Теория группового выбора

Математический кружок, 22.02.2012г.

Некоторые изначальные предположения о «честных» голосованиях

- Анонимность (все избиратели равны)
  - 2 избирателя меняются голосами’ => итог” голосования не изменится
- Нейтральность (все кандидаты равны)
  - все избиратели поменяют двух кандидатов местами – в итоге голосования кандидаты поменяются местами
- Монотонноть
  - Невыгодно для победы продавать голоса **за себя**
    - Победивший кандидат не сможет проиграть’”, получив дополнительные голоса
    - Проигравший кандидат не сможет победить’”, потеряв дополнительные голоса

’ещё не известно, что такое «голоса», но правило можно формулировать при любой системе голосования

”ещё не известно, что такое «итог», но см. выше

’” данное правило предполагает понятие «победить» и «проиграть».

«Честные» голосования: 2 кандидата Теорема Мэя.

- Единственное голосование, удовлетворяющее всем трём условиям (монотонность, нейтральность, анонимность) – большинство при нечетном количестве избирателей.
- Если избирателей четное количество – возможна только модификация с добавлением исхода «ничья».

- Двум из 3х условий отвечают
  - правило диктатора
  - правило навязанного выбора
  - правило меньшинства

Правило большинства

- Голос = фамилия одного кандидата
- Правило большинства – если кто-то набрал больше половины голосов -> победитель
  - Иначе результата голосования нет.
- Правило относительно большинства – вне зависимости от половины кто больше – тот победитель.
  - Выборы президента Америки, Флорида, 2000г.
    - Буш 2 912 790
    - Гор 2 912 253
    - Нейдер 97 488
    - Другие 40 579

Правило Борда

- Каждый избиратель сообщает свой линейный порядок предпочтений в виде A>B>C>D
- Каждый за 1 место кандидат получает $x_1=(n-1)$ очков; за второе – $x_2=(n-2)$ очков; … за последнее – $x_n=0$ очков.
- В общем случае должны выполняться неравенства:

  $$x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n$$
- Все очки складываются, итоговый порядок предпочтений утверждается по убыванию количества очков *(при равенстве очков – кандидаты считаются неразличимыми)*

- Правило относительного большинства является частным случаем правила Борд**а** ($x_1=1$; $x_2 = \ldots = x_n=0$)
- Итоговый порядок предпочтений зависит от чисел $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n$
- В некоторых случаях правило Борда получает победителя, не соответствующего победителю по принципу абсолютного большинства.

Попарные сравнения (победитель по Кондорсе)

- Есть правило сравнения двух кандидатов между собой – большинство.
- Победитель по Кондорсе – выигрывает при всех попарных сравнениях.
- Пример 1: победитель по Кондорсе != победитель по правилу относительного большинства
  - 3 человека: A>B>C>D
  - 5 человек: A>C>B>D
  - 7 человек: B>D>C>A
  - 6 человек: C>D>D>A
    - C – победитель по Кондорсе
    - A - победитель по принципу относительного большинства

Парадокс Кондорсе Теорема Фишберна

- Парадокс Кондорсе
  - A>B>C
  - C>A>B
  - B>C>A
    - 3 кандидата, 3 избирателя, нет победителя по Кондорсе
- Любое правило подсчета очков несостоятельно по Кондорсе
  - 6 избирателей: A>B>C
  - 3 избирателя: C>A>B
  - 4 избирателя: B>A>C
  - 4 избирателя: B>C>A
    - A – победительно по Кондорсе
    - B – победитель при любом подсчете очков
      - A: $6x_1+7x_2$; B: $8x_1+6x_2$; C: $3x_1+4x_2$;

Теорема Эрроу

- $S(L(\ )^N) \to L(\ )$ – правило подсчета голосов
  - $L(\ )$ – линейный порядок предпочтений избирателями
- $u_i()$ – функция предпочтения избирателя.

- Условие единогласия:
  - Если для двух кандидатов A и B для любого избирателя $u_i(A)>u_i(B)$, то $S(u)(A)>S(u)(B)$
- Условия независимости от посторонних альтернатив
  - u, v – две разных функции предпочтения.
  - Если в двух голосованиях мнения избирателей о двух кандидатах совпадают: …
    - $S(u)(A)>S(u)(B)$
    - $\{u_i(A)> u_i(B)\} \Leftrightarrow \{v_i(A)> v_i(B)\}$
  - Правило подсчета голосов должно также дать совпадающий результат:
    - $S(v)(A)>S(v)(B)$

Теорема Эрроу

- Диктатор:
  - Диктатором называется избиратель i, такой что его мнение всегда совпадает с результатом голосования
  - d=i, если для всех голосований *u* верно: L(i)=s(u)(L(i))
- Теорема Эрроу: Если число кандидатов не меньше трех, не существует голосования, удовлетворяющего трем условиям:
  - Условие единогласия
  - Условие независимости от посторонних альтернатив
  - Условие отсутствия диктатора

Теорема Эрроу
Решающая коалиция

- B(A,B) – решающая коалиция (подмножество избирателей) относительно кандидатов A,B:
  - Все избиратели из B(A,B) считают, что $u(A)>u(B)$
  - Все избиратели не из B(A,B) считают, что $u(A)<u(B)$
    - $S(u)(A)>S(u)(B)$
- Лемма: минимальная решающая коалиция состоит из одного избирателя
  - C=B(a,b) разделим на непересекающиеся подмножества C_1 и C_2
    - $u(A)>u(B)>u(C)$ - для C_1
    - $u(C)>u(A)>u(B)$ - для C_2
    - $u(B)>u(C)>u(A)$ - остальные
      - известно: $s(u)(A)>s(u)(B)$.
      - Верно:
        - или $s(u)(A)>s(u)(C)$ // C_1 – новая решающая коалиция
        - или $s(u)(C)>s(u)(A)$ // C_2 – новая решающая коалиция
    - Уменьшили решающую коалицию

Теорема Эрроу: диктатор

- i=B(A,B) – минимальная решающая коалиция.
  - I – диктатор!
- Лемма: i=B(C,D) для любых двух кандидатов C,D
  - Докажем, что i=B(A,D), вторая часть аналогично
    - u(A)>u(B)>u(D) – для I
    - u(B)>u(D)>u(A) – для остальных
      - s(u)(A)>s(u)(B) (по условию); s(u)(B)>s(u)(D) – единогласие
      - s(u)(A)>s(u)(D) – новая решающая коалиция

- Лемма: $u_i(C)>u_i(D)$ => s(u)(C)>s(u)(D)
  - $u_i(C)>u_i(X)>u_i(D)$ – для I
  - u(X)>u(C); u(X)>u(D) – для остальных
    - s(u)(C)>s(u)(X) – решающая коалиция; s(u)(X)>s(u)(D) – единогласие
  - s(u)(C)>s(u)(D) – композиция неравенств.

- Теорема Эрроу доказана.

#Ononipulation

- Отказ выдачи итогового линейного предпочтения: интересует только кандидат-победитель
  - Правило подсчёта голосов S():
    - входные данные: предпочтения всех избирателей $L(\ )^N$
    - выходные данные: кандидат-победитель

- u_{-i} – функции предпочтения всех остальных избирателей
- v_i – неправильные предпочтения i-го избирателя

- Правило подсчета голосов называется неманипулируемым, если для всех i, $u = (u_i, u_{-i})$; v_i
  - $u_i(S(u_i, u_{-i})) > u_i(S(v_i, u_{-i}))$
  - Избирателю невыгодно для продвижения вперед нужных кандидатов сообщать неверные предпочтения.

Теорема Гибборда-Саттертруэйта

- Предположения:
  - количество кандидатов больше двух
  - избиратели сообщают свои предпочтения
  - правило подсчета голосов сообщает победителя

- Теорема Гибборда-Саттертруеэйта
  - Выполняется хотя бы одно из трех условий:
    - Правило выбора является правилом диктатора
    - Какой-то исход голосования невозможен
      - Какой-то кандидат заведомо не может стать победителем
    - Правило выбора манипулируемо