Эволюционная теория игр

30 октября 2011 г.

Вопросы, замечания, пожелания просьба присылать на почтовый ящик gasnikov@yandex.ru

Каждая задача без звездочки оценивается в 1 балл (задача со звездочкой в два балла и выше, в зависимости от задачи). Решая задачи, приведенные ниже, можно сдать одну тему занятий Математического кружка. Для сдачи нужно набрать не менее трех баллов.

Задача 1 (матричная игра). Рассматривается игра двух лиц с матрицей выигрышей

$$\begin{pmatrix} (3,3) & (10,1) \\ (1,10) & (7,7) \end{pmatrix}.$$

Найдите равновесие Нэша. Будет ли оно устойчивым (см. стр 84-98 книги *Мулен Э.* Теория игр с примерами из математической экономики. М.: Мир, 1985)?

Задача 2 (сублинейный приближенный вероятностный алгоритм для матричных игр; Григориадис–Хачиян, 1995). Рассматривается симметричная антагонистическая игра двух лиц X и Y. Смешанные стратегии X и Y будем обозначать соответственно $\vec{x}$ и $\vec{y}$. При этом x_k – вероятность того, что игрок X выберет стратегию с номером k, аналогично определяется y_k. Таким образом,

$$\vec{x},\vec{y}\in S=\left\{\vec{x}\in\mathbb{R}^n:\ \vec{e}^{\,T}\vec{x}=1,\ \vec{x}\geq\vec{0}\right\},\text{ где } \vec{e}=(1,\ldots,1)^T.$$

Выигрыш игрока X:

$$V_X(\vec{x},\vec{y})=\vec{y}^{\,T}A\vec{x},$$

а выигрыш игрока Y:

$$V_Y(\vec{x},\vec{y})=-\vec{y}^{\,T}A\vec{x}\ \text{(игра антагонистическая).}$$

Каждый игрок стремится максимизировать свой выигрыш при заданном ходе оппонента. Равновесием Нэша (в смешанных стратегиях) называется такая пара стратегий $(\vec{x}^*,\vec{y}^*)$, что

$$\vec{x}^*\in\operatorname{Arg}\max_{\vec{x}\in S}\vec{y}^{*T}A\vec{x},\quad \vec{y}^*\in\operatorname{Arg}\min_{\vec{y}\in S}\vec{y}^{\,T}A\vec{x}^*.$$

Ценой игры называют

$$\max_{\vec{x}\in S}\min_{\vec{y}\in S}\vec{y}^{\,T}A\vec{x}=\min_{\vec{y}\in S}\max_{\vec{x}\in S}\vec{y}^{\,T}A\vec{x}=\vec{y}^{*T}A\vec{x}^*.$$

Поскольку по условию игра также симметричная, то $A=-A^T$ – матрица $n\times n$. С помощью стандартной редукции можно свести к этому случаю общий случай произвольной несимметричной матричной игры. В рассматриваемом же случае цена игры (выигрыш игроков в положении равновесия Нэша) есть 0, а множества оптимальных стратегий игроков совпадают. Требуется найти с точностью $\varepsilon>0$ положение равновесия Нэша (оптимальную стратегию), т.е. требуется найти такой вектор $\vec{x}\in S$, что $A\vec{x}\leq\varepsilon\vec{e}$. Покажите, считая элементы матрицы A равномерно ограниченными, скажем, единицей, что приводимый ниже алгоритм находит с вероятностью не меньшей $1/2$ (вместо $1/2$ можно взять любое положительное число, меньшее единицы) такой $\vec{x}$ за время

$$O\left(\varepsilon^{-2}n\log^2 n\right),$$

т.е. в определенном смысле даже не вся матрица (из n^2 элементов) просматривается. Отметим также, что в классе детерминированных алгоритмов время работы растет с ростом n не медленнее, чем $\sim n^2$ (эта нижняя оценка получается из информационных соображений [1, 2]). Другими словами, никакой детерминированный алгоритм не может также асимптотически быстро находить приближенно равновесие Нэша. Точнее говоря, описанный ниже вероятностный алгоритм дает почти квадратичное ускорение по сравнению с детерминированными.

Алгоритм

1. **Инициализация:** $\vec{X}=\vec{U}=\vec{0}$, $\vec{p}=\vec{e}/n$, $t=0$.
2. **Повторить:**
3. **Счетчик итераций:** $t:=t+1$.
4. **Датчик случайных чисел:** выбираем $k\in\{1,\dots,n\}$ с вероятностью p_k.
5. **Модификация** $\vec{X}$**:** $X_k:=X_k+1$.
6. **Модификация** $\vec{U}$**:** $U_i:=U_i+a_{ik}$, $i=1,\dots,n$.
7. **Модификация** $\vec{p}$**:** $p_i:=p_i\exp\left(\varepsilon a_{ik}/2\right)\Big/\left(\sum_{j=1}^{n}p_j\exp\left(\varepsilon a_{jk}/2\right)\right)$, $i=1,\dots,n$.
8. **Критерий останова:** если $\vec{U}/t\le\varepsilon\vec{e}$, то останавливаемся и печатаем $\vec{x}=\vec{X}/t$.

Указание. Покажите, что с вероятностью не меньшей, чем $1/2$, алгоритм остановится через $t^*=4\varepsilon^{-2}\ln n$ итераций. Для этого введите

$$P_i(t)=\exp\left(\varepsilon U_i(t)/2\right) \text{ и } \Phi(t)=\sum_{i=1}^{n}P_i(t).$$

Покажите, что

$$E\left[\Phi(t+1)\middle|\vec{P}(t)\right]=\Phi(t)\sum_{i,k=1}^{n}p_i(t)p_k(t)\exp\left(\varepsilon a_{ik}/2\right) \text{ и } \exp\left(\varepsilon a_{ik}/2\right)\le 1+\varepsilon a_{ik}/2+\varepsilon^2/6.$$

Используя это и кососимметричность матрицы A, покажите, что

$$E\left[\Phi(t+1)\right]\le nE\left[\Phi(t)\right]\left(1+\varepsilon^2/6\right).$$

Следовательно,

$$E\left[\Phi(t)\right]\le n\exp\left(t\varepsilon^2/6\right) \text{ и } E\left[\Phi\left(t^*\right)\right]\le n^{5/3}.$$

Отсюда по неравенству Маркова имеем, что ($n\ge 8$):

$$P\left(\Phi\left(t^*\right)\le n^2\right)\ge P\left(\Phi\left(t^*\right)\le 2n^{5/3}\right)\ge 1/2.$$

Тогда

$$P\left(\varepsilon U_i\left(t^*\right)/2\le 2\ln n,\ i=1,\dots,n\right)\ge 1/2.$$

Откуда уже следует, что

$$P\left(\vec{x}\left(t^*\right)\le\varepsilon\vec{e}\right)\ge 1/2.$$

Приведенные выше идеи случайного квазиградиентного спуска сейчас активно используются в современных численных методах решения задач выпуклой оптимизации в пространствах огромной размерности [3].

Литература

1. *Хачиян Л. Г.* Избранные труды / сост. С. П. Тарасов. М.: МЦНМО, 2009. С. 38–48.
2. ftp://ftp.mccme.ru/users/shen/kolmbook.pdf
3. http://www2.isye.gatech.edu/~nemirovs/
   http://www.core.ucl.ac.be/staff/biosketchNesterov.html
   http://elis.dvo.ru/~nurmi/

Задача 3 (стохастическая марковская динамика, приводящая к равновесию Нэша–Вардропа в модели распределения потоков)*. Ориентированный граф $\Gamma = (V, E)$ представляет собой транспортную сеть города (V – узлы сети (вершины), $E \subset V \times V$ – дуги сети (рёбра графа)). Пусть $W = \{w = (i, j) : i, j \in V\}$ – множество пар источник – сток; $p = \{v_1, v_2, ..., v_m\}$ – путь из v_1 в v_m, если $(v_k, v_{k+1}) \in E$, $k = 1, ..., m-1$ (как будет видно в дальнейшем (см. пример В. И. Швецова), иногда для задания пути может быть не достаточно указания только набора вершин, в общем случае нужно также указывать, какое именно ребро, соединяющие заданные вершины выбирается); P_w – множество путей, отвечающих корреспонденции $w \in W$; $P = \bigcup_{w \in W} P_w$ – совокупность всех путей в сети Γ; x_p – величина потока по пути p, $\vec{x} = \{x_p : \ p \in P\}$; $G_p(\vec{x})$ – удельные затраты на проезд по пути p, $\vec{G}(\vec{x}) = \{G_p(\vec{x}) : \ p \in P\}$; y_e – величина потока по дуге e:

$$y_e = \sum_{p \in P} \delta_{ep} x_p \text{, где } \delta_{ep} = \begin{cases} 1, & e \in p \\ 0, & e \notin p \end{cases} \ (\vec{y} = \Theta \vec{x},\ \Theta = \{\delta_{ep}\}_{e \in E, p \in P});$$

$\tau_e(y_e)$ – удельные затраты на проезд по дуге e (как правило, возрастающие, выпуклые, гладкие функции), естественно считать, что

$$G_p(\vec{x}) = \sum_{e \in E} \tau_e(y_e) \delta_{ep} \ \ (\vec{G}(\vec{x}) = \Theta^T \vec{\tau}(\vec{y})).$$

Заметим, что в приложениях часто требуется учитывать и затраты на прохождения вершин графа (в свою очередь, эти затраты могут зависеть, вообще говоря, от величин всех потоков, проходящих через каждую рассматриваемую вершину). Пусть также известны потоки корреспонденций d_w, $w \in W$ (см. предыдущий раздел). Тогда вектор $\vec{x}$, характеризующий распределение потоков, должен лежать в допустимом множестве:

$$X = \left\{ \vec{x} \geq 0 : \sum_{p \in P_w} x_p = d_w, w \in W \right\}.$$

Это множество может иметь и другой вид, если дополнительно учитывать, например, конечность пропускных способностей рёбер (ограничения сверху на y_e).

Рассмотрим игру, в которой каждому элементу $w \in W$ соответствует свой, достаточно большой ($d_w \gg 1$), набор однотипных “игроков” (“сидящих на корреспонденции w”). Множеством чистых стратегий каждого такого игрока является P_w, а выигрыш (потери со знаком минус) определяются формулой $-G_p(\vec{x})$ (игрок “выбирает” путь следования $p \in P_w$, при этом он пренебрегает тем, что от его выбора также “немного” зависят $|P_w|$ компонент вектора $\vec{x}$ и, следовательно, сам выигрыш $-G_p(\vec{x})$). Можно показать, что отыскание равновесия Нэша(–Вардропа) $\vec{x}^* \in X$ (макро описание равновесия) равносильно решению задачи *нелинейной комплементарности* (***принцип Дж.Г. Вардропа*** (1952)), что равносильно решению *вариационного неравенства*:

$$\forall \ w \in W,\ p \in P_w \to x_p^* \cdot \left(G_p(\vec{x}^*) - \min_{q \in P_w} G_q(\vec{x}^*) \right) = 0 \ \Leftrightarrow \ \forall \ \vec{x} \in X \to \left\langle \vec{G}(\vec{x}^*), (\vec{x} - \vec{x}^*) \right\rangle \geq 0.$$

Вариационное неравенство можно переписать, как *проекционное уравнение*

$$\vec{x}^* = \Pi_X \left(\vec{x}^* - \vec{\lambda} G(\vec{x}^*) \right),\ \lambda > 0,$$

где $\Pi_X\left(\vec{x}^* - \lambda\vec{G}\left(\vec{x}^*\right)\right)$ – такая “точка” множества X, которая доставляет минимум функционалу расстояния от точки $x \in X$ до фиксированной точки $\vec{x}^* - \lambda\vec{G}\left(\vec{x}^*\right)$. Выписанное проекционное уравнение можно далее численно решать, например, с помощью метода простой итерации $\vec{x}^{n+1} = \Pi_X\left(\vec{x}^n - \lambda\vec{G}\left(\vec{x}^n\right)\right)$. Несложно показать, что если $\vec{G}\left(\vec{x}\right)$ – строго монотонное преобразование, т.е.

$$\forall\ \vec{x}, \vec{z} \in X\ \left(\vec{x} \neq \vec{z}\right) \to \left\langle \vec{G}\left(\vec{x}\right) - \vec{G}\left(\vec{z}\right), \vec{x} - \vec{z} \right\rangle > 0,$$

то *равновесие Нэша–Вардропа* единственно.

Также несложно показать, что задача отыскания равновесия Нэша–Вардропа сводится к решению, следующей задачи выпуклого программирования:

$$\Psi\left(\vec{x}\right) = \sum_{e \in E} \int\limits_0^{\sum_{p \in P} x_p \delta_{pe}} \tau_e\left(z\right) dz \to \min_{\vec{x} \in X}.$$

Отсюда видно, что если

$$\forall\ e \in E \to \tau_e'\left(\cdot\right) > 0, \text{ то } V\left(\vec{y}\right) = \sum_{e \in E} \int\limits_0^{y_e} \tau_e\left(z\right) dz$$

– строго выпуклый функционал, и равновесие $\vec{y}^*$ – единственно. Отметим, что это еще не означает единственность равновесия $\vec{x}^*$ – см. пример В.И. Швецова ниже.

Мы предлагаем (и исследуем) возможную динамику в этой игре, “приводящую” к равновесию Нэша–Вардропа.

Свой путь на $\left(n+1\right)$-м шаге[1] игрок, сидящий на корреспонденции w, выбирает согласно смешанной стратегии (в независимости от всех остальных): с вероятностью

$$\mathrm{Prob}_p^w\left(n+1\right) = \gamma \cdot \max\left\{x_p\left(n\right), n^{-1}\right\} \exp\left(-G_p\left(\vec{x}\left(n\right)\right)/T\right) \Big/ Z_n^w, \ \ w \in W,$$

выбрать путь $p \in P_w$ ($0 < \gamma \leq 1$), а с вероятностью $1-\gamma$ – действовать согласно стратегии, использованной на предыдущем n-м шаге. Здесь $x_p\left(n\right)$ – количество игроков, сидящих на корреспонденции w и выбравших на n-м шаге стратегию $p \in P_w$,

$$Z_n^w = \sum_{p \in P_w} \max\left\{x_p\left(n\right), n^{-1}\right\} \exp\left(-G_p\left(\vec{x}\left(n\right)\right)/T\right).$$

Множитель $\max\left\{x_p\left(n\right), n^{-1}\right\}$ характеризует желание имитировать, а также надежность использования этой стратегии. Именно этот множитель подмечает специфику рассматриваемой задачи (без него сходимость будет в общем случае не к равновесию Нэша–Вардропа) и отличает предложенную в задаче динамику от многих других (см. ниже краткий обзор). Параметр γ характеризует «консерватизм» («ленивость»), чем меньше γ, тем более консервативный игрок; «температура» T характеризует отношение к риску («горячность»), чем больше температура, тем более «горячий игрок», склонный к более рискованным действиям.

Обратим внимание на высокую эффективность предложенной процедуры «нащупывания равновесия» с точки зрения количества итераций. Иначе говоря, на предложенный

---

[1] Например, шаг с периодом в день можно проинтерпретировать как выбор утром маршрута следования (пути) из дома на работу, исходя из «опыта» вчерашнего дня. Заметим, что информацию о $G_p\left(\vec{x}\left(n\right)\right)$ водители (игроки) черпают из открытых источников типа Яндекс-пробки, а множитель $\max\left\{x_p\left(n\right), n^{-1}\right\}$ определяется исходя из случайного опроса соседей, знакомых, коллег и т.п.

итерационный процесс можно смотреть просто как на эффективный способ численного нахождения равновесия Нэша–Вардропа. В экспериментах, в которых участвовали студенты 5-го курса ФУПМ МФТИ, также наблюдалась сходимость к равновесию и колебания около него. Результаты численных экспериментов можно строго объяснить [1] (см. формулу (2.32), утверждение 2.2 и пример на стр. 1586). Покажите, что имеют место

Утверждение 1. *Пусть* $T > 0$. *Тогда*

$$\exists\ C, \alpha > 0:\ \forall\ N \in \mathbb{N} \to P\left(\Psi\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\vec{x}(n)\right) - \Psi_{\min} \geq \frac{\Omega}{\sqrt{N}}\right) \leq 2\exp(-C\cdot\Omega),\ \textit{где}\ \gamma = \frac{\alpha}{\sqrt{N}}.$$

Утверждение 2. *Пусть* $T > 0$ *– достаточно мало,* $\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n = \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty}(\gamma_n)^2 < \infty$. *Тогда*

$$\vec{x}(n) \xrightarrow[n\to\infty]{п.н.} \vec{x}^*\left(\vec{x}(0)\right) \textit{ – одно из равновесий.}$$

Причем большая часть компонент вектора $\vec{x}^*\left(\vec{x}(0)\right)$ *может равняться нулю. Если равновесие* $\vec{x}^*$ *единственно, то* $\vec{x}^*\left(\vec{x}(0)\right) \equiv \vec{x}^*$.

“Колебания студентов ФУПМ около положения равновесия” объяснялись, по-видимому, тем, что в экспериментах количество игроков было небольшим и гипотеза конкурентного рынка не выполнялась,[2] кроме того, в утверждении 1 говорится лишь о сходимости по Чезаро (напомним, например, что последовательность 1, -1, 1, -1, … сходится по Чезаро к нулю), а в утверждении 2 предполагается, что $\gamma_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Как следствие сходимость будет не к равновесию, а к его окрестности, размер которой зависит от малости T, $\gamma > 0$ и количества игроков.

Введение в динамику стохастичности сближает предложенный подход с поиском так называемых «стохастических равновесий в транспортных сетях» [2], с другой стороны, он принципиально отличается тем, что предполагает знание транспортных расходов по маршрутам (используется достоверная информация вчерашнего дня), на основе которых производится рандомизированный выбор. В стохастическом же равновесии водитель узнает лишь случайную оценку времени проезда по каждому из маршрутов и затем выбирает маршрут с минимальным временем.

Предложенную схему можно трактовать скорее как стохастическую динамику наилучших ответов в эволюционной (популяционной) игре [3–0], при этом имеется много общего с концепциями «quantal response equilibria» [8] (используется похожая рандомизация) и «minority games» [9] (наблюдаются похожие колебания около положения равновесия). Близкой к предложенному итерационному процессу является концепция генетических алгоритмов [10] и эффективный приближенный вероятностный (с гиббсовским («logit») распределением вероятностей) алгоритм Григориадиса–Хачияна [11].

Можно предложить ситуацию, когда равновесие Нэша–Вардропа не единственно (считая, например, что за проезд по дороге с водителей взимается некоторая сумма; см. также пример В.И. Швецова ниже). Для описанной выше динамики, интересно исследовать, к какому положению равновесия (в зависимости от точки старта) она будет сходиться.

Более подробно о моделях распределения потоков и связанных с ними задачах можно прочитать, например, в главе 1 учебного пособия [12] и [2, 13].

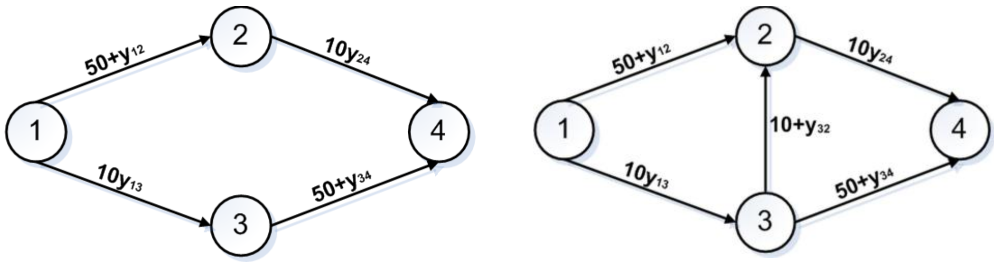
---

[2] Напомним, что при построении всех конструкций мы считали: “игрок “выбирает” путь следования $p \in P_w$, при этом он пренебрегает тем, что от его выбора также “немного” зависят $|P_w|$ компонент вектора $\vec{x}$ и, следовательно, сам выигрыш $-G_p\left(\vec{x}\right)$”.

В заключение рассмотрим два примера. Первый демонстрирует, что в результате строительства новой дороги новое равновесие Нэша–Вардропа окажется неэффективным по Парето и будет строго хуже, чем то, которое было до строительства. Тем не менее, предложенная выше марковская динамика наилучших ответов (также как и эксперимент со студентами ФУПМ) приводит именно к такому, не оптимальному по Парето, равновесию.

Пример (парадокс Брайеса, 1968). Пусть корреспонденция $x_{14} = 6$ (тысяч автомобилей/ч). Вес ребра (удельные затраты на проезд по этому ребру) есть время движения по ребру (в минутах), если поток через ребро есть y_{ij} (тысяч автомобилей/ч). Например, в случае 2: $y_{24} = x_{124} + x_{1324}$ (см. рис. 1). Естественно считать, что время движения – возрастающая функция потока.

Случай 1: $x_{124} = x_{134} = 3$.	**Случай 2:** $x_{124} = x_{1324} = x_{134} = 2$.
Полное время в пути $T = 83$ мин	Полное время в пути $T = 92$ мин



Случай 1 Случай 2

Рис. 1

Оба равновесия Нэша–Вардропа (в случаях 1 и 2) являются «притягивающими» положениями равновесия описанной выше динамики (положили $\gamma \simeq 1,\ T \sim 15-35$).

Второй пример демонстрирует, что при весьма естественных условиях вектор-функция удельных затрат пользователей на проезд $\vec{G}(\vec{x})$ может не быть строго монотонной:

$$\exists\ \vec{x}, \vec{y} \in X\ (\vec{x} \neq \vec{y}):\ \vec{G}(\vec{x}) = \vec{G}(\vec{y}) \Rightarrow \left\langle \vec{G}(\vec{x}) - \vec{G}(\vec{y}), \vec{x} - \vec{y} \right\rangle = 0.$$

Связанно это может быть, например, с тем, что

$$\vec{G}(\vec{x}) = \Theta^T \vec{\tau}(\vec{y}),\ \vec{y} = \Theta\vec{x},$$

где вектор $\vec{y} = \{y_e\}_{e\in E}$ описывает загрузку ребер (дуг) графа транспортной сети, $\vec{\tau}(\vec{y}) = \{\tau_e(y_e)\}_{e\in E}$ – вектор-функция затрат на проезд по ребрам графа транспортной сети, Θ – матрица инцидентности ребер и путей, и разные векторы распределения потоков $\vec{x}$ могут соответствовать одному и тому же вектору $\vec{y} = \Theta\vec{x}$.

Пример (неединственность равновесия; В.И. Швецов [10]). На рис. 2 показано равновесное распределение потоков для любого значения параметра $x \in [0, 0.5]$. Утверждение 2 “опровергает” на этом примере (во всяком случае, для рассмотренной динамики) гипотезу о том, что в случае не единственности равновесия Нэша–Вардропа с большой вероятностью реализуется то, которое доставляет решение следующей задачи энтропийно-линейного программирования:

$$-\sum_{w\in W}\sum_{p\in P_w}\left(x_p \ln\left(x_p/|P_w|\right) - x_p\right) \to \max_{\vec{x}\in X,\ \Theta\vec{x} = \vec{y}^*},$$

где $\vec{y}^*$ – единственное решение задачи

$$V(\vec{y}) = \sum_{e \in E} \int_0^{y_e} \tau_e(z)\,dz \to \min_{\vec{y}=\Theta\vec{x},\, \vec{x}\in X}.$$

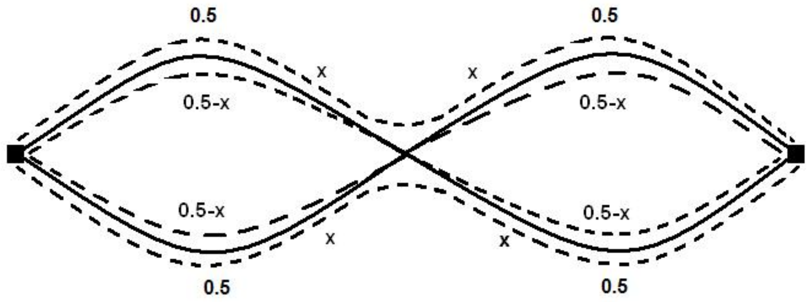


Рис. 2

Литература

1. *Juditsky A., Lan G., Nemirovski, Shapiro A.* Stochastic approximation approach to stochastic programming // SIAM Journal on Optimization, 2009. V. 19. № 4. P. 1574–1609. http://www2.isye.gatech.edu/~nemirovs/
2. *Sheffi Y.* Urban transportation networks: Equilibrium analysis with mathematical programming methods. N.J.: Prentice–Hall Inc., Englewood Cliffs, 1985.
3. *Foster D., Young P.* Stochastic evolutionary game dynamics // Theoretical population biology, 1990. V. 38. № 2.
4. *Cressman R.* Evolutionary game theory and extensive form games. Cambridge, Mass.: MIT Press, 2003.
5. *Hofbauer J., Sigmund K.* Evolutionary game dynamics // Bulletin of the AMS, 2003. V. 40. № 4. P. 479–519.
6. *Васин А.А., Краснощеков П.С., Морозов В.В.* Исследование операций. М.: Издательский центр «Академия», 2008.
7. *Easley D., Kleinberg J.* Networks, Crowds, and Markets. Reasoning about highly connected world. Cambridge University Press, 2010. http://www.cs.cornell.edu/home/kleinber/networks-book/
8. *McKelvey R. D., Palfrey T. R.* Quantal response equilibria for extensive form games // Experimental economics, 1998. V. 1. P. 9–41.
9. *Marsili M.* Toy models of markets with heterogeneous interacting agents // e-print www.unifr.ch/econophysics/, 2001.
10. *Fogel D.B.* Evolutionary Computation: Towards a New Philosophy of Machine Intelligence. New York: IEEE Press, 2000.
11. *Хачиян Л.Г.* Избранные труды / сост. С. П. Тарасов. М.: МЦНМО, 2009. С. 38–48.
12. Введение в математическое моделирование транспортных потоков: учеб. пособие / Гасников А.В., Кленов С.Л., Нурминский Е.А., Холодов Я.А., Шамрай Н.Б; Приложения: Бланк М.Л., Гасникова Е.В., Замятин А.А. и Малышев В.А., Колесников А.В., Райгородский А.М; Под ред. А.В. Гасникова - М.: МФТИ, 2010. - 361 с. ISBN 978-5-7417-0334-2. http://zoneos.com/traffic/
13. *Стенбринк П.А.* Оптимизация транспортных сетей. М.: Транспорт, 1981.
14. *Como G., Salva K., Acemoglu D., Dahleh M.A., Frazzoli E.* Stability analysis of transportation networks with multiscale driver decisions // e-print arXiv:1101.2220v1, 2011.
15. *Швецов В.И.* Проблемы моделирования передвижений в транспортных сетях // Труды МФТИ (под ред. акад. В. В. Козлова), 2010. Т. 2. № 4(8). С. 169–179.

Задача 4 (сходимость к равновесию Нэша; Малишевский–Опойцев, 1972). Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений (СОДУ):[3]

$$\dot{x}_i = \gamma_i(t)\left(f_i(x_1, ..., x_n) - x_i\right), \tag{D}$$

- $\gamma_i(t) > 0$ при $t \geq 0$ и $\int_0^\infty \gamma_i(t)\,dt = \infty$, $i = 1, ..., n$;
- $f_i(\,\cdot\,)$, $i = 1, ..., n$ – непрерывные функции;
- $\exists\ K \subset \mathbb{R}^n$(компакт): $\vec{f}(K) \subseteq K$.

Докажите, что приводимое ниже условие обеспечивает существование равновесия СОДУ (единственность в K) и его асимптотическую устойчивость:

$$\forall\ \vec{x} \in K,\ i = 1, ..., n \to \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial f_i(\vec{x})}{\partial x_j} \right| < 1.$$

Указание. В кубической норме ($\|\vec{x}\|_\square = \max_{i=1,...,n} |x_i|$) $\vec{f}(\vec{x})$ – сжимающее отображение компакта K в себя. Устойчивость показывается с помощью второго метода Ляпунова. В качестве функции Ляпунова следует взять $V(\vec{x}) = \|\vec{x} - \vec{x}^*\|_\square$, где $\vec{x}^*$ – единственное положение равновесия в K.

Литература

1. *Опойцев В. И.* Равновесие и устойчивость в моделях коллективного поведения. М.: Наука, 1977.
2. *Мулен Э.* Теория игр с примерами из математической экономики. М.: Мир, 1985.
3. *Малишевский А. В.* Качественные модели в теории сложных систем. М.: Наука, 1998.

Задача 5 (устойчивые системы большой размерности; В. И. Опойцев, 1985). Из курсов функционального анализа и вычислительной математики хорошо известно, что если спектральный радиус матрицы $A = \|a_{ij}\|_{i,j=1}^n$ меньше единицы: $\rho(A) < 1$, то итерационный процесс $\vec{x}^{n+1} = A\vec{x}^n + \vec{b}$ (СОДУ $\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + \vec{b} - \vec{x}$, см. СОДУ (D) из предыдущей задачи с $\vec{f}(\vec{x}) = A\vec{x} + \vec{b}$) в независимости от точки старта $\vec{x}^0$ сходится к единственному решению уравнения $\vec{x}^* = A\vec{x}^* + \vec{b}$. Скажем, если $\|A\|_\square = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}| < 1$, то и $\rho(A) < 1$ (обратное, конечно, не верно). Предположим, что существует такое малое $\varepsilon > 0$, что

[3] Такие СОДУ возникают, например, при исследовании коллективного поведения, в частности «при нащупывании равновесия Нэша». Действительно, пусть $D_i(x_1, ..., x_i, ..., x_n)$ – функция выигрыша игрока i, если игроки придерживаются набора стратегий $\vec{x} = (x_1, ..., x_i, ..., x_n)$. Пусть «функция цели» $f_i(\vec{x})$ игрока i однозначным образом определяется из условия

$$D_i(x_1, ..., f_i(\vec{x}), ..., x_n) = \max_{x_i \in X_i} D_i(x_1, ..., x_i, ..., x_n),$$

где X_i – множество возможных стратегий игрока i. Тогда СОДУ (D), очевидным образом, выражает стремление игроков двигаться по направлению своей цели (по мере движения цель меняется), т.е. определенную рациональность игроков. Отметим здесь нечувствительность результатов к тому, насколько сильно (это характеризуется функциями $\gamma_i(t) > 0$, $i = 1, ..., n$) каждый из игроков стремится к своей цели.

$$\frac{1}{n}\sum_{i,\,j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|<1-\varepsilon\,. \tag{S}$$

Очевидно, что отсюда тем более не следует: $\rho\left(A\right)<1$. Тем не менее, введя на множестве матриц, удовлетворяющих условию (S) равномерную меру, покажите, что относительная мера тех матриц (удовлетворяющих условию (S)), для которых спектральный радиус не меньше единицы, стремится к нулю с ростом n (ε – фиксировано и от n не зависит).

Указание. 1. Покажите, что при доказательстве можно ограничиться матрицами с неотрицательными элементами.

2. Покажите, что, не ограничивая общности, можно также считать, что в определении множества S стоит не неравенство, а равенство. Так определенное множество матриц будем называть SE.

3. Положите, например,[4] $a_{ij}\in \mathrm{Exp}\left(n/\left(1-\varepsilon\right)\right)$ – н.о.р. и покажите, что при $n\to\infty$ распределение элементов случайной матрицы $A=\left\|a_{ij}\right\|_{i,\,j=1}^{n}$ будет сходиться (уточните в каком смысле) к равномерному распределению на SE.

4. Покажите, введя обозначение $P_n=P\left(\left\|A\right\|_{\square}\geq 1\right)\geq P\left(\rho\left(A\right)\geq 1\right)$ и используя неравенство Чебышева, что

$$P_n\leq nP\left(\sum_{j=1}^{n}a_{1j}\geq 1\right)\leq\frac{n}{\varepsilon^4}E\left[\left(\sum_{j=1}^{n}a_{1j}-\left(1-\varepsilon\right)\right)^4\right]=\mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}0\,.$$

Литература

1. *Опойцев В. И.* Устойчивые системы большой размерности // Автоматика и телемеханика. 1986. № 6. С. 43–49.
2. *Опойцев В. И.* Нелинейная системостатика. М.: Наука, 1986.

[4] Независимые, одинаково распределенные с.в. (случайные величины) по показательному закону с параметром $n/\left(1-\varepsilon\right)$, т.е. $P\left(a_{ij}>x\right)=\exp\left(-\left(n/\left(1-\varepsilon\right)\right)x\right)$.