Элементы дифференциальной геометрии и группового анализа

11 октября 2011 г.

Вопросы, замечания, пожелания просьба присылать на почтовый ящик gasnikov@yandex.ru

Каждая задача без звездочки оценивается в 1 балл (задача со звездочкой в два балла и выше, в зависимости от задачи). Решая и сдавая задачи, приведенные ниже, можно сдать максимум три темы занятий Математического кружка. Для сдачи одной темы нужно набрать не менее пятнадцати баллов. Для сдачи двух тем – не менее двадцати пяти. Для сдачи трех тем – тридцати трех.

Теория подобия и размерностей

Задача 1 (о перекрытии реки). Пусть M обозначает массу камней, необходимых для перекрытия реки, если в единицу времени в реку засыпается масса m, характерный размер фиксированного профиля реки l, скорость течения v, ускорение свободного падения g, ρ – плотность воды. Докажите, что найдётся такая функция $\psi(\cdot,\cdot)$, что

$$M = m\sqrt{\frac{l}{g}}\psi\left(\frac{gl}{v^2},\frac{m}{v\rho l^2}\right).$$

Указание. Всего есть три базисные безразмерные комбинации: $\frac{m}{M}\sqrt{\frac{l}{g}}$, $\frac{gl}{v^2}$, $\frac{m}{v\rho l^2}$. Никаких других нет! Все остальные выражаются через эти три базисные. Действительно обозначим $сек=[1,0,0]$, $м=[0,1,0]$, $кг=[0,0,1]$. Тогда $M=[0,0,1]$, $m=[-1,0,1]$, $l=[0,1,0]$, $v=[-1,1,0]$, $g=[-2,1,1]$, $\rho=[0,-3,1]$. Нужно найти все такие решения $\vec{\alpha}$ – вектор

$$\begin{Vmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{Vmatrix}\vec{\alpha}=\vec{0}.$$

Несложно проверить, что фундаментальной матрицей этой системы будет

$$\begin{Vmatrix} -1; & 0; & 0 \\ 1; & 0; & 1 \\ 0.5; & 1; & -2 \\ 0; & -2; & -1 \\ -0.5; & 1; & 0 \\ 0; & 0; & -1 \end{Vmatrix}.$$

Отсюда и следует базисность трех найденных безразмерных комбинаций.

Поэтому по основной теореме теории размерностей (П – теорема) найдётся такая функция $\varphi(\cdot,\cdot)$, что

$$\frac{m}{M}\sqrt{\frac{l}{g}}=\varphi\left(\frac{gl}{v^2},\frac{m}{v\rho l^2}\right) \Rightarrow M=m\sqrt{\frac{l}{g}}\psi\left(\frac{gl}{v^2},\frac{m}{v\rho l^2}\right),\text{ где } \psi(\cdot,\cdot)=\varphi(\cdot,\cdot)^{-1}.$$

Сформулируйте и докажите П – теорему.

Зорич В.А. Математический анализ задач естествознания. М. МЦНМО, 2008, стр. 16.
Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1967.

Задача 2 (почему щука всегда догонит карася?). Найти отношение скоростей v_1/v_2, которые могут развивать две подобные рыбы (разных размеров), если отношение их характерных линейных размеров l_1/l_2.

Указание. Мощность, которую развивает рыба, в основном идет на преодоление работы силы сопротивления воды. Поскольку сама сила пропорциональна $F \sim Sv^2$ (скорость считаем довольно большой), то мощность $N \sim Sv^3 \sim l^2v^3$. С другой стороны, хорошо известно, что сила создаваемая мышцей напрямую зависит от её площади, следовательно, вырабатываемая мощность прямо пропорциональна объему мышцы. Таким образом, $N \sim V \sim l^3$. Следовательно, $v_1/v_2=\sqrt[3]{l_1/l_2}$.

Постарайтесь на таком же уровне грубости объяснить, почему частота шагов подобных животных, движущихся с одинаковой скоростью пропорциональна $M^{-1/3}$, почему одинаковые по форме животные подпрыгивают на одинаковую высоту, почему зависимость между массой подобных животных и массой потребляемого ими кислорода в единицу времени Q имеет вид $Q \sim M^{2/3}$.

Богданов К.Ю. Физика в гостях у биолога. М.: Б-ка Квант, вып. 49. 1986.
Bogdanov Konstantin Biology in physics. Is life matter? Academic Press, 2000.
Физика и … М.: Б-ка Квант, вып. 87. 2001.
Богданов К.Ю. Прогулки с физикой. М.: Б-ка Квант, вып. 98. 2006. http://kbogdanov4.narod.ru/

Задача 3 (Мак Магон, 1971)*. Сравнить скорости лодок V с разным числом гребцов n: один, два, четыре и восемь.

Ответ: $V \sim n^{1/9}$.

Для того чтобы понять, как связано содержание раздела “Теория подобия и размерностей” со следующим разделом рекомендуем обратиться к монографии *Баренблатт Г.И.* Автомодельные явления – анализ размерностей и скейлинг. Долгопрудный: Издательский дом «Интеллект», 2009.

Групповой анализ дифференциальных уравнений

Рассматривается система обыкновенных дифференциальных уравнений (СОДУ) $\dot{\vec{x}}=\vec{f}(\vec{x})$ (здесь и в дальнейшем речь идет о локальных свойствах, в частности о локальных группах). Под решением $\vec{x}(t;\vec{x}_0)=s^t\vec{x}_0$ этой системы понимается такая кривая, что $\vec{x}(0;\vec{x}_0)=\vec{x}_0$ и *касательный вектор* к этой кривой $d\vec{x}/dt$ в произвольной точке $\vec{x}$ равен $\vec{f}(\vec{x})$.

Задача 4 (уравнение Софуса Ли, 1893). Покажите, что действие s^t образуют *группу преобразований* (относительно суперпозиции): $s^{t_2}\circ s^{t_1}\overset{def}{=}s^{t_2}\left(s^{t_1}\right)=s^{t_1+t_2}$. Обратно, пусть преобразования

$\vec{x}' = T^a\vec{x} = \vec{f}\left(\vec{x}, a\right)$ образуют группу с той же групповой операцией $\vec{f}\left(\vec{f}\left(\vec{x}, a\right), b\right) = \vec{f}\left(\vec{x}, a+b\right)$ ($T^b \circ T^a \overset{def}{=} T^b\left(T^a\right) = T^{a+b}$) и пусть $\vec{x}' = \vec{x} + \vec{\xi}\left(\vec{x}\right)a + o\left(a\right)$. Тогда $\vec{x}'\left(a\right) = T^a\vec{x}$ определяется

$$\frac{d\vec{x}'}{da} = \vec{\xi}\left(\vec{x}'\right),\ \vec{x}'\left(0\right) = \vec{x}. \qquad (\textit{уравнение Ли})$$

Замечание. Покажите, что $\vec{\xi}\left(\vec{x}\right) = \left(d\vec{f}\left(\vec{x}, a\right)/da\right)\Big|_{a=0}$.

Определение ((первого) интеграла). $\Phi\left(\vec{x}\right)$ – *(первый) интеграл СОДУ* $\dot{\vec{x}} = \vec{f}\left(\vec{x}\right)$, *если* $\Phi\left(\vec{x}\left(t\right)\right) \equiv \mathrm{const}$ – *на любом решение СОДУ.*

Задача 5 (первый интеграл). Покажите, что $\Phi\left(\vec{x}\right)$ – первый интеграл СОДУ $\dot{\vec{x}} = \vec{f}\left(\vec{x}\right)$ тогда и только тогда, когда $\xi\Phi\left(\vec{x}\right) = 0$, где $\xi = f^i\left(\vec{x}\right)\dfrac{\partial}{\partial x^i}$ – *инфинитезимальный* (порождающий) *оператор* группы, определяемой СОДУ $\dot{\vec{x}} = \vec{f}\left(\vec{x}\right)$.

Напомним, что по повторяющимся индексам осуществляется суммирование (соглашение А. Эйнштейна о суммировании).

Задача 6 (замена координат). Покажите, что в новой системе координат $\tilde{\vec{x}} = \vec{\psi}\left(\vec{x}\right)$ перепишется следующим образом $\tilde{\xi} = \left(\xi\psi^i\left(\vec{x}\right)\right)\Big|_{\vec{x}=\vec{\psi}^{-1}\left(\tilde{\vec{x}}\right)}\dfrac{\partial}{\partial\tilde{x}^i}$.

Определение (коммутатор). $\left[\xi, \eta\right] = \xi\eta - \eta\xi = \left(\xi\left(\eta^i\right) - \eta\left(\xi^i\right)\right)\dfrac{\partial}{\partial x^i}$.

Задача 7 (свойства коммутатора). Покажите, что $\widetilde{\left[\xi, \eta\right]} = \left[\tilde{\xi}, \tilde{\eta}\right]$; и что если $\xi\Phi\left(\vec{x}\right) = 0$, $\eta\Phi\left(\vec{x}\right) = 0$, то и $\left[\xi, \eta\right]\Phi\left(\vec{x}\right) = 0$. Отсюда будет следовать (см. ниже замечание к теореме об интегралах полного семейства): если векторные поля ξ и η касаются некоторого многообразия, то их коммутатор $\left[\xi, \eta\right]$ тоже.

Определение (полного семейства). *Семейство векторных полей* $\left\{\xi_c\right\}_{c\in C}$ *в* $\mathbb{R}^n$ ($\left|C\right| = p \le n$) *называется полным, если:*

1 (линейная несвязность). $\neg\ \exists\ f^c\left(\vec{x}\right):\ \sum\limits_{c\in C}\left(f^c\left(\vec{x}\right)\right)^2 > 0$ *и* $f^c\left(\vec{x}\right)\xi_c \equiv 0$.

2. $\forall\ a, b \in C\ \exists\ h_{a,b}^c\left(\vec{x}\right):\ \left[\xi_a, \xi_b\right] = h_{a,b}^c\left(\vec{x}\right)\xi_c$.

Теорема (об интегралах полного семейства). *Полное семейство векторных полей имеет* $n-p$ *функционально независимых интегралов* (*определяемых неоднозначно*)

$$\Phi_1\left(\vec{x}\right), \ldots, \Phi_{n-p}\left(\vec{x}\right)\ \left(\neg\ \exists\ F\left(y_1, \ldots, y_p\right) \not\equiv 0:\ F\left(\Phi_1\left(\vec{x}\right), \ldots, \Phi_{n-p}\left(\vec{x}\right)\right) \equiv 0\right).$$

Любой интеграл семейства $\left\{\xi_c\right\}_{c\in C}$ *имеет вид* $\Psi\left(\Phi_1\left(\vec{x}\right), \ldots, \Phi_{n-p}\left(\vec{x}\right)\right)$, *т.е.* $\Phi_1\left(\vec{x}\right), \ldots, \Phi_{n-p}\left(\vec{x}\right)$ *образуют полный набор интегралов семейства* $\left\{\xi_c\right\}_{c\in C}$. *Если* $p = n$, *то отличных от констант интегралов нет.*

Верно и обратное, утверждение. Пусть имеется набор $n-p$ функционально независимых функций $\Phi_1(\vec{x}),...,\Phi_{n-p}(\vec{x})$. Тогда существует такое полное якобиево (т.е. $\forall\ a,b\in C \rightarrow [\xi_a,\xi_b]=0$) семейство векторных полей $\{\xi_c\}_{c\in C}$ в $\mathbb{R}^n$ ($|C|=p\le n$), что $\Phi_1(\vec{x}),...,\Phi_{n-p}(\vec{x})$ – полный набор интегралов этого семейства.

Замечание (инвариантные множества). Многообразие, задаваемое уравнениями

$$\Phi_1(\vec{x})=0,...,\Phi_k(\vec{x})=0$$

инвариантно относительно действия группы, задаваемой инфинитезимальным оператором ξ (см. уравнение Ли), если

$$\xi\Phi_1(\vec{x})=0,...,\xi\Phi_k(\vec{x})=0\Big|_{\Phi_1(\vec{x})=0,...,\Phi_k(\vec{x})=0}.$$

Задача 8 (о выпрямлении векторного поля или канонические координаты группы). Всякая однопараметрическая группа преобразований $\vec{x}'=T^a\vec{x}=\vec{f}(\vec{x},a)$ в $\mathbb{R}^n$ некоторой невырожденной заменой переменных $\tilde{\vec{x}}=\vec{\psi}(\vec{x})$ приводится к группе переносов вдоль оси $\tilde{x}^1$, т.е. $\tilde{\vec{x}}'=\tilde{\vec{x}}+a\cdot(1,0,...,0)^T$.

Задача 9 (о группе вращений сферы). Покажите, что сфера в $\mathbb{R}^3\setminus\{\vec{0}\}$:

$$\Phi(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1=0$$

инвариантна относительно действия групп, задаваемых инфинитезимальными операторами:

$$\xi_1=z\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial z}\ \text{(поворот относительно оси } y\text{)}$$

$$\xi_2=z\frac{\partial}{\partial y}-y\frac{\partial}{\partial z}\ \text{(поворот относительно оси } x\text{)}$$

Эти два оператора задают двумерную алгебру Ли (двухпараметрическую группу), поскольку

$$[\xi_1,\xi_2]=y\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial y}=\frac{y}{z}\xi_1-\frac{x}{z}\xi_2=\xi_3\ \text{(поворот относительно оси } z\text{)},$$

т.е. $\{\xi_1,\xi_2\}$ – полное базисное семейство группы вращений сферы. Т.е. любое вращение сферы может быть представлено в виде композиции вращений, задаваемых $\{\xi_1,\xi_2\}$.

Решив два соответствующих уравнения Ли, выпишите явно действие двухпараметрической группы вращений, задаваемой $\{\xi_1,\xi_2\}$.

Указание. Решите уравнение

$$\xi\Phi(x,y,z)=0\Big|_{\Phi(x,y,z)=0},$$

где $\xi=X(x,y,z)\frac{\partial}{\partial x}+Y(x,y,z)\frac{\partial}{\partial y}+Z(x,y,z)\frac{\partial}{\partial z}$. Заметим, что инфинитезимальный оператор можно определять с точностью до умножения на произвольную функцию $f(x,y,z)\neq 0$.

Задача 10 (управляемость динамической системы). Покажите, что динамическая система

$$\begin{cases}\dot{x}^1=ux^2\\ \dot{x}^2=ux^3\\ \dots\dots\dots\dots\\ \dot{x}^{n-1}=ux^n\\ \dot{x}^n=wx^1\end{cases}$$

управляема, т.е. для любых двух точек $\vec{x}_{start}$ и $\vec{x}_{finish}$ можно найти такие кусочно-гладкие функции $\left(u(t),w(t)\right)_{t\in[0,1]}$, что $\vec{x}_{finish}=\vec{x}\left(1;\vec{x}(0)=\vec{x}_{start}\right)$. Другими словами, если разрешается попеременно двигаться только по траекториям, задаваемым (с помощью уравнения Ли) векторными полями

$$\xi_1=x^2\frac{\partial}{\partial x^1}+x^3\frac{\partial}{\partial x^2}+\ldots+x^n\frac{\partial}{\partial x^{n-1}},\ \xi_2=\frac{\partial}{\partial x^n},$$

то из любой точки можно прийти в любую другую. Т.е. группа, порожденная $\{\xi_1,\xi_2\}$, оказывается транзитивной (в общем случае этот факт называют *теоремой Рашевского-Чоу*).

Указание. Воспользуйтесь теореме об интегралах полного семейства для $\{\xi_1,\xi_2\}$:

$$\{\xi_1,\xi_2\}\to\{\xi_1,\xi_2,[\xi_1,\xi_2]\}\to\ldots\to\{\text{базис в } \mathbb{R}^n\}.$$

Задача 11 (критерий управляемости Каллмана)*. Покажите, что следующая линейная динамическая система управляема

$$\dot{\vec{x}}=A\vec{x}+B\vec{u}\ \ (B \text{ - матрица размера } n\times r,\ r<n)$$

тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{rank}\left\|B\middle|AB\middle|\ldots\middle|A^{n-1}B\right\|=n.$$

Указание. Воспользуйтесь теореме об интегралах полного семейства для

$$X^0=a^i_jx^j\frac{\partial}{\partial x^i},\ X^k=b^i_k\frac{\partial}{\partial x^i},\ k=1,\ldots,r.$$

Задача 12 (продолжение дифференциального оператора). Пусть преобразования

$$\begin{pmatrix}t'\\ \vec{x}'\end{pmatrix}=T^a\begin{pmatrix}t\\ \vec{x}\end{pmatrix}=\vec{f}(t,\vec{x};a)$$

образуют группу с инфинитезимальным оператором $\varsigma=\tau(t,\vec{x})\frac{\partial}{\partial t}+\xi^i(t,\vec{x})\frac{\partial}{\partial x^i}$, т.е.

$$\begin{pmatrix}t'\\ \vec{x}'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t\\ \vec{x}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\tau(t,\vec{x})\\ \vec{\xi}(t,\vec{x})\end{pmatrix}a+o(a).$$

Тогда, если известно, что $d\vec{x}/dt=\dot{\vec{x}}$, то для $\dot{\vec{x}}'(a)=d\vec{x}'(a)/dt'(a)$ можно выписать уравнение

$$\dot{\vec{x}}'=\dot{\vec{x}}+\vec{\zeta}\left(t,\vec{x},\dot{\vec{x}}\right)a+o(a),$$

где $\zeta^i\left(t,\vec{x},\dot{\vec{x}}\right)$ определяется исходя из

$$\frac{d}{da}\left[\frac{d\vec{x}'(a)}{dt'(a)}\right]\Bigg|_{a=0}=\frac{d}{da}\left[\frac{\dot{\vec{x}}+\left(\vec{\xi}_t(t,\vec{x})+\frac{\partial\vec{\xi}(t,\vec{x})}{\partial\vec{x}}\dot{\vec{x}}\right)a+o(a)}{1+\left(\tau_t(t,\vec{x})+\tau_{x^i}(t,\vec{x})\dot{x}^i\right)a+o(a)}\right]\Bigg|_{a=0},\quad \frac{\partial\vec{\xi}(t,\vec{x})}{\partial\vec{x}}=\left\|\frac{\partial\xi_i(t,\vec{x})}{\partial x^j}\right\|.$$

Таким образом, можно продолжить группу

$$\underset{1}{\varsigma}=\tau(t,\vec{x})\frac{\partial}{\partial t}+\xi^i(t,\vec{x})\frac{\partial}{\partial x^i}+\zeta^i(t,\vec{x})\frac{\partial}{\partial\dot{x}^i}$$

И рассматривать её действие уже на многообразиях, включающих в себя системы дифференциальных уравнений первого порядка $\vec{\Phi}\left(t,\vec{x},\dot{\vec{x}}\right)=\vec{0}$.

Найдите $\zeta\left(t,\vec{x},\dot{\vec{x}}\right)$.

Определение (допускаемая группа). *Говорят, что система дифференциальных уравнений* $\vec{\Phi}\left(t,\vec{x},\dot{\vec{x}}\right)=\vec{0}$ *допускает группу* T^a ($\left(t',\vec{x}'\right)=T^a\left(t,\vec{x}\right)$), *если* $\vec{\Phi}\left(t,\vec{x},\dot{\vec{x}}\right)=\vec{0} \Leftrightarrow \vec{\Phi}\left(t',\vec{x}',\dot{\vec{x}}'\right)=\vec{0}$.

Задача 13 (определяющие уравнения). Покажите, что система дифференциальных уравнений допускает группу с инфинитезимальным оператором ξ тогда и только тогда, когда

$$\underset{1}{\xi}\,\vec{\Phi}\left(t,\vec{x},\dot{\vec{x}}\right)=\vec{0}\Big|_{\vec{\Phi}\left(t,\vec{x},\dot{\vec{x}}\right)=\vec{0}}.$$

Задача 14 (уравнение Бернулли). Покажите, что уравнение $\Phi\left(t,x,\dot{x}\right)=\dot{x}+\alpha x^2-\beta t^{-2}=0$ допускает группу преобразований $t'=e^{-a}t$, $x'=e^{a}x$: $\Phi\left(t',x',\dot{x}'\right)=e^{-2a}\Phi\left(t,x,\dot{x}\right)=0$.

Указание. Используя задачу о выпрямлении векторного поля, приведите найденную группу к группе трансляций по времени. Отметим, что это общий метод понижения порядка (интегрирования) СОДУ.

Задача 15 (линейное уравнение). Для обыкновенного линейного ДУ $\dot{x}+r\left(t\right)x-q\left(t\right)=0$ известно $x_0\left(t\right)$ частное решение однородного уравнения $\dot{x}+r\left(t\right)x=0$. Покажите, что исходное уравнение допускает группу преобразований с инфинитезимальным оператором $\xi=x_0\left(t\right)\dfrac{\partial}{\partial x}$. Найдите общее решение исходного уравнения.

Указание. Воспользуйтесь тем обстоятельством, что наличие допускаемой группы влечет за собой наличие интегрирующего множителя, который конструктивно определяется по допускаемой группе, см. стр. 24-25 брошюрки *Ибрагимов Н.Х.* Азбука группового анализа. М.: Знание, 1989.

Задача 16 (интегрируемые уравнения). Проинтегрируйте (выпишите общие решения) следующие дифференциальные уравнения

а) $\dot{x}-f\left(x/t\right)=0$; б) $\dot{x}t-x-f\left(x/t\right)=0$; в) $\dot{x}t-x-f\left(t\right)=0$; г) $\dot{x}t-x\left(f\left(t\right)+\ln x\right)=0$.

Задача 17 (интегральные инварианты). Пусть преобразования

$$\begin{pmatrix} t' \\ \vec{x}' \end{pmatrix}=T^a\begin{pmatrix} t \\ \vec{x} \end{pmatrix}=\vec{f}\left(t,\vec{x};a\right)$$

образуют группу с инфинитезимальным оператором $\varsigma=\tau\left(t,\vec{x}\right)\dfrac{\partial}{\partial t}+\xi^i\left(t,\vec{x}\right)\dfrac{\partial}{\partial x^i}$. Выпишите условия инвариантности относительно действия этой группы следующих интегралов

$$J_1=\int_{t_1}^{t_2}\Phi\left(t,\vec{x},\dot{\vec{x}}\right)dt,\ J_2=\oint_{\gamma}\Phi_k\left(\vec{x}\right)dx^k,\ J_3=\int\ldots\int_V\Phi\left(\vec{x}\right)dx^1\ldots dx^n.$$

Журавлев В.Ф. Основы теоретической механики. М.: Физматлит, 2001, глава 11.

Задача 18 (теорема Э. Нётер)*. Механическая система определяется *функцией Лагранжа* $L\left(t,\vec{q},\dot{\vec{q}}\right)$, по которой строится *функция Гамильтона* $H\left(t,\vec{q},\vec{p}\right)=\left[p_i\dot{q}^i-L\left(t,\vec{q},\dot{\vec{q}}\right)\right]\Big|_{\dot{\vec{q}}=\mu\left(t,\vec{q},\vec{p}\right)}$, где $\mu\left(t,\vec{q},\vec{p}\right)$ определяется из системы $\vec{p}=\partial L\left(t,\vec{q},\dot{\vec{q}}\right)\Big/\partial\dot{\vec{q}}$. В новых обозначениях *уравнения Лагранжа*

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L\left(t,\vec{q},\dot{\vec{q}}\right)}{\partial\dot{\vec{q}}}-\frac{\partial L\left(t,\vec{q},\dot{\vec{q}}\right)}{\partial\vec{q}}=0,$$

описывающие данную механическую систему, и одновременно доставляющие экстремальное значение действию по Гамильтону $\int_{t_1}^{t_2} L\left(t,\vec{q},\dot{\vec{q}}\right)dt$, могут быть переписаны следующим образом

$$\dot{\vec{q}}=\frac{\partial H\left(t,\vec{q},\vec{p}\right)}{\partial\vec{p}},\ \dot{\vec{p}}=-\frac{\partial H\left(t,\vec{q},\vec{p}\right)}{\partial\vec{q}}$$ (*уравнения Гамильтона*).

Покажите, что если для группы с инфинитезимальным оператором $\varsigma=\tau\left(t,\vec{q}\right)\frac{\partial}{\partial t}+\xi^i\left(t,\vec{q}\right)\frac{\partial}{\partial q^i}$ (точнее для её продолжения) действие по Гамильтону есть интегральный инвариант, то у рассматриваемой гамильтоновой механической системы есть первый интеграл $\xi^i\left(t,\vec{q}\right)p_i-\tau\left(t,\vec{q}\right)H\left(t,\vec{q},\vec{p}\right)\equiv\mathrm{const}$.

Так если действие инвариантно по отношению к группе трансляций по времени, то имеет место закон сохранения энергии $H\left(\vec{q},\vec{p}\right)\equiv\mathrm{const}$, если по отношению к группе трансляций по пространственной переменной q^i, то имеет место закон сохранения импульса $p_i\equiv\mathrm{const}$, ну а если по отношению к группе поворотов (относительно некоторой оси), то имеет место закон сохранения момента импульса относительно этой оси.

Журавлев В.Ф. Основы теоретической механики. М.: Физматлит, 2001, часть 6.

Задача 19 (сохранения фазового объема – теорема Лиувилля и интегральный инвариант Пуанкаре)*. В условиях предыдущей задачи покажите, что для гамильтоновой системы с

$$H\left(t,\vec{q},\vec{p}\right)\equiv H\left(\vec{q},\vec{p}\right)$$

существуют следующие два интегральных инварианта

$$J_3=\int\underset{V}{\ldots}\int dq^1\ldots dq^n dp^1\ldots dp^n \text{ и } J_2=\oint_\gamma p_k dq^k.$$

Если не налагать больше никаких условий, то нельзя гарантировать наличие еще какого-нибудь нетривиального интегрального инварианта типа J_2 или J_3.

Журавлев В.Ф. Основы теоретической механики. М.: Физматлит, 2001, часть 6.

Задача 20 (продолжение дифференциального оператора, общий случай)*. Используя стр. 16-18 брошюрки *Ибрагимов Н.Х.* Азбука группового анализа. М.: Знание, 1989, предложите способ продолжения (на старшие производные) инфинитезимального оператора. Выпишите соответствующие определяющие уравнения. В качестве примера, подвергните групповому анализу уравнение теплопроводности. Почему, множество допускаемых групп образуют одну многопараметрическую группу, которой соответствует алгебра Ли векторных полей (инфинитезимальных операторов)?

Задача 21 (преобразования Лоренца)*. В статье “Упущенные возможности” УМН, 1980. Т. 35
http://www.mathnet.ru/links/e34d7e2408ef6a01184509fb1b6c34d7/rm3163.pdf
известный американский математик Ф.Дж. Дайсон говорит о том, что *преобразования Лоренца* можно было бы открыть заметно раньше, а именно в 1865 г., когда Дж.К. Масквелл открыл свои уравнения (основные уравнения электродинамики – *уравнения Максвелла*). Найдите алгебру Ли, допускаемую системой уравнений Максвелла. Найдите всевозможные инварианты.

Журавлев В.Ф. Основы теоретической механики. М.: Физматлит, 2001, глава 13.

Задача 22 (автомодельные решения). Рассматривается закон сохранения

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial Q(\rho)}{\partial x}=0\,.$$

Автомодельные решения – это решения рассматриваемого уравнения в частных производных, которые могут быть представлены как функции (в данном случае) одного аргумента, зависящего от пространственных и временных переменных (т.е. от t и x). Групповой анализ указывает на то, что если автомодельные решения существуют, то прежде всего их следует искать в виде неизвестной функции от инвариантов (сконструированных из аргументов неизвестной функции (т.е. от t и x)) группы преобразований, допускаемой рассматриваемым уравнением.

В качестве примера укажем, что закон сохранения допускает группу трансляций по времени и по координате, группу подобных преобразований временной и пространственной переменной. Это означает, что вид уравнения не поменяется при заменах

$$t\to t+a\,;\ x\to x+b\,;\ t\to e^{d}t\,,\ x\to e^{d}x\,.$$

Отсюда, поскольку $x-ct$ (при любом $c\in\mathbb{R}$) является инвариантом группы трансляций

$$t\to t+a\,,\ x\to x+ca\,,$$

а $\xi = x/t$ является инвариантом группы растяжений

$$t\to e^{d}t\,,\ x\to e^{d}x\,,$$

в частности, следует, что решение закона сохранения прежде всего следует попробовать искать в виде

$$\tilde{\rho}(x-ct)\ \text{и}\ g\left(\frac{x}{t}\right).$$

Проверьте, существуют ли такие решения? Предложите способ определения скорости c.

Роль автомодельных решений (параметрических семейств таких решений) в теории эволюционных (эволюция по времени) уравнений в частных производных часто аналогична роли неподвижных точек в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Параметрическое семейство автомодельных решений (или семейство, полученное путем «склеивания» автомодельных решений) часто является, например, притягивающим (другие решения) семейством.

Введение в математическое моделирование транспортных потоков: учеб. пособие / Гасников А.В., Кленов С.Л., Нурминский Е.А., Холодов Я.А., Шамрай Н.Б; Приложения: Бланк М.Л., Гасникова Е.В., Замятин А.А., Малышев В.А., Колесников А.В., Райгородский А.М; Под ред. А.В. Гасникова. М.: МФТИ, 2010. 361 с. http://zoneos.com/traffic/ глава 2, п. 2.3.

Изложенными здесь методами современные аспекты группового анализа далеко не исчерпываются. Для дальнейшего знакомства с различными приложениями можно рекомендовать следующие книги

Ибрагимов Н.Х. Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983.

Сидоров А.Ф., Шапеев В.П., Яненко Н.Н. Метод дифференциальных связей и его приложения в газовой динамике. Новосибирск: Наука, 1984.

Galaktionov V.A., Svirshchevskii S.A. Exact Solutions and Invariant Subspaces of Nonlinear Partial Differential Equations in Mechanics and Physics. Chapman & Hall/CRC applied mathematics and nonlinear science series; 10. 2007.

Дифференциальные формы

Предварительно рекомендуется познакомиться с задачами от М.И. Исаева

Определение (распределения). *Распределение задается формулой* $H=\{\ker\omega\}$*, где* ω *– дифференциальная 1-форма, а* $\ker\omega$ *– гиперплоскость, на векторах которой форма* ω *равна нулю. В каждой точке это, вообще говоря, какая-то своя гиперплоскость, а совокупность пар точка и соответствующая этой точке гиперплоскость обозначим через* $H=\{\ker\omega\}$*. Будем говорить, что путь* γ *допустим, если он в каждой своей точке касается соответствующей плоскости распределения* H*. Распределение* H *интегрируемо, если у него есть интегральная поверхность, т.е. такое подмногообразие, что в каждой его точке соответствующая гиперплоскость распределения* H *является касательной плоскостью подмногообразия.*

Задача 23 (теорема Фробениуса). Покажите, что порождаемое невырожденной гладкой 1-формой ω распределение касательных гиперплоскостей $H=\{\ker\omega\}$ интегрируемо, лишь когда $d\omega=0$ на соответствующих плоскостях $\ker\omega$, т.е. $\omega\wedge d\omega=0$.

Указание. $d\omega(X,Y)=X\omega(Y)-Y\omega(X)-\omega([X,Y])$. Отсюда и из следующих двух задач, с учетом сказанного выше, неплохо видно, что язык дифференциальных форм дуален языку векторных полей.

Задача 24 (обобщение теоремы Фробениуса)*. Пусть распределение H порождается общими нулями всюду независимых гладких дифференциальных 1-форм ω_1, …, ω_{n-p}, т.е.

$$H=\left\{\ker\omega_1\cap...\cap\ker\omega_{n-p}\right\}.$$

Покажите, что критерием интегрируемости распределения H будет $d\omega_i=0$ на плоскостях распределения H для каждой из форм ω_i, т.е. $\omega_1\wedge...\wedge\omega_{n-p}\wedge d\omega_i=0$, $i=1,...,n-p$.

Задача 25 (Дарбу)*. Покажите, что любая *контактная форма* (т.е. такая гладкая 1-форма ω, что форма $d\omega$ невырожденна на $\ker\omega$) гладкой заменой координат приводится к виду

$$\omega=x^1dy^1+...+x^ndy^n+dz.$$

Например, в $\mathbb{R}^3$ $\omega=xdy+dz$.

Задача 26 (второе начало термодинамики или принцип адиабатической недостижимости). Аксиома Каратеодори утверждает, что отвечающая термодинамике 1-форма $\omega=dU(T)+P(T,V)dV$ такова, что в окрестности любой точки (T,V) есть точки, в которые из рассматриваемой точки нельзя попасть допустимым путем, т.е. адиабатическим процессом. Покажите, что это приводит к интегрируемости формы ω, т.е. к существованию интегрирующего множителя $\mu(T,V)$, для которого $\mu(T,V)\omega=dS(T,V)$, т.е. ω – точная форма. Привлекая физические соображения можно показать, что $\mu(T,V)=T^{-1}$. Заметим, что функцию состояния $S(T,V)$ принято называть *энтропией*.

Задача 27 (систем обмена ресурсами; Л.И. Розоноэр, 1973). а) Пусть система обладает набором ресурсов $\vec{x}=(x^1,...,x^n)$ и осуществляет с окружением локальные обмены $d\vec{x}=(dx^1,...,dx^n)$. Каждый i ресурс имеет свой коэффициент $\lambda_i(\vec{x})>0$ выгодности. Обмен считается допустимым, если $\lambda_i dx^i\geq 0$. Можно ли такой системе приписать структурную функцию $S(\vec{x})$ (определяющуюся из условия: обмен выгоден тогда и только тогда, когда $dS(\vec{x}) \geq 0$), если известно, что с помощью серии локально выгодных обменов нельзя перевести систему в состояние с меньшим содержанием всех видов ресурсов, т.е. отобрать ресурсы, ничего не давая в замен (это соответствует принципу адиабатической недостижимости)?

б) (принцип Ле Шателье)* Легко понять, что если система со структурной функцией $S(\vec{x})$ находится в равновесии со средой, то функция $S(\vec{x})$ достигает строгий локальный максимум. Тогда матрица Якоби в равновесии $\Gamma = \left\| \partial^2 S(\vec{x}) / \partial x^i \partial x^j \right\|$ – отрицательно определена (точнее говоря, не положительно определена, но для простоты ограничимся рассмотрением случая отрицательной определенности), т.е.

$$d\lambda_i dx^i = \left(\partial^2 S(\vec{x}) / \partial x^i \partial x^j \right) dx^i dx^j = d^2 S < 0 .$$

Покажите, что

$$\left| \frac{\partial \lambda_i}{\partial x^i} \right\|_{\lambda_1,\ldots,\lambda_{i-1},\lambda_{i+1},\ldots,\lambda_n} \leq \left| \frac{\partial \lambda_i}{\partial x^i} \right\|_{x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n} .$$

Указание. Введем скалярное произведение $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_{\otimes} = -\langle \vec{x}, \Gamma^{-1} \vec{y} \rangle$. Обозначим через $\vec{e}_i$ – вектор, все компоненты которого равны нулю, кроме i-ой компоненты, равной единице. По неравенству Коши–Буняковского:

$$\left| \frac{\partial x^i}{\partial \lambda_i} \right\|_{\lambda_1,\ldots,\lambda_{i-1},\lambda_{i+1},\ldots,\lambda_n} \cdot \left| \frac{\partial \lambda_i}{\partial x^i} \right\|_{x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n} = \langle \vec{e}_i, \vec{e}_i \rangle_{\otimes} \cdot \langle \Gamma \vec{e}_i, \Gamma \vec{e}_i \rangle_{\otimes} \geq \langle \vec{e}_i, \Gamma \vec{e}_i \rangle_{\otimes}^2 = 1 .$$

Опойцев В.И. Нелинейная системостатика. М.: Наука, 1986.

Задача 28 (агрегирование потребительского спроса или когда верен принцип рациональности; А.А. Шананин, 1986)*. Пусть $\vec{x} = (x^1, \ldots, x^n) \geq \vec{0}$ – вектор количеств потребительских продуктов (n может быть очень большим числом), $\vec{p} = (p_1, \ldots, p_n) > \vec{0}$ – вектор цен этих продуктов. Через $F(\vec{x})$ – обозначим функцию полезности потребителя, а через Φ – деньги, выделенные на потребление. Относительно функции (индекс спроса) $F(\vec{x})$ известно, что она принадлежит классу достаточно гладких функций Ψ: положительно однородных, монотонно неубывающих по каждому аргументу и удовлетворяющих неравенству $\left(\partial^2 F(\vec{x}) / \partial x^i \partial x^j \right) v^i v^j < 0$ для любого $\vec{v} \neq \vec{0}$: $\left(\partial F(\vec{x}) / \partial x^i \right) v^i = 0$. Тогда задача рационального потребителя: составить свою потребительскую корзину $\vec{x}(\vec{p})$ таким образом, чтобы $F(\vec{x}) \to \max$ при бюджетном ограничении $(\vec{p}, \vec{x}) = p_i x^i \leq 1$ (так как задача однородна относительно параметров $\vec{p}$ и Φ, то цены можно так отнормировать, чтобы $\Phi = 1$).

Предположим, что нужно решить обратную задачу. Заданы функции спроса $\vec{x}(\vec{p})$ (предполагается также, что существуют обратные функции спроса $\vec{p}(\vec{x})$), удовлетворяющие условию отделимости $\forall\ \lambda > 0 \to x^1(\lambda \vec{p}) : x^2(\lambda \vec{p}) : \ldots : x^n(\lambda \vec{p}) = x^1(\vec{p}) : x^2(\vec{p}) : \ldots : x^n(\vec{p})$, которое можно интерпретировать как достаточную полноту группы взаимозаменяемых и взаимодополняемых продуктов. Покажите, что индекс цен существует, только если

1) Дифференциальная 1-форма $\omega = p_i(\vec{x}) dx^i$ удовлетворяет условию интегрируемости Фробениуса, т.е. $\omega \wedge d\omega = 0$.
2) (*закон Хикса*) $\left(\partial^2 p_i(\vec{x}) / \partial x^j \right) v^i v^j < 0$ для любого $\vec{v} \neq \vec{0}$: $p_i v^i = 0$.

При этом интегрирующий множитель $q\left(\vec{p}\left(\vec{x}\right)\right)$, где $dF\left(\vec{x}\right)=q\left(\vec{p}\left(\vec{x}\right)\right)^{-1} p_i\left(\vec{x}\right)dx^i$, называют индексом цен. Индекс цен играет крайне важную роль в экономической теории (достаточно, например, вспомнить индексы цен Ласпейреса и Пааше).

Петров А.А., Поспелов И.Г., Шананин А.А. Опыт математического моделирования экономики. М.: ЭНЕРГОАТОМИЗДАТ, 1996.

Задача 29 (лемма Пуанкаре). Очевидно, что всегда $d\left(d\theta\right)=0$. Однако, имеет место и обратное утверждение. Покажите, что если в односвязной области дифференциальная *k*-форма ω *замкнута*, т.е. $d\omega=0$, то она *точна*, т.е. существует такая (*k* – 1)-форма θ, что $\omega=d\theta$. Приведите примеры из физике (электричество и магнетизм), показывающие, что односвязность области существенна. Приведите систему уравнений Максвелла к наиболее компактному виду записи $dF=0$.

Задача 30 (формула Стокса)*. С помощью результата предыдущей задачи (*леммы Пуанкаре*) докажите, что $\int\limits_{\partial\Omega}\omega=\int\limits_{\Omega}d\omega$ (предварительно опишите, входящие в эту формулу объекты, пояснив как понимаются выписанные интегралы). Получите с помощью этой формулы известные из курса математического анализа *формулы Грина, Стокса, Остроградского–Гаусса*. Примените эту формулу к выводу основных законов электричества и магнетизма, следуя, например, курсу общей физики Д.В. Сивухина. Какой смысл имеет в введенных обозначениях операция ротор rot?

Задача 31 (средняя площадь поверхности и интегральная геометрия). Покажите, что средняя площадь ортогональной проекции куба с ребром единица на случайную плоскость равна $3/2$.

Указание. Обозначим через S_k – среднее значение (усредненное по всем *k*-мерным плоскостям, предполагаемым равновероятными) площади ортогональной *k*-мерной проекции рассматриваемой области. Оказывается, что S_k также равны средним значениям (усредненным по поверхности рассматриваемой области) симметрических функций от главных кривизн поверхности, и участвуют в (удивительной) формуле для объема *h*-окрестности этой области:

$$V\left(h\right)=V_0+V_1h+V_2h^2+\ldots+V_nh^n,$$

где V_0 – объем области; V_1 – (*n* – *1*)-мерный объем границы области, пропорциональный среднему значению от числа 1; число V_k пропорционально S_k и выражается через средние значения от произведений *k* главных кривизн. В случае *n* = 3, из главных кривизн k_1 и k_2 в каждой точке можно составить *среднюю кривизну* k_1+k_2 и *гауссову кривизну* $K=k_1k_2$. В этом случае объем *h*-окрестности получается $V\left(h\right)=V_0+V_1h+V_2h^2+V_3h^3$, где V_2 пропорционально интегралу от средней кривизны по всей поверхности, а V_3 – от гауссовской:

$$V_3=\frac{4}{3}\pi\iint KdS.$$

Например, для сферы радиуса R

$$V(h)=\frac{4}{3}\pi\cdot(R+h)^3=\frac{4}{3}\pi R^3+h\cdot\left(4\pi R^2\right)+h^2\left(4\pi R\right)+\frac{4}{3}\pi h^3.$$

Здесь

$$k_1=k_2=1/R,\ k_1+k_2=2/R,\ k_1k_2=1/R^2,\ \iint\left(k_1+k_2\right)dS=8\pi R,$$

$$\iint\left(k_1k_2\right)dS=4\pi\ \text{(}\textit{формула Гаусса–Бонне}\text{)}.$$

Коэффициент V_3 не зависит от деталей области, а зависит только от *эйлеровой характеристики* поверхности рассматриваемой области. Это обстоятельство привело Г. Вейля к созданию теории характеристических классов и чисел, обобщающих формулу Гаусса–Бонне.

Арнольд В.И. Математическое понимание природы. М.: МЦНМО, 2011.

Явление концентрации меры

Задача 32 (принцип концентрации площади сферы; А. Пуанкаре, 1911). Покажите, что если в многомерном шаре задано равномерное распределение вероятностей и согласно этому распределению вероятностей сгенерировано два случайных вектора, то с вероятностью близкой к единице концы этих векторов будут лежать почти на границе шара и эти два случайных вектора будут почти ортогональны.

Указание. Нетривиально второе утверждение (про ортогональность). Для того чтобы его установить, покажите, что доля от площади всей сферы S_r^n (радиуса r), которую занимает площадь сегмента, проектирующегося в отрезок $[a,b]$, скажем, оси x_1, равна

$$P[a,b]=\frac{\int_a^b\left(1-\left(x/r\right)^2\right)^{\frac{n-3}{2}}dx}{\int_{-r}^r\left(1-\left(x/r\right)^2\right)^{\frac{n-3}{2}}dx}.$$

Фиксируя $r=1$ и устремляя n к бесконечности, получите,

$$P[-\delta,\delta]\sim 1-\sqrt{\pi/2}\exp\left(-\delta^2 n/2\right).$$

В статистической физике $\sum_{i=1}^n V_i^2=\frac{2E_n}{m}\sim n$. Поэтому если известно, что вектор скоростей молекул газа равномерно распределен по поверхности постоянной энергии,[1] то для того чтобы найти (следуя Мак-

[1] Равномерное распределение на поверхности постоянной энергии возникло из-за того, что инвариантной (и предельной по эргодической гипотезе) мерой для гамильтоновой системы будет как раз равномерная мера Лиувилля (фазовый объем сохраняется). Поскольку выполняется закон сохранения энергии, то система «живет» на поверхности постоянной энергии. Следовательно, носитель инвариантной меры сосредоточен именно на этой поверхности.

свеллу) распределение компонент вектора скорости, скажем V_1, нужно осуществить термодинамический скейлинг $n \to \infty$, $r = \sigma n^{1/2} \to \infty$

$$P[a,b] = \frac{\int_a^b \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)dx}{\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)dx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_a^b \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)dx.$$

Таким образом, получаем нормальный закон распределения Максвелла в статистической физике.

Зорич В.А. Математический анализ задач естествознания. М.: МЦНМО, 2008.

Задача 33 (изопериметрическое неравенство и принцип концентрации меры; П. Леви, 1919). Число μ_f называют медианой функции f, если

$$\mu\left(\vec{x} \in S_1^n :\ f(\vec{x}) \ge \mu_f\right) \ge 1/2 \text{ и } \mu\left(\vec{x} \in S_1^n :\ f(\vec{x}) \le \mu_f\right) \ge 1/2,$$

где $\mu(d\vec{x})$ – равномерное мера на единичной сфере S_1^n в $\mathbb{R}^n$. Пусть A – измеримое (борелевское) множество на сфере S_1^n. Через A_δ – будем обозначать δ-окрестность множества A на сфере S_1^n. Предположим теперь, что в некотором царстве, расположенном на S_1^3, царь предложил царице Дидоне построить огород с заданной длиной забора. Царица хочет, чтобы её огород при заданном периметре имел наибольшую площадь. Таким образом, царице надо решить изопериметрическую задачу (такие задачи обычно рассматриваются в курсах вариационного исчисления). Решение этой задачи хорошо известно – “круглый огород”. Для нас же полезно, рассмотрение двойственной задачи, имеющей такое же решение: при заданной площади огорода спроектировать его так, чтобы он имел наименьшую длину забора, его ограждающего. Используя решение этой задачи, покажите, что если $\mu(A) \ge 1/2$, то

$$\mu(A_\delta) \ge 1 - \sqrt{\pi/2}\exp\left(-\delta^2 n/2\right).$$

Пусть теперь на S_1^n задана функция с модулем непрерывности

$$\omega_f(\delta) = \sup\left\{\left|f(\vec{x}) - f(\vec{y})\right| :\ \rho(\vec{x},\vec{y}) \le \delta,\ \vec{x},\vec{y} \in S_1^n\right\}.$$

Тогда

$$\mu\left(\vec{x} \in S_1^n :\ \left|f(\vec{x}) - \mu_f\right| \ge \omega_f(\delta)\right) \le \sqrt{\pi/2}\exp\left(-\delta^2 n/2\right).$$

Можно показать, что при весьма естественных условиях медиана асимптотически близка к среднему значению (математическому ожиданию). Аналогичное неравенство можно получить (М. Талагран, 1994), например, для модели случайных графов (Эрдёша–Реньи). И исследовать плотную концентрацию около среднего значения различные функций на случайных графов: число независимости, хроматиское число и т.п. Имеется довольно общая *теорема М. Громова* (например, в книге M. Ledoux), в которой вместо сферы фигурирует многообразие с положительной кривизной Риччи.

Ledoux M. Concentration of measure phenomenon. Providence, RI, Amer. Math. Soc., 2001 (Math. Surveys Monogr. V. 89).
Зорич В.А. Математический анализ задач естествознания. М.: МЦНМО, 2008.

Задача 34 (изопериметрическое неравенство Талаграна и его приложения; М. Талагран, 1996)*. Пусть заданы множества Ω_i, $i=1,\ldots,n$ элементарных исходов. На этих множествах заданы вероятностные меры P_i, $i=1,\ldots,n$. Положим

$$\Omega=\prod_{i=1}^{n}\Omega_i\,,\ P=\prod_{i=1}^{n}P_i\,.$$

Введём взвешенную метрику Хэмминга:

$$d_\alpha\left(\vec{x},\vec{y}\right)=\sum_{x_i\neq y_i}\alpha_i\bigg/\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2}$$

и определим $d_\alpha\left(\vec{x},A\right)=\min_{\vec{y}\in A}d_\alpha\left(\vec{x},\vec{y}\right)$, $\rho\left(\vec{x},A\right)=\sup_{\vec{\alpha}\in\mathbb{R}^n}d_\alpha\left(\vec{x},A\right)$. Пусть $A\subset\Omega$. Определим t-окрестность ($t\geq 0$) множества A по формуле

$$A_t=\left\{\vec{x}\in\Omega:\ \rho\left(\vec{x},A\right)\leq t\right\}.$$

Покажите, что тогда справедливо следующее неравенство:

$$P\left(A\right)\left(1-P\left(A_t\right)\right)\leq\exp\left(-t^2/4\right).$$

Ledoux M. Concentration of measure phenomenon. Providence, RI, Amer. Math. Soc., 2001 (Math. Surveys Monogr. V. 89).
Алон Н., Спенсер Дж. Вероятностный метод. М.: Бином, 2007.

Задача 35 (случайные графы). а)* Дан случайный граф[2] (модель Эрдёша–Реньи) $G\left(n,p\right)$. Пусть $p=\left(c\ln n\right)/n$. Покажите, что при $c>1$ граф $G\left(n,p\right)$ почти наверное связен[3], а при $c<1$ – почти наверное не связен.

---

[2] Даны n вершин, любые две вершины соединены ребром с вероятностью p независимо от того, какие еще пары вершин соединены ребрами. Таким образом, $q=1-p$ есть вероятность отказа ребра. По сути, в задаче приведен некий порог $\bar{q}$ для q (по аналогии со статистической механикой иногда говорят, что этот порог характеризует «фазовый переход случайного графа»). Если в полном графе на n вершинах ребра отказывают с вероятностью, «большей» $\bar{q}$, то транспортная система почти наверное разрушится, если же ребра отказывают с вероятностью, «меньшей» $\bar{q}$, то транспортная система (несмотря на то, что может потерять много ребер) почти наверное сохранит свое основное свойство – возможность добраться по ребрам из любой вершины в любую другую.

[3] Из любой вершины можно добраться в любую другую по ребрам. Словосочетание «почти наверное» означает, что вероятностная мера тех графов, для которых это не так, стремится к нулю с ростом n.

б)** Пусть $p \geq \sqrt{(2\ln n)/n}$, причем длина (вес) r_{ij} каждого появившегося ребра есть независимая от того, какие еще пары вершин соединены ребрами и какие длины у этих ребер – случайная величина, имеющая равномерное распределение на отрезке $[0, 2r]$. Покажите, что тогда почти наверное граф $G(n, p)$ имеет гамильтонов цикл, причём длина почти всех гамильтоновых циклов стабилизируется (имеет место плотная концентрация) около nr.

в)* Пусть $p = 1/2$. Тогда существует такая функция $\varphi(n) = o(n/\log_2 n)$, что

$$P\left(\left|\chi(G) - \frac{n}{2\log_2 n}\right| > \varphi(n)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

где $\chi(G)$ – хроматическое число графа G, т.е. минимальное число разных цветов, в которые можно раскрасить вершины графа G так, чтобы смежные (соединенные ребром) вершины графа были покрашены в разные цвета.

Перепелица В.А. Асимптотический подход к решению некоторых экстремальных задач на графах // Проблемы кибернетики. 1973. Т. 26. С. 291–314.
Ledoux M. Concentration of measure phenomenon. Providence, RI, Amer. Math. Soc., 2001 (Math. Surveys Monogr. V. 89).
Алон Н., Спенсер Дж. Вероятностный метод. М.: Бином, 2007.
Райгородский А.М. Модели случайных графов. М.: МЦНМО, 2011.

Задача 36 (на применение неравенства Талаграна). а)** Пусть в сельском районе, имеющем форму квадрата со стороной 1, находится n домов ($n \gg 1$), размерами которых можно пренебречь по сравнению с линейным размером района. Будем считать, что при строительстве домов застройщик случайно (согласно равномерному распределению $R[0,1]^2$) и независимо выбирал их местоположения. Почтальону необходимо обойти все n домов ровно по одному разу (от любого дома почтальон может направиться к любому другому по прямой). Обозначим через TSP длину наикратчайшего из таких путей (кратчайший гамильтонов путь). Используя п. а), покажите, что найдутся такие постоянные $c > 0$ и $\beta > 0$, не зависящие от n, что

$$P\left(\left|TSP - E[TSP]\right| \geq t\right) \leq \exp\left(-t^2/(4c)\right), \text{ где } E[TSP] \sim \beta\sqrt{n}.$$

б)*** Пусть в условиях п. а) требуется построить систему дорог минимальной суммарной длины $SteinerTree$, по которой можно было бы добраться из любого дома в любой другой (дерево Штейнера с минимальной суммарной длиной ребер). Получите неравенство о плотной концентрации с.в. $SteinerTree$ в окрестности своего математического ожидания, аналогичное неравенству п. а). Как себя асимптотически ведёт $E[SteinerTree]$ при $n \to \infty$?

Dubhashi D.P., Panconesi A. Concentration of measure for the analysis of randomized algorithms. Cambridge University Press, 2009.

Литература

- *Скопенков А.Б.* Основы дифференциальной геометрии в интересных задачах. М.: МЦНМО, 2008. http://arxiv.org/PS_cache/arxiv/pdf/0801/0801.1568v3.pdf
- *Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т.* Современная геометрия. М.: Наука, 1979.
- *Новиков С.П., Тайманов И.А.* Современные геометрические структуры и поля. М.: МЦНМО, 2005.
- *Баренблатт Г.И.* Автомодельные явления – анализ размерностей и скейлинг. Долгопрудный: Издательский дом «Интеллект», 2009.
- *Ибрагимов Н.Х.* Практический курс дифференциальных уравнений и математического моделирования. Нижний Новгород: Издательство Нижегородского университета, 2007. http://www.ph4s.ru/book_mat_difur.html
- *Олвер П.* Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989.
- *Зорич В.А.* Математический анализ задач естествознания. М.: МЦНМО, 2008.
- *Ledoux M.* Concentration of measure phenomenon. Providence, RI, Amer. Math. Soc., 2001 (Math. Surveys Monogr. V. 89).