Современные эффективные методы выпуклой оптимизации
Задачи к спецкурсу

осенний семестр 2012, МФТИ

1) **Метод простейшего перебора** $G(p)$

В пространстве R^n заданы $n-$мерный куб

$$B_n = \{x \in R^n \mid 0 \leq x_i \leq 1,\ i = 1, .., n\}$$

и липшицева функция $f(\cdot)$ с константой $L > 0$:

$$|f(x) - f(y)| \leq L\|x - y\|_\infty \quad \forall x, y \in B_n,$$

где $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$.

Куб B_n разбит на p^n тестовых точек (центры маленьких кубиков)

$$x^{i_1 i_2 .. i_n} = (\frac{i_1}{p} - \frac{1}{2p}, \frac{i_2}{p} - \frac{1}{2p}, .., \frac{i_n}{p} - \frac{1}{2p})$$

Метод $G(p)$ среди всех тестовых точек $x^{i_1 i_2 .. i_n}$ находит точку $\hat{x}$ с наименьшим значением целевой функции и представляет пару $(\hat{x}, f(\hat{x}))$ как результат своей работы.

Обозначим через f^* оптимальное значение целевой функции, а через $A(G)$ число переборов тестовых точек (аналитическая сложность класса задач) пока не выполнится условие:$f(\hat{x}) - f^* \leq \epsilon$.

Показать, что $f(\hat{x}) - f^* \leq L/(2p)$ и

$$A(G) = \left(\lfloor \frac{L}{2\epsilon} + 1 \rfloor\right)^n,$$

где $\lfloor \cdot \rfloor)$ -целая часть от числа.

2) Градиентный метод с постоянным шагом применяется для безусловной минимизации выпуклой функции с липшицевым градиентом. Какую скорость убывания невязки по функции он обеспечивает? Что можно сказать о скорости убывания нормы градиента? Ответ обоснуйте.

3) Дано уравнение

$$F(x) = 0, \quad F(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Выписать метод Ньютона для решения данной задачи. Найти его области сходимости, расходимости, осциляции.

4) Зафиксируем в R^n некоторую норму $\|\cdot\|$. Введем скалярное произведение $\langle s, x\rangle = \sum_{i=1}^n s_i x_i$. Двойственная норма $\|\cdot\|_*$ определяется по формуле

$$\|s\|_* = \max\{\langle s, x\rangle \ \|x\| \le 1\}.$$

Найти двойственные нормы в следующих случаях

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}, \ p \ge 1;$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1\le i\le n} |x_i|.$$

Показать, что $(\|\cdot\|_*)_* = \|\cdot\|$.

5) Докажите выпуклость функций:

$$f(x) = \sum_{i=1}^m e^{\alpha_i + \langle a_i, x\rangle}; f(x) = |x| - \ln(1+|x|); f(x) = |x|^p, \ p > 1.$$

6) Докажите выпуклость множеств

$$\{x \in R^n \mid \langle a_i, x\rangle \le b_i, \ i = 1, .., m\};$$

$$\{x \in R^n \mid \langle Ax, x\rangle \le r^2\},$$

где A - симметрическая неотрицательно определенная матрица.

7) Найти минимум функции

$$f(x) = \frac{R^2 + \sum_{i=1}^n x_i^2}{\sum_{i=1}^n x_i}, \quad x_i > 0, \ i = 1, .., n.$$

Можно ли утверждать, что этот минимум - единственный?

8) Доказать неравенства

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 \le \left(\sum_{i=1}^n |x_i|\right)^2;$$

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n |x_i|\right)^2 \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^2.$$

9) Докажите справедливость данных представлений для субградиентов

$$f(x) = |x|, \ x \in R. \ \partial f(0) = [-1, 1];$$

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} |\langle a_i, x\rangle - b_i|. \ \ \partial f(x) = \sum_{i \in I_+(x)} a_i - \sum_{i \in I_-(x)} a_i + \sum_{i \in I_0(x)} [-a_i, a_i];$$

$$f(x) = \max x_i. \ \ \partial f(x) = Conv\{e_i \mid i \in I(x)\}$$

Здесь

$$I_+(x) = \{i \mid \langle a_i, x\rangle - b_i > 0\}, \ I_-(x) = \{i \mid \langle a_i, x\rangle - b_i < 0\},$$

$$I_0(x) = \{i \mid \langle a_i, x\rangle - b_i = 0\}, I(x) = \{i \mid x_i = f(x)\}.$$

10) Пусть A - положительно определенная матрица. Выписать в аналитическом виде решение следующей задачи

$$\max_x\{\langle c, x\rangle \mid \langle Ax, x\rangle \le 1\}.$$

11) Зафиксируем в R^n некоторую норму $\|\cdot\|$. Относительно этой нормы обозначим через $B(v, r) = \{x : \ \|x - v\| \le r\}$ - шар радиуса r с центром в v. Выписать аналитическую форму задачи нахождения шара максимального радиуса, содержащегося в многограннике, задаваемом системой линейных неравенств

$$\langle a_i, x\rangle \le b_i, \quad i = 1, .., m.$$

12) Пусть $f(\cdot)$ - выпукла на R^n. Рассмотрим сопряженную функцию

$$f_*(s) = sup_{x \in R^n}(\langle s, x\rangle - f(x)).$$

Покажите, что $\partial f(x) \subseteq dom f_*$.

Здесь $dom f = \{x : \ f(x) < \infty\}$.

13) Пусть A - симметрическая и положительно определенная матрица, а Q - выпуклое и замкнутое множество. Рассмотрим функцию

$$\phi(s) = sup_{x \in Q}\{\langle s, x\rangle - 1/2\langle Ax, x\rangle\}.$$

Какова ее область определения? Что можно сказать о выпуклости и гладкости? Относительно произвольной нормы $\|\cdot\|$ для смещений в R^n выписать константу Липшица для ее градиента.

14) Зафиксируем l_1-норму $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$. Рассмотрим функцию

$$d(x) = \ln n + \sum_{i=1}^{n} x_i \ln x_i,$$

заданную на стандартном симплексе

$$\Delta_n = \{x \in R^n : \ x \ge 0, \ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}.$$

Каково ее максимальное и минимальное значение? Что можно сказать о ее сильной выпуклости? Найти константу сильной выпуклости.

15) В задачах полуопределенной оптимизации неизвестными переменными являются матрицы. Пусть $X = \{X^{i,j}\}_{i,j=1}^{n}$ - симметрическая $n \times n$ матрица. В линейном пространстве квадратных матриц $n \times n$ скалярное произведение принято вводить следующим образом

$$\langle S, X\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} S_{i,j} X_{i,j}.$$

Это произведение определяет фробенисову матричную норму

$$\|X\|^2 = \langle X, X\rangle_F.$$

Таким образом, градиент от матричной функции $F(X)$ может быть найден с помощью соотношения

$$F(X+H) = F(X) + \langle F'(X), H\rangle_F + o(\|H\|_F).$$

Рассмотреть функцию $F(X) = -\ln detX$. Доказать, что функция выпукла и $F'(X) = -X^{-1}$. (Использовать определение выпуклости $F(X+H) - F(X) \geq \langle g(X), H\rangle_F$, где $g(X)$ - субградиент, и стандартное неравенство $(a_1 \cdot ... \cdot a_n)^{1/n} \leq (a_1 + .. + a_n)/n$.)

Рассмотреть функцию $F(X) = detX$. Вывести формулу для $F'(X)$.

16) Пусть выпуклая функция $f(x)$ имеет открытую областью определения $domf$. Эта функция называется самосогласованной, если при любом $x \in domf$ и любом направлении u частные производные функции $\phi(t) = f(x + tu)$ в нуле связаны неравенствами

$$\phi'''(0) \leq 2[\phi''(0)]^{3/2}.$$

Показать, что следующие функции не являются самосогласованными:

$$f(x) = e^x;\ f(x) = 1/x^p,\ p > 0,\ x > 0;\ f(x) = |x|^p,\ p > 2.$$

17)Пусть выпуклая функция $f(x)$ имеет открытую областью определения $domf$. Эта функция называется самосогласованным барьером, если при любом $x \in domf$ и любом направлении u частные производные функции $\phi(t) = f(x + tu)$ в нуле связаны неравенствами

$$\phi'''(0) \leq 2[\phi''(0)]^{3/2},\ [\phi'(0)]^2 \leq \nu\phi''(0).$$

Константа ν называется параметром барьера.

Показать, что функция $F(x) = -\ln x$ является ν-самосогласованным барьером для луча $\{x > 0\}$ с параметром $\nu = 1$.

Может ли область иметь несколько самосогласованных барьеров. Приведите примеры (исключая умножение на константу). Может ли область иметь несколько самосогласованных барьеров с разными параметрами?