho_{sh} = 2,3 \text{ г/см}^3.$$

Теплоёмкость c_g для газа практически не зависит от температуры и равна $c_g = 1,5R = 6,2 \frac{\text{Дж}}{\text{г} \cdot \text{К}}$. Плотность газообразного водорода при давлении 250 атм в оболочке радиуса $r_0 = 0,5$ мм при комнатной температуре равна $\rho_0 = \rho_g = 2 \cdot 10^{-2} \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$.

В безразмерных переменных система уравнений (7) для $\theta_{sh}(x, \tau), \theta_s(u, \tau)$ примет вид

$$\varepsilon(1 + \beta_{sh}\theta_{sh}) \frac{\partial \theta_{sh}}{\partial \tau} = \frac{1}{(1 - \delta x)^2} \times \\ \times \frac{\partial}{\partial x} (1 - \delta x)^2 (1 + \alpha_{sh}\theta_{sh}) \frac{\partial \theta_{sh}}{\partial x}, \quad (16)$$

$$\varepsilon \theta_s \frac{\partial \theta_s}{\partial \tau} = \frac{\gamma}{(1 - \delta_1 u)^2} \frac{\partial}{\partial u} (1 - \delta_1 u)^2 \frac{\partial \theta_s}{\partial u}. \quad (17)$$

Здесь параметр $\delta_1 = \frac{w_{max}}{r_1} = \bar{w}_{max} \approx 0,08$.

Величины

$$\varepsilon = \frac{(\delta r_0)^2 \rho_{sh} \bar{c}_{sh}}{\chi \bar{k}_{sh} t_1^*} = \frac{3\delta \rho_{sh} \bar{c}_{sh} \cdot (T_{tp} - T_{ext})}{\lambda_s \rho_0} \approx$$

$$\approx 0,005,$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\delta_1^2 r_1^2 \rho_s \bar{c}_s}{\chi k_s t_1^*} =$$

$$= 3(T_{tp} - T_{ext}) \frac{\rho_s \bar{c}_s (\delta_1 (1 - \delta))^2 \bar{k}_{sh}}{\rho_0 \lambda_s \delta k_s} \approx 0,0005$$

и $\gamma = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} \approx 10$.

Параметр ε является малым. Таким образом, система (16)–(17) является сингулярно возмущённой системой полулинейных параболических уравнений. Краевые условия (8)–(9) примут вид

$$\theta_{sh}(0, \tau) = 1, \quad (18)$$

$$\theta_{sh}(1, \tau) = \theta_s(0, \tau). \quad (19)$$

Балансовое соотношение (10) запишется как

$$\frac{\partial \theta_s(0, \tau)}{\partial u} = \frac{\delta_1 r_1 \bar{k}_{sh} (1 + \alpha_{sh} \theta_{sh}(1, \tau))}{\delta r_0 k_s} \frac{\partial \theta_{sh}(1, \tau)}{\partial x}. \quad (20)$$

$$\lambda_s \rho_s \frac{w_{max}}{t_1^*} \frac{d\bar{w}}{d\tau} = \frac{\chi k_s T_{ext}}{\delta_1 r_1} \frac{\partial \theta_s}{\partial u} \Big|_{u=\bar{w}(\tau)},$$

или

$$\frac{d\bar{w}}{d\tau} = \xi \frac{\partial \theta_s(u, \tau)}{\partial u} \Big|_{u=\bar{w}(\tau)},$$

где

$$\xi = \frac{\delta r_0^2 k_s \rho_0 T_{ext}}{3\delta_1^2 r_1^2 \bar{k}_{sh} \rho_s (T_{tp} - T_{ext})}.$$

Равенство безразмерных температур газа и криослоя на границе их раздела согласно (6) имеет вид $\theta_s(\bar{w}(\tau), \tau) = f(\bar{w}(\tau))$, где

$$f(\bar{w}) \equiv \frac{F(\delta_1 \bar{w})}{T_{ext}}.$$

Начальные условия (13)–(15) тоже очевидным образом записываются в новых обозначениях:

$$\bar{w}(0) = 0, \theta_g(0) = \frac{T_{tp}}{T_{ext}},$$

$$\theta_{sh}(x, 0) = \bar{\varphi}(x), x \in [0, 1]. \quad (21)$$

Поскольку начальные условия согласованы с краевыми, то $\bar{\varphi}(0) = 1, \bar{\varphi}(1) = \theta_g(0)$.

В дальнейшем при решении сингулярно возмущённой задачи (16)–(21) мы ограничимся построением лишь регулярной части решения, которая «не помнит» начальные условия. Погранслоевая (или сингулярная) компонента решения быстро их «забывает».

Плотность газа и безразмерная толщина криогенного слоя $\bar{w} = w/r_1$ при предположении об отсутствии жидкой фазы в каждый момент времени связаны соотношением

$$\rho_g(\tau) = \rho_s \left[1 - \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_s} \right) \left(\frac{1}{1 - \bar{w}(\tau)} \right)^3 \right], \quad (22)$$

где $\rho_0 = \rho_g(0)$. Как отмечалось ранее, процесс десублимации закончится, если в некоторый момент плотность газа станет достаточно малой, в идеале равной нулю. В этом случае выражение в квадратных скобках обнуляется, и мы имеем $1 - \bar{w} = \sqrt[3]{1 - \nu}$, где $\nu = \frac{\rho_0}{\rho_s}$. Отсюда следует, что максимальная безразмерная толщина \bar{w}_{\max} криослоя равна приблизительно $\bar{w}_{\max} = 1 - \sqrt[3]{1 - \nu}$, а $w_{\max} = r_1 \bar{w}_{\max}$. Таким образом, максимально возможное значение безразмерного времени процесса десублимации τ_{\max} получаем, решая уравнение

$$\bar{w}(\tau_{\max}) = \bar{w}_{\max},$$

или в других обозначениях:

$$\bar{\bar{w}}(\tau_{\max}) = 1.$$

Если же процесс десублимации заканчивается тогда, когда давление паров водородных изотопов больше нуля и равно

ρ_g^* , то в этом случае согласно (22) величина

$$\bar{w}^* = 1 - \sqrt[3]{\frac{\rho_s - \rho_0}{\rho_s - \rho_g^*}},$$

и продолжительность процесса десублимации τ^* в безразмерных единицах есть корень уравнения

$$\bar{\bar{w}}(\tau^*) = \bar{w}^* \frac{r_1}{w_{\max}}.$$

Таким образом, основным результатом решения задачи (16)–(21) для нас будет построение функции $\bar{w}(\tau)$, описывающей динамику изменения толщины безразмерного слоя.

Решение поставленной задачи будем искать в виде суммы регулярных и сингулярных слагаемых:

$$\theta_{sh}(x, \tau, \varepsilon) = \theta_{sh}^{(r)}(x, \tau, \varepsilon) + \Pi^{(sh)}(x, \bar{\tau}, \varepsilon),$$

$$\theta_s(x, \tau, \varepsilon) = \theta_s^{(r)}(x, \tau, \varepsilon) + \Pi^{(s)}(x, \bar{\tau}, \varepsilon).$$

Здесь $\bar{\tau} = \tau/\varepsilon$. Ограничимся поиском нулевого приближения регулярной составляющей решения, которое ищем в виде асимптотического ряда по степеням ε

$$\theta_i^{(r)}(x, \tau, \varepsilon) = \theta_i^{(0)}(x, \tau) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \theta_i^{(k)}(x, \tau), \quad i = sh, s. \quad (23)$$

Сингулярная составляющая ищется так, как описано в Приложении. Можно показать, что эта составляющая быстро стремится к нулю, и ею можно пренебречь.

IV. Построение приближённого решения задачи о десублимации

В данном параграфе будет построено нулевое приближение задачи (16)–(21), то есть будут найдены первые члены $\theta_i^{(0)}(x, \tau)$, $i = sh, s$ рядов (23). Запишем уравнение (16) в виде

$$\varepsilon \frac{\partial \theta_{sh}}{\partial \tau} = H(\theta_{sh}, x), \quad (24)$$

где нелинейный оператор

$$H(\theta_{sh}, x) \equiv \frac{1}{(1 - \delta x)^2 (1 + \beta_{sh} \theta_{sh})} \times \frac{\partial}{\partial x} (1 - \delta x)^2 (1 + \alpha_{sh} \theta_{sh}) \frac{\partial \theta_{sh}}{\partial x}.$$

Для того чтобы найти нулевые приближения уравнения (24), положим (см. Приложение):

$$H(\theta_{sh}^{(0)}, x) = 0, \text{ или}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (1 - \delta x)^2 \left(1 + \alpha_{sh} \theta_{sh}^{(0)} \right) \frac{\partial \theta_{sh}^{(0)}}{\partial x} = 0. \quad (25)$$

Аналогично в уравнении (17) нулевое приближение удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial u} (1 - \delta_1 u)^2 \frac{\partial \theta_s^{(0)}}{\partial u} = 0. \quad (26)$$

Краевые условия для $\theta_{sh}^{(0)}, \theta_s^{(0)}$ имеют вид (18)–(21), где вместо символа θ следует использовать $\theta^{(0)}$.

Интегрируя (25)–(26) по x и u соответственно, получим

$$\frac{\left(1 + \alpha_{sh}\theta_{sh}^{(0)}(x, \tau)\right)^2}{2\alpha_{sh}} = \frac{c_0(\tau)}{\delta(1 - \delta x)} + c_1(\tau), \quad (27)$$

$$\theta_s^{(0)}(u, \tau) = \frac{d_0(\tau)}{\delta_1(1 - \delta_1 u)} + d_1(\tau). \quad (28)$$

Из (27), используя (18), найдём $c_1(\tau)$ и, подставив вновь в (27), получим

$$\frac{c_0(\tau)x}{1 - \delta x} = \frac{1}{2\alpha_{sh}} \left[\left(1 + \alpha_{sh}\theta_{sh}^{(0)}(x, \tau)\right)^2 - \left(1 + \alpha_{sh}\right)^2 \right]. \quad (29)$$

Из (28), (29) и условия (19) равенства температур на границе оболочка — криослой следует выражение для

$$d_1 = \frac{1}{\alpha_{sh}} \left[\sqrt{\frac{2\alpha_{sh}c_0}{1 - \delta} + (1 + \alpha_{sh})^2} - 1 \right] - \frac{d_0}{\delta_1}. \quad (30)$$

Дифференцируя (27) по x , а (28) по u , выразим

$$\frac{\partial \theta_{sh}^{(0)}}{\partial x} = \frac{c_0(\tau)}{(1 + \alpha_{sh}\theta_{sh}^{(0)})(1 - \delta x)^2},$$

$$\frac{\partial \theta_s^{(0)}}{\partial u} = \frac{d_0(\tau)}{(1 - \delta_1 u)^2}. \quad (31)$$

Подставим правые части (31) в (20) и найдём связь между d_0 и c_0 : $d_0(\tau) = \eta c_0(\tau)$,

$$\text{где } \eta = \frac{\delta_1 r_1 \bar{k}_{sh}}{\delta r_0 k_s (1 - \delta)^2}.$$

Используем в (20) выражение (31). С учётом (37) дифференциальное уравнение (20) примет вид

$$\frac{d\bar{w}}{d\tau} = \xi_1 \frac{c_0(\tau)}{(1 - \delta_1 \bar{w})},$$

$$\text{где } \xi_1 = \frac{r_0 \rho_0 T_{ext}}{3\delta_1 r_1 \rho_s (T_{tp} - T_{ext})}.$$

Определим вид $c_0(\tau)$. Подставим (30) в (28) и воспользуемся соотношением (37). Тогда выражение для

$$\theta_s^{(0)}(u, \tau) = \frac{1}{\alpha_{sh}} \left[\sqrt{\frac{2\alpha_{sh}c_0}{1 - \delta} + (1 + \alpha_{sh})^2} - 1 \right] + \frac{\eta c_0 u}{1 - \delta_1 u}.$$

Используем его в (21). Тогда для переменной $z = \alpha_{sh}c_0$ получим иррациональное уравнение

$$\left[\sqrt{\frac{2z}{1 - \delta} + (1 + \alpha_{sh})^2} - 1 \right] = \alpha_{sh} f(\bar{w}) - \frac{\eta \bar{w} z}{1 - \delta_1 \bar{w}},$$

которое равносильно квадратному уравнению

$$a_0^2 z^2 - 2[1 + a_0(1 + \alpha_{sh}f)]z + \alpha_{sh}(f - 1)[2 + \alpha_{sh}(f + 1)] = 0$$

в предположении, что $1 - \delta \approx 1$.

Здесь

$$a_0 = \frac{\eta \bar{w}}{1 - \delta_1 \bar{w}}. \quad (32)$$

Поскольку $\eta \approx 0,47, \delta_1 = \bar{w}_{\max} \approx 0,08$, то для значений $\bar{w} \in (0, 0,1)$ согласно (32) полученное квадратное уравнение можно заменить линейным, положив $a_0 = 0$. Если $\bar{w} \in [0, 1, 1]$, то требуется решать квадратное уравнение, взяв в качестве решения меньший из корней, поскольку он при $a_0 \rightarrow 0$ стремится к решению аппроксимирующего линейного уравнения. Таким образом, мы получим

$$c_0 = \Phi(\bar{w}(\tau)), \text{ где}$$

$$\Phi = \begin{cases} \frac{(f(\bar{w}) - 1)[2 + \alpha_{sh}(f(\bar{w}) + 1)]}{2[1 + a_0(\bar{w})(1 + \alpha_{sh}f(\bar{w}))]}, & \bar{w} \in [0, 0,1); \\ \frac{1 + a_0(\bar{w})(1 + \alpha_{sh}f(\bar{w})) - \sqrt{D}}{\alpha_{sh}a_0^2(\bar{w})}, & \bar{w} \in [0, 1, 1]. \end{cases}$$

В этом выражении

$$D(\bar{w}) = 1 + 2a_0(\bar{w})(1 + \alpha_{sh}f(\bar{w})) + a_0^2(\bar{w})(1 + \alpha_{sh})^2.$$

Подставим (40) в дифференциальное уравнение (38), проинтегрируем последнее и

получим связь между безразмерной толщиной $\bar{w} = \frac{w}{w_{\max}}$ и безразмерным временем процесса десублимации $\tau = \frac{t}{t_1^*}$:

$$\tau = \frac{1}{\xi_1} \int_0^{\bar{w}} \frac{(1 - \delta_1 s)}{\Phi(s)} ds. \quad (33)$$

Максимальное время течения процесса десублимации равно

$$\tau_{\max} = \frac{1}{\xi_1} \int_0^1 \frac{(1 - \delta_1 s)}{\Phi(s)} ds.$$

В интеграле (33) используется функция $\Phi(\bar{w})$, для определения которой требуется знать функцию $f(\bar{w})$. Последняя задается неявно, что при вычислениях может создать неудобства. Во избежание этого запишем (33) другим способом, используя вместо \bar{w} переменную θ . Из равенства (4) следует

$$\bar{w} \equiv W(\theta), \quad (34)$$

где

$$W(\theta) = \frac{1}{\bar{w}_{\max}} \left[1 - \left(\frac{1 - \nu}{1 - \nu \bar{G}(\theta)} \right)^{1/3} \right]. \quad (35)$$

Функция

$$\bar{G}(\theta) = \frac{\theta_{tp}}{\theta} \exp(\bar{\alpha}(\theta_{tp}^{-1} - \theta^{-1})).$$

Здесь $\bar{\alpha} = \frac{\alpha}{T_{ext}} = \frac{\lambda_s \mu}{RT_{ext}} \approx 60$ для водорода. Очевидно,

$$\bar{G}'(\theta) = \frac{\theta_{tp}}{\theta^2} \exp(\bar{\alpha}(\theta_{tp}^{-1} - \theta^{-1})) (\bar{\alpha} \theta^{-1} - 1).$$

Из (34)–(35) получаем выражение для

$$\frac{d\bar{w}}{d\theta} = -B(\theta) \bar{G}'(\theta),$$

где

$$B(\theta) = \frac{\nu(1 - \nu)^{1/3}}{3\bar{w}_{\max}(1 - \nu \bar{G}(\theta))^{4/3}}.$$

Пусть θ_{\min} — безразмерная температура, при которой заканчивается процесс десублимации, то есть

$$W(\theta_{\min}) = 1.$$

Аналогично пусть $\bar{\theta}$ есть корень уравнения

$$W(\bar{\theta}) = 0,1.$$

Тогда функция $\Phi(\bar{w})$ следующим образом зависит от температуры θ :

$$\bar{\Phi}(\theta) = \begin{cases} \frac{(\theta-1)[2+\alpha_{sh}(\theta+1)]}{2[1+A(\theta)(1+\alpha_{sh}\theta)]}, & \theta \in [\bar{\theta}, \theta_{tp}] \\ \frac{1+A(\theta)(1+\alpha_{sh}\theta)-\sqrt{\bar{D}(\theta)}}{\alpha_{sh}A^2(\theta)}, & \theta \in [\theta_{\min}, \bar{\theta}]. \end{cases};$$

Здесь

$$A(\theta) = \frac{\eta W(\theta)}{1 - \delta_1 W(\theta)},$$

$$\bar{D}(\theta) = 1 + 2A(\theta)(1 + \alpha_{sh}\theta) + A^2(\theta)(1 + \alpha_{sh})^2.$$

Из сказанного выше и (33) следует, что

$$\tau(\theta) = \frac{1}{\xi_1} \int_{\theta}^{\theta_{tp}} \frac{1 - \delta_1 W(\theta)}{\bar{\Phi}(\theta)} B(\theta) \bar{G}'(\theta) d\theta.$$

Максимальное значение длительности процесса десублимации равно $\tau(\theta_{\min})$. Связь между безразмерной толщиной криогенного слоя и безразмерной температурой задается соотношениями (34)–(35).

Ниже на рис. 2 и 3 приведены графики функций $\bar{w}(\tau), w(t)$ для мишени, параметры которой: мишень — сферическая оболочка из стекла «пирекс» радиуса 0,5 мм, толщины 0,025 мм. Начальное давление газообразного водорода в оболочке 250 атм. Здесь можно считать, что расчётное время отражает реальность, если в мишени сохраняется более 10% начальной массы газа.

зависимость безразмерной толщины криогенного слоя от безразмерного времени

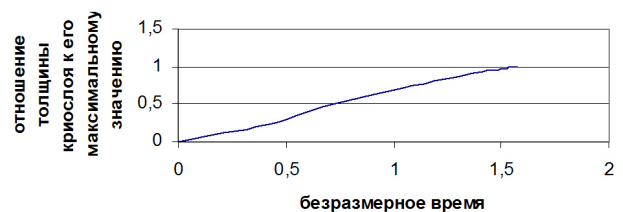


Рис. 2

зависимость толщины криослоя от времени

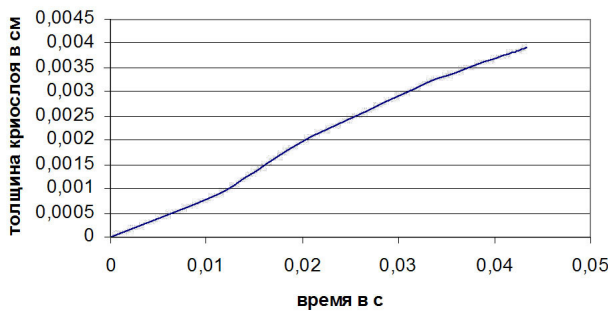


Рис. 3

V. Приложение

Рассмотрим дифференциальное уравнение в банаховом пространстве B

$$\varepsilon \frac{dz}{dt} = H(z,t) \tag{36}$$

с начальным условием

$$z(0) = \eta. \tag{37}$$

Здесь ε — малый параметр, а $H(z,t)$ — нелинейный, вообще говоря, неограниченный оператор $B \times R \Rightarrow B$, бесконечно дифференцируемый по t , допускающий существование бесконечно дифференцируемого решения $z_0(t)$ уравнения

$$H(z,t) = 0. \tag{38}$$

Изложенная ниже схема решения уравнения (36) принадлежит профессору А.М. Тер-Крикорову [12]. Она является модификацией подходов, изложенных в [13].

Обозначим $H_k(u_1, u_2, \dots, u_k, t)$ полилинейные операторы степени $k = 2, 3, \dots$ с областью определения $D \subset B$ и значениями в B . То есть

$$H_k(\alpha u_1, \alpha u_2, \dots, \alpha u_k, t) = \alpha^k H_k(u_1, u_2, \dots, u_k, t),$$

и для любого i

$$\begin{aligned} H_k(u_1, \dots, u_i + v_i, \dots, u_k, t) &= \\ &= H_k(u_1, u_2, \dots, u_k, t) + H_k(u_1, \dots, v_i, \dots, u_k, t). \end{aligned} \tag{39}$$

Пусть далее для некоторого $\delta > 0$ и всех u таких, что $|u| \leq \delta$:

$$H(z_0(t) + u, t) = L(t)u + \sum_{k=2}^{\infty} H_k(u, u, \dots, u, t).$$

Здесь $L(t) = H_z(z_0(t), t)$ — линейный оператор, являющийся производной Фреше оператора $H(z, t)$ по z в точке $z_0(t)$.

Решение уравнения (36) будем искать в виде

$$z(t, \varepsilon) = Z(t, \varepsilon) + \Pi(\tau, \varepsilon), \tag{40}$$

$$\tau = \frac{t}{\varepsilon}, \quad \Pi(0, \varepsilon) = \eta - Z(0, \varepsilon). \tag{41}$$

Подставим сумму (40) в уравнение (36). Получим

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{dZ(t, \varepsilon)}{dt} + \frac{d\Pi(\tau, \varepsilon)}{d\tau} &= H(Z(t, \varepsilon), t) + \\ + H[Z(\varepsilon\tau, \varepsilon) + \Pi(\tau, \varepsilon), \varepsilon\tau] &- H(Z(\varepsilon\tau, \varepsilon), \varepsilon\tau). \end{aligned}$$

Положим

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{dZ(t, \varepsilon)}{dt} &= H(Z(t, \varepsilon), t), \tag{42} \\ \frac{d\Pi(\tau, \varepsilon)}{d\tau} &= \\ &= H[Z(\varepsilon\tau, \varepsilon) + \Pi(\tau, \varepsilon), \varepsilon\tau] - H(Z(\varepsilon\tau, \varepsilon), \varepsilon\tau) \end{aligned} \tag{43}$$

с начальным условием (41). Если уравнения (41)–(43) выполняются, то сумма (40) является решением задачи Коши (36)–(37).

Решение системы дифференциальных уравнений (42)–(43) будем искать в виде формальных рядов по целым степеням параметра ε :

$$Z(t, \varepsilon) = z_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} z_k(t) \varepsilon^k, \tag{44}$$

$$\Pi(\tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \Pi_k(\tau) \varepsilon^k, \quad \Pi_0(0) = \eta - z_0(0). \tag{45}$$

Подставим ряды (45) в правую часть уравнения (42). Получим согласно (39):

$$\begin{aligned} H(z_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} z_k(t) \varepsilon^k, t) &= \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (L(t)z_k(t) + g_k(z_0(t), \dots, z_{k-1}(t), t)) \varepsilon^k. \end{aligned} \tag{46}$$

Выражения для операторов g_k определяются согласно (39) операторами L, H_2, \dots, H_k . Например, $g_1 \equiv 0, g_2 = H_2(z_1, z_1),$

$$g_3 = H_2(z_1, z_2) + H_2(z_2, z_1) + H_3(z_1, z_1, z_1). \tag{47}$$

Подставляя (44), (46) в (43) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях параметра ε , получим рекуррентную систему уравнений

$$\frac{dz_{k-1}}{dt} = L(t)z_k(t) + g_k(z_0(t), \dots, z_{k-1}(t), t),$$

$$k \geq 1. \quad (48)$$

Предположение 1. Линейный оператор $L(t) = H_z(z_0(t), t)$ обратим в D .

В этом случае уравнения (48) последовательно разрешимы и

$$z_k(t) =$$

$$= L^{-1}(t) \left[\frac{dz_{k-1}}{dt} - g_k(z_0(t), \dots, z_{k-1}(t), t) \right]. \quad (49)$$

Подставим ряды (44)–(45) в уравнение (43). Приравняем слагаемые при нулевых степенях параметра ε и положим в коэффициентах $\varepsilon\tau = 0$. Получим

$$\frac{d\Pi_0(\tau)}{d\tau} =$$

$$= H[z_0(0) + \Pi_0(\tau), 0] - H(z_0(0), 0). \quad (50)$$

В силу уравнения (3) второе слагаемое в правой части равно нулю. Из последнего уравнения и представления (4) с учётом сделанного замечания получаем задачу Коши для $\Pi_0(\tau)$:

$$\frac{d\Pi_0}{d\tau} = L(o)\Pi_0(\tau) + \sum_{m=2}^{\infty} H_m(\Pi_0, \dots, \Pi_0, 0),$$

$$\Pi_0(0) = \eta - z_0(0). \quad (51)$$

Пусть нелинейный оператор $H(z, t)$ представим в окрестности точки $z_0(0) + \Pi_0(\tau)$ в виде

$$H(z_0(0) + \Pi_0(\tau) + u, \varepsilon\tau) = H(z_0(0) + \Pi_0(\tau), 0) +$$

$$+ \Lambda(\tau)u + \sum_{k=2}^{\infty} h_k(u, u, \dots, u, \tau), \quad (52)$$

где $h_k(u_1, u_2, \dots, u_k, \tau)$ — полилинейные операторы от u_1, \dots, u_k , то есть

$$h_k(\alpha u_1, \alpha u_2, \dots, \alpha u_k, \tau) = \alpha^k h_k(u_1, u_2, \dots, u_k, \tau),$$

$$h_k(u_1, \dots, u_i + v_i, \dots, u_k, \tau) = h_k(u_1, u_2, \dots, u_k, \tau) +$$

$$+ h_k(u_1, \dots, v_i, \dots, u_k, \tau),$$

а $\Lambda(\tau)$ — линейный оператор, являющийся производной Фреше оператора $H(z, \varepsilon\tau)$ в точке $z = z_0(0) + \Pi_0(\tau)$.

Подставим ряды (44)–(45) в правую часть уравнения (43). Получим согласно (39), (52):

$$H \left[z_0(\varepsilon\tau) + \Pi_0(\tau) + \sum_{k=1}^{\infty} (z_k(\varepsilon\tau) + \Pi_k(\tau)) \varepsilon^k, \varepsilon\tau \right] -$$

$$- H \left[z_0(\varepsilon\tau) + \sum_{k=1}^{\infty} z_k(\varepsilon\tau) \varepsilon^k, \varepsilon\tau \right] =$$

$$= H[z_0(0) + \Pi_0(\tau), 0] - H(z_0(0), 0) +$$

$$+ H \left[z_0(\varepsilon\tau) + \Pi_0(\tau) + \sum_{k=1}^{\infty} (z_k(\varepsilon\tau) + \Pi_k(\tau)) \varepsilon^k, \varepsilon\tau \right] -$$

$$- H[z_0(\varepsilon\tau) + \Pi_0(\tau), \varepsilon\tau] +$$

$$+ H[z_0(\varepsilon\tau) + \Pi_0(\tau), \varepsilon\tau] - H[z_0(0) + \Pi_0(\tau), 0] +$$

$$+ H(z_0(0), 0) - H \left[z_0(\varepsilon\tau) + \sum_{k=1}^{\infty} z_k(\varepsilon\tau) \varepsilon^k, \varepsilon\tau \right] =$$

$$= H[z_0(0) + \Pi_0(\tau), 0] - H(z_0(0), 0) +$$

$$+ \Lambda(\tau) \sum_{s=1}^{\infty} z_s(\varepsilon\tau) \varepsilon^s + \Lambda(\tau) \sum_{k=1}^{\infty} \Pi_k(\tau) \varepsilon^k +$$

$$+ \sum_{m=2}^{\infty} h_m(\zeta, \dots, \zeta, \varepsilon\tau) - \Lambda(\tau) \sum_{s=1}^{\infty} z_s(\varepsilon\tau) \varepsilon^s -$$

$$- \sum_{k=2}^{\infty} \left[\sum_{m=2}^k \sum_{i_1 + \dots + i_m = k} h_m(z_{i_1}, \dots, z_{i_m}, \varepsilon\tau) \right] \varepsilon^k +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} Q_k(z_0, z_1, \dots, z_k, \tau) \varepsilon^k. \quad (53)$$

Четвёртое и шестое слагаемые взаимно уничтожаются. В пятом слагаемом $\zeta = [\sum_{k=1}^{\infty} (z_k(\varepsilon\tau) + \Pi_k(\tau)) \varepsilon^k]$. Отсюда и из свойства полилинейности следует, что

$$\sum_{m=2}^{\infty} h_m(\zeta, \dots, \zeta, \varepsilon\tau) =$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} \left[\sum_{m=2}^k \sum_{i_1 + \dots + i_m = k} h_m(\chi_{i_1}, \dots, \chi_{i_m}) \right] \varepsilon^k +$$

$$+ \sum_{k=2}^{\infty} G_k(\chi_1, \dots, \chi_{k-1}, \tau) \varepsilon^k,$$

где χ_i может равняться либо z_i , либо Π_i . Последняя сумма в (53) есть результат разложения в ряд третьей и четвёртой пар

слагаемых в предположении о бесконечной дифференцируемости решений $z_k(\varepsilon\tau)$ по аргументу.

Подставим (53) в правую часть, а (45) — в левую часть уравнения (44). Приравняем слагаемые при одинаковых степенях параметра ε . Получим с учётом (51):

$$\frac{d\Pi_k}{d\tau} = \Lambda(\tau)\Pi_k(\tau) + P_k(\Pi_0, \dots, \Pi_{k-1}, \tau),$$

$$\Pi_k(0) = -z_k(0), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (54)$$

где $P_k(\Pi_0, \dots, \Pi_{k-1}, \tau)$ — известные операторы от Π_0, \dots, Π_{k-1} .

Уравнения (38), (49), (51), (54) полностью определяют формальное решение (40) задачи (36), (37).

Литература

1. Басов Н.Г., Крохин О.Н. Условие разогрева плазмы излучением оптического генератора // ЖЭТФ. — 1964. — Т. 47. — С. 171–175.

2. Афанасьев Ю.В., Басов Н.Г., Волоsevич П.П., др. Лазерное инициирование термоядерных реакций в неомогенных термоядерных мишенях // Письма в ЖЭТФ. — 1975. — Т. 21, вып. 2. — С. 150–155.

3. Прохоров А.М., Анисимов С.И., Пашилин П.П. Лазерный термоядерный синтез // УФН. — 1976. — Т. 119. — С. 401–424.

4. Смирнов В.П. Исследования по термоядерному синтезу. Научное сообщение на заседании Президиума РАН, ноябрь 2002 // Вестник Российской академии наук. — 2003. — Т. 73, № 4. — С. 1–15.

5. Анисимов С.И., Иванов М.П., Пашилин П.П., др. Газовая оболочечная мишень для лазерного инициирования термо-

ядерных реакций // Письма в ЖЭТФ. — 1976. — Т. 22 (6). — С. 343–346.

6. Афанасьев Ю.В., Басов Н.Г., Гамалый Е.Г., др. Теория нагрева и сжатия низкоконтропийных термоядерных мишеней // Тр. ФИАН. Т. 134. — М.: Наука. — 184 с.

7. Aleksandrova I.V., Koresheva E.R., Osipov I.E. ICF Cryotargets: Science and Technology // J. Moscow Phys.Soc. — 1994. — V. 4, N. 2. — P. 81–128.

8. Aleksandrova I.V., Baranov G.D., Belolipetskiy A.A.et.al. Free-standing target technologies for ICF // Fusion Technology. — 2000. — V. 38, N. 1. — P. 166–172.

9. Aleksandrova I.V., Belolipetskiy A.A. Mathematical models for filling polymer shells with a real gas-fuel // Laser and Particle Beams. — 1999. — V. 17, N. 4. — P. 701–712.

10. Белолипецкий А.А. Нелинейная математическая модель заполнения тонкостенных оболочек газом // Вестник Московского университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика. — 2000. — № 2. — С. 7–10.

11. Белолипецкий А.А. Математическая модель вымерзания газа на внутренней стенке лазерной мишени // Вестник Московского университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика. — 2002. — № 1. — С. 23–28.

12. Тер-Крикоров А.М. Нелинейный анализ и асимптотические методы малого параметра. — М.: МФТИ, 2007. — 284 с.

13. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. — М.: Высшая школа, 1990. — 208 с.

Поступила в редакцию 15.09.2009.