Задание по теории вероятностей для студентов 871, 875, 876 групп

5 ноября 2010 г.

Составители: А.В. Гасников, Е.О. Ежова, Т.А. Нагапетян

К 3 декабря 2010 г. нужно представить решение всех задач без звездочек. И набрать не менее 10 звездочек.

Рекомендуемая литература:

1. *Натан А.А., Горбачев О.Г., Гуз С.А.* Теория вероятностей. М.: МЗ Пресс, 2007.

2. *Гнеденко Б.В.* Курс теории вероятностей. М.: УРСС, 2007.

3. *Фёллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения Т. 1, 2. М.: УРСС, 2010.

<u>Теория информации</u>

- *Холево А.С.* Введение в квантовую теорию информации. М.: МЦНМО, 2002.
- *Яглом А.М., Яглом И.М.* Вероятность и информация. М.: УРСС, 2006.
- *Боровков А.А.* Теория вероятностей. М.: УРСС, 2009.

Определение 1. ***Энтропией*** (мерой неопределенности) опыта X с возможными исходами $(x_1,\ldots,x_n)$ и соответствующими вероятностями исходов $(p_1,\ldots,p_n)$ называется функция

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log_2(p_i).$$

Опыт X_1 имеет большую неопределенность, чем опыт X_2, если $H\left(X_1\right) > H\left(X_2\right)$.

Задача 1. Имеются две урны, содержащие по 20 шаров – 10 белых, 5 черных и 5 красных в первой и 8 белых, 8 черных и 4 красных во второй. Из каждой урны вытаскивают по одному шару. Исход какого из этих двух опытов следует считать более неопределенным?

Если перед проведением опыта X провести некоторое наблюдение или измерение, то вполне вероятно, что энтропия X уменьшится. При этом если наблюдение Y не зависит от опыта X , то энтропия не изменится. Если осуществление Y полностью предопределяет X , то энтропия уменьшится до нуля.

Определение 2. Разность $I(X;Y)=H(X)-H\left(X\middle|Y\right)$ называют ***информацией***,

$$H\left(X\middle|Y\right)\overset{def}{=}-\sum_{y}p_y\sum_{i=1}^{n}p\left(i\middle|y\right)\log p\left(i\middle|y\right),\text{ где } p\left(i\middle|y\right)=p_{i,y}/p_y .$$

Задача 2. Пусть для некоторого пункта (скажем, для г. Долгопрудный) вероятность того, что 15 июня будет дождь, равна 0.4, а вероятность того, что дождя не будет, равна 0.6. Пусть далее для этого же пункта вероятность дождя 15 октября равна 0.8, а вероятность отсутствия осадков равна 0.2. Предположим, что определенный метод прогноза погоды 15 июня оказывается верным в $3/5$ всех тех случаев, когда предсказывается дождь и в $4/5$ тех случаев, в которых прогнозируется отсутствие осадков. Применительно к погоде на 15 октября этот метод оказывается правильным в $9/10$ тех случаев, когда предсказывается дождь, и в половине случаев, когда предсказывается его отсутствие. В какой из указанных двух дней прогноз дает нам больше информации о реальной погоде?

Задача 3 (о джентльменах и шляпах). Три джентльмена заходят в комнату. Имеется три красных шляпы и две белых. Внезапно выключается свет, и в темноте каждый из джентльменов одевает одну из шляп, цвета которой он не видит. После включения света происходит следующий диалог:

Первый: я не знаю, какая на мне шляпа.

Второй: я тоже не знаю, какая на мне шляпа.

Третий: а я теперь знаю, какая на мне шляпа.

Какая шляпа на третьем джентльмене?

Задача 4 (“сто заключенных”). В коридоре находятся 100 человек, у каждого свой номер (от 1 до 100). Их по одному заводят в комнату, в которой находится комод со 100 выдвижными ящиками. В ящики случайным образом разложены карточки с номерами (от 1 до 100). Каждому разрешается заглянуть в не более чем 50 ящиков. Цель каждого – определить, в каком ящике находится его номер. Общаться и передавать друг другу информацию запрещается. Предложите стратегию, которая с вероятностью не меньшей 0.3 (в предположении, что все $100!$ способов распределения карточек по ящикам равновероятны) приведет к выигрышу всей команды. Команда выигрывает, если все 100 участников верно определили ящик с карточкой своего номера.

Стратегия. Каждый человек первым открывает ящик под его номером, вторым – под номером, который указан на карточке, лежащей в ящике, открытом перед этим и т.д. Среднее число циклов длины r в случайной перестановке – есть 1/r (покажите, используя, например, задачу “про предельные меры”). Тогда среднее число циклов длины большей n/2 есть $\sum_{i=n/2}^{n}\frac{1}{i}$. Это и есть вероятность существования цикла длины большей n/2. Поэтому вероятность успеха команды – есть $1-\sum_{i=51}^{100}\frac{1}{i}\approx 0,31$. Если же просто произвольно открывать ящики, то вероятность успеха будет $2^{-100}\approx 8\cdot 10^{-31}$. В случае, когда карточки разложены не случайным образом, то следует сделать случайной нумерацию ящиков, и далее следовать старой стратегии.

http://algo.inria.fr/flajolet/Publications/book.pdf p.176

Задача 5 (теорема Шеннона – Макмиллана или основная теорема теории кодирования). Пусть буква X - дискретная с.в., принимающая значения из алфавита $(x_1,\ldots,x_m)$ с вероятностями $(p_1,\ldots,p_m)$. Имеется случайный текст из $n>>1$ букв X (предполагается, что буквы в тексте не зависимы друг от друга). Общее количество таких текстов $2^{n\log m}$. Поэтому можно закодировать все эти слова, используя $n\log m$ бит. Однако, используя то обстоятельство, что $(p_1,\ldots,p_m)$ - в общем случае неравномерное распределение, предложите лучший способ кодирования, основанный на усиленном законе больших чисел.

Указание. Пусть $\Omega=\{\omega:\ \ \omega=(X_1,X_2,\ldots,X_n),\ \ X_i\in 1,2,\ldots,m\}$ - пространство элементарных исходов. Вероятность появления слова $\omega=(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ равна $p(\omega)=p_{X_1}\cdot\ldots\cdot p_{X_n}$. Покажите, что по усиленному закону больших чисел (у.з.б.ч.)

$$-\frac{1}{n}\log p(\omega)=-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log p_{X_i}\xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.н.}}-\sum_{i=1}^{m}p_i\log p_i=H(X).$$

Будем называть текст ω δ - *типичным* если

$$2^{-n\cdot(H(X)+\delta)}<p(\omega)<2^{-n\cdot(H(X)-\delta)}.$$

Покажите, что

1) Существует не более $2^{n\cdot(H(X)+\delta)}$ типичных текстов;
2) Для $n>n(\varepsilon,\delta)$ существует, по крайней мере, $(1-\varepsilon)2^{n\cdot(H(X)-\delta)}$ типичных текстов.
3) Множество нетипичных текстов имеет вероятность $\le\varepsilon$.

Таким образом, можно осуществить эффективное кодирование данных, используя все двоичные последовательности длины $n\cdot(H(X)+\delta)$, чтобы закодировать все δ - типичные тексты и отбросить нетипичные. Вероятность ошибки при таком кодировании будет не больше ε. Обратно, любой код, использующий двоичные последовательности длины $n\cdot\left(H\left(X\right)-\delta\right)$, имеет асимптотически не исчезающую вероятность ошибки, стремящуюся к единице при $n\to\infty$.

Функцию $H\left(X\right)$ можно проинтерпретировать как меру количества информации (в битах на передаваемый символ) в случайном тексте. $nH\left(X\right)$ - характеризует меру неопределённости случайного текста. Ясно, что для $\left(p_1,\ldots,p_m\right)$ = $\left(1/m,\ldots,1/m\right)$ энтропия максимальна $H\left(X\right)=\log m$ и эффективное кодирование невозможно.

Производящие функции

- *Ландо С.К.* Лекции о производящих функциях. М.: МЦНМО, 2009.
- *Сачков В.Н.* Комбинаторные методы дискретной математики. М.: МЦНМО, 2004.
- *Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О.* Конкретная математика. М.: Мир & Бином, 2004.
- *Леонтьев В.К.* Избранные задачи комбинаторного анализа. М.: МГТУ, 2001.
- http://algo.inria.fr/flajolet/Publications/book.pdf

Пример 1. Сколько раз нужно подбросить монету, чтобы решка выпала два раза подряд?

Решение. Вероятностное пространство состоит из всех последовательностей букв Р и О, оканчивающихся на РР, но не содержащих двух Р подряд ранее. Любой элемент тогда имеет вид:

(О+РО)*РР – регулярное выражение.

Некоммутативная производящая функция имеет вид:

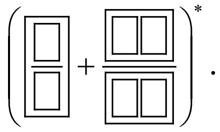
$$S = \text{РР+ОРР+РОРР+ООРР+ОРОРР+РООРР+ОООРР+}\ldots\text{=(1-О-РО)}^{-1}\text{РР}$$

Заменяем $\text{Р}\to pz;\quad \text{О}\to qz$, получим производящую функцию

$$G(z)=\frac{p^2z^2}{(1-qz-pqz^2)}$$

Для случайной величины числа бросаний до появления двух последовательных решек математическое ожидание равно $G'(1)=6$ (монета симметричная $p=q=1/2$).

Замечание. Задача о покрытии прямоугольника размера $2\times n$ домино имеет схожее решение. Регулярное выражение записывается в виде



Производящая функция $G(u) = \left(1 - u - u^2\right)^{-1}$. Коэффициент при u^l - число способов замостить прямоугольник размера $2 \times l$.

Можно, конечно, и не пользоваться производящими функциями.

Пусть А – среднее число бросков монеты до выпадения двух последовательных решек, В – среднее число бросков до выпадения двух последовательных решек, при условии, что на последнем ходе выпала решка. Тогда справедлива система уравнений:

$$A = \frac{1}{2}(A+1) + \frac{1}{2}(1+B),$$

$$B = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1+A).$$

Откуда А=6, В = 4.

Пример 2 (игра У. Пенни, 1969). Алиса и Билл играют в игру: они бросают монету до тех пор, пока не встретится РРО или РОО. Если первой появится последовательность РРО, выигрывает Алиса, если РОО – Билл. Будет ли игра честной?

Решение. Производящая функция времени ожидания последовательности РРО:

$$G(z) = \frac{z^3}{z^3 - 8(z-1)}.$$

Такая же производящая функция и для времен ожидания РОО. Таки образом, если каждый играет сам по себе (т.е. каждый подкидывает монетку), то ни у кого нет преимущества. Но если рассматривать одну игровую последовательность (кидается одна монетка), то это не верно.

Рассмотрим конфигурации, выигрышные для Алисы (А) и для Билла (В):

$$\mathrm{A{=}PPO{+}PPPO{+}OPPO{+}PPPPO{+}OPPPO{+}POPPO{+}OOPPO{+}\ldots}$$

$$\mathrm{B{=}POO{+}OPPO{+}PPOO{+}PPPOO{+}OPPOO{+}POPPO{+}OOPPO{+}\ldots}$$

Рассмотрим конфигурации всех последовательностей, для которых пока ни один из игроков не выиграл:

$$\mathrm{N{=}1{+}P{+}O{+}PP{+}PO{+}OP{+}OO{+}PPP{+}POP{+}OPP{+}\ldots}$$

Справедливы следующие равенства:

$$\mathrm{1{+}N(P{+}O){=}N{+}A{+}B},$$

$$\mathrm{NPPO{=}A},$$

$$\text{NPOO=B+AO}.$$

Подставляя вместо О и Р $1/2$, получим систему уравнений, решением которой является А = 2/3, В = 1/3. Алиса будет выигрывать примерно вдвое чаще Билла!

Задача 1. Теперь трое игроков: Алиса, Билл и Компьютер. Играют пока не выпадет одна из следующих последовательностей: A=PPOP, B=POPP, C=OPPP. Каковы шансы каждого выиграть?

۞*Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О.* Конкретная математика. М.: Мир & Бином, 2004, стр. 625.

Задача 2. Рассматривается игра У. Пенни из примера 2. Показать, что последовательность $a_1a_2\ldots a_l$ всегда уступает последовательности $\bar{a}_2a_1a_2\ldots a_{l-1}$, $l\geq 3$.

۞*Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О.* Конкретная математика. М.: Мир & Бином, 2004, стр. 635.

Задача 3 (об оценке хвостов). Пусть $\Psi(z)=Mz^X$ - производящая функция случайной величины (ПФСВ) X. Докажите, что

$$\mathrm{P}(X\leq r)\leq x^{-r}\Psi(x),\ \text{для}\ 0<x\leq 1;$$

$$\mathrm{P}(X\geq r)\leq x^{-r}\Psi(x),\ \text{для}\ x\geq 1.$$

۞*Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О.* Конкретная математика. М.: Мир & Бином, 2004.

Задача 4 (о червяке Шредингера). В вершине пятиугольника $ABCDE$ находится яблоко, а на расстоянии двух ребер, в вершине C, находится червяк. Каждый день червяк переползает в одну из двух соседних вершин с равной вероятностью. Так, через один день червяк окажется в вершине B или D с вероятностью $1/2$. По прошествии двух дней червяк может снова оказаться в C, поскольку он не запоминает своих предыдущих положений. Достигнув вершины A, червячок останавливается пообедать.

1. Чему равны математическое ожидание и дисперсия числа дней прошедших до обеда?
2. Какую оценку дает *неравенство Чебышёва* $\left(\mathrm{P}\left(|X-MX|\geq a\right)\leq DX/a^2\right)$ для вероятности p того, что это число дней будет 100 или больше?
3. Что позволяют сказать о величине p оценки из задачи “об оценки хвостов”.

Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика. М.: Мир & Бином, 2004, стр. 625.

Задача 5. Пять человек стоят в вершинах пятиугольника *ABCDE* и бросают друг другу диски Фрисби. У них имеется два диска, которые в начальный момент находятся в соседних вершинах. В очередной момент времени диски бросают либо налево, либо направо с одинаковой вероятностью. Процесс продолжается до тех пор, пока обе тарелки не окажутся в одной вершине.

1. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа пар бросков.
2. Найдите “замкнутое” выражение через числа Фибоначчи для вероятности того, что игра продлиться более 100 шагов.

Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика. М.: Мир & Бином, 2004.

Задача 6*. Обобщите задачу 4 на случай m-угольника и найдите математическое ожидание и дисперсию числа пар бросков до столкновения дисков. Докажите, что если m нечетно, то ПФСВ для числа бросаний представимо в следующем виде:[1]

$$G_m(z) = \prod_{k=1}^{(m-1)/2} \frac{p_k z}{1-q_k z},$$

где

$$p_k = \sin^2\frac{(2k-1)\pi}{2m},\ q_k = \cos^2\frac{(2k-1)\pi}{2m}.$$

Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика. М.: Мир & Бином, 2004.

Задача 7 (загадочный случайный суп)*. Студент, решивший отобедать в столовой, может обнаружить в своей тарелке с супом случайное число N инородных частиц ☹ со средним μ и конечной дисперсией. С вероятностью p выбранная частица является мухой, иначе это таракан; типы разных частиц независимы. Пусть F – количество мух и S – количество тараканов.

А) Покажите, что производящая функция случайной величины F равна

$$\psi_F(s) = \psi_N(ps+1-p).$$

[1] Воспользуйтесь подстановкой $z = 1/\cos^2\theta$.

Б) Предположим, что случайная величина N имеет пуассоновское (poisson) распределение с параметром μ (записывают $\mathrm{N} \in Po(\mu)$). Покажите, что F имеет пуассоновское распределение с параметром $p\mu$, а случайные величины F и S независимы. Покажите, что

$$\psi_N(s) = \psi_N\left(\frac{1}{2}(1+s)\right)^2 .$$

Убедитесь, что случайная величина N имеет пуассоновское распределение.

۞*Кельберт М.Я., Сухов Ю.М.* Вероятность и статистика в примерах и задачах. Т. 1. Основные понятия теории вероятностей и математической статистики. М.: МЦНМО, 2007.

Задача 8 (производящие функции, вычеты)*. Обозначим через E^n - множество бинарных последовательностей длины n, или множество вершин единичного n-мерного куба, а через E_k^n - k-ый слой куба E^n, то есть подмножество точек E^n, имеющих ровно k единичных координат. Пусть $X = (\vec{x}, \vec{y})$ - случайная величина, где $\vec{x} \in E_p^n$, $\vec{y} \in E_q^n$ - независимые и равномерно распределенные на E_p^n и E_q^n соответственно векторы. Обозначим через $a_{p,q}(k) = P\{X = k\}$. Доказать следующие утверждения:

1) $\sum_{k=0}^{n} a_{p,q}(k) z^k = \frac{1}{2\pi i} C_n^p \oint\limits_{|u|=\rho} \frac{(1+zu)^p (1+u)^{n-p}}{u^{q+1}} du$.

2) $a_{p,q}(k) = \frac{C_p^k C_{n-p}^{q-k}}{C_n^q}$.

3) $EX = \frac{pq}{n}$.

4) $DX = \frac{pq}{n(n-1)}\left(n + \frac{pq}{n} - (p+q)\right)$.

Указание. Вычислите производящую функцию случайной величины $X = (\vec{x}, \vec{y})$:

$$F_X(z) = \sum_{k=0}^{n} a_{p,q}(k) z^k = \frac{1}{C_n^p C_n^q} \sum_{x \in E_p^n;\, y \in E_q^n} z^{(x,y)} .$$

۞*Леонтьев В.К.* Избранные задачи комбинаторного анализа. М.: МГТУ, 2001.

Сложность алгоритмов

- *Кузюрин Н.Н., Фомин С.В.* Эффективные алгоритмы. М.: МФТИ, 2007.

  http://discopal.ispras.ru/lectures/book-advanced-algorithms.pdf

Пусть по входным данным (входу) **x** алгоритм А вычисляет результат (выход) **y**. Обозначим функции затрат времени и памяти данного алгоритма А на входе **x**, как

$$C_A^T(x), \quad C_A^S(x).$$

Определение 1. Временной и пространственной сложностями алгоритма А называют функции числового аргумента

$$T_A(n) = \max_{\|x\|=n} C_A^T(x), \quad S_A(n) = \max_{\|x\|=n} C_A^S(x).$$

Более полно, каждая такая сложность имеет сложность в худшем случае.

Рассмотрим конечное множество $X_s = \{x : \|x\| = s\}$ входов размера s. Будем предполагать, что каждому $x \in X_s$ приписана некоторая вероятность $P_s(x)$: $P_s(x) \in [0;1]$, $\sum_{x \in X_s} P_s(x) = 1$. На заданном таким образом вероятностном пространстве затраты алгоритма А на входе x размера s (т.е. $C_A^T(x)$, $C_A^S(x)$) являются случайными величинами.

Определение 2. Сложностью в среднем называют математическое ожидание соответствующей случайной величины:

$$\bar{T}_A(\cdot) = \sum_{x \in X_s} P_s(x) C_A^T(x) \quad \bar{S}_A(\cdot) = \sum_{x \in X_s} P_s(x) C_A^S(x)$$

Замечание. Несложно показать, что для любого алгоритма А при любом распределении вероятностей на множестве входов $X_s = \{x : \|x\| = s\}$:

$$\bar{T}_A(s) \le T_A(s), \quad \bar{S}_A(s) \le S_A(s).$$

Сортировка

Рассматриваются входы размера n – массив $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с попарно различными элементами. Можно перейти от бесконечного множества входов размера n к конечномерному пространству перестановок длины n (обоснуйте). Вводится равномерное распределение на множестве всех перестановок длины n.

Задача 1 (быстрая сортировка). Оценить сложность в среднем (временную и пространственную) алгоритма быстрой сортировки.

Указание. Разбить множество всех входов (всех перестановок размера n) на непересекающиеся классы $K_n^i \quad (i = 1,..,n)$ -событие, состоящее из тех входов, что разбивающий элемент является i-ым по величине (для перестановок он равен i). Воспользоваться формулой полной вероятности.

Задача 2. Найти среднее число присваиваний m:= при выполнении алгоритма поиска наименьшего элемента массива:

```
m:=x[1];
for i=2 to n do
    if x[i]<m then m:=x[i]
end;
```

Предполагается, что все возможные взаимные порядки элементов в исходном массиве длины n являются равновероятными; в качестве размера входа берется n.

Указание. Рассмотреть разложение всего вероятностного пространства в сумму двух событий: последний элемент исходного массива является его наименьшим элементом (вероятность равна 1/n) и, соответственно, последний элемент исходного массива не является его наименьшим элементом (вероятность 1-1/n). Пусть s(n) – искомое математическое ожидание. Показать, что условное математическое ожидание исследуемого числа присваиваний, соответствующее первому событию, есть s(n-1)+1, а условное математическое ожидание, соответствующее второму событию, есть s(n-1). Пользуюсь формулой полного математического ожидание, вывести отсюда рекуррентное соотношение для s(n) и найти его решение, удовлетворяющее условию s(1)=1.

Задача 3 (сортировка вставками). На k-ом цикле (k=1,..,n-1) первые k элементов уже отсортированы (по возрастанию). Требуется найти позицию k+1 элемента относительно предыдущих элементов. Для этого можно сравнивать x[k+1] элемент с отсортированными k элементами, пока не найдем элемент $\leq$x[k+1], тем самым найдется место для x[k+1] в отсортированном массиве длины k. Для того чтобы всегда нашелся такой элемент, можно дополнить исходный массив элементом x[0] $=-\infty$. Число выполненных сравнений (на k –ом цикле) равно числу элементов исходного массива с индексами меньшими k+1, но большими x[k+1] плюс еще одно сравнение. В нижеследующих терминах общее число сравнений выполненных алгоритмом рано $I(n)+n-1$. Найдите среднее время работы алгоритма (среднее число сравнений), а также дисперсию числа сравнений, пользуясь следующим указанием.

Указание.

Определение 3. Говорят, что элементы (σ_i, σ_j) образуют инверсию в перестановке $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$, если $i < j$, но $\sigma_i > \sigma_j$.

Сопоставим перестановке $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ последовательность $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$, где b_k - число элементов перестановки, предшествующих k, но больших k. Заметим, что $0 \le b_k \le n-k$, $k = 1,\ldots,n$. Покажите, что это соответствие взаимно однозначно. Число инверсий в перестановке длины n равно $I(n) = \sum_{k=1}^{n} b_k$. Последовательности $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ сопоставим моном $x_{b_1} x_{b_2} \cdots x_{b_n}$. Тогда производящая функция

$$F(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} x_{b_1} x_{b_2} \cdots x_{b_n}$$

- есть сумма всех таких мономов, соответствующих каждой из n! возможных перестановок.

Покажите, что

$$F(x_0, x_1, \ldots, x_n) = x_0 (x_0 + x_1)(x_0 + x_1 + x_2) \cdots (x_0 + x_1 + \cdots + x_{n-1}).$$

Покажите, что обычная производящая функция числа инверсий в перестановке длины n есть

$$F(z) = z^0 \left(z^0 + z^1\right)\left(z^0 + z^1 + z^2\right) \cdots \left(z^0 + z^1 + \cdots + z^{n-1}\right).$$

Производящая функция случайной величины, равной числу инверсий в перестановке тогда имеет вид:

$$\Phi(z) = \sum_{k=0}^{n(n-1)/2} P\{I(n) = k\} z^k = \frac{1}{n!} F(z) = \prod_{k=1}^{n} b_k(z),$$

$$b_k(z) = \frac{z^0 + z^1 + \ldots + z^{n-k}}{n-k+1}.$$

Далее для решения задачи нужно воспользоваться связью между производящей функцией случайной величины и моментами этой случайной величины.

Сачков В.Н. Комбинаторные методы дискретной математики. М.: МЦНМО, 2004.

Определение 4. Алгоритм с элементом случайности, реализуемый обращениями к генератору случайных чисел, называются рандомизированными.

Мы будем рассматривать вероятностные алгоритмы типа Монте-Карло, для них полученный ответ может быть неправильным, но с малой вероятностью.

Алгоритм быстрой сортировки на «плохих» входных данных («почти упорядоченном массиве») будет работать $O(n^2)$.

Задача 4 (быстрая сортировка). Покажите, что временная сложность рандомизированного алгоритма быстрой сортировки, где разбивающий элемент выбирается случайно, допускает оценку $O(n \log n)$.

Замечание. Правомерен взгляд на рандомизированные алгоритмы, при котором каждому возможному входу сопоставляется вероятностное пространство обычных детерминированных алгоритмов.

Задача 5. А) Пусть имеется генератор случайных чисел, в результате обращения к которому появляется 0 или 1 с одинаковой вероятностью равной 1/2 (аналог подбрасывания симметричной монеты). Пусть задано вещественное число $0 \le p \le 1$. С помощью имеющегося генератора определить генератор randp, в результате обращения к которому появляется 0 или 1 с вероятностями p и $1-p$ соответственно (незначительные отклонения допустимы). Оцените сложность в среднем алгоритма получения одного случайного числа с помощью randp (затраты определяются числом обращений к изначально имеющемуся генератору). **Б)** Пусть имеется генератор случайных чисел randp (описанный выше). Известно, что $p \ne 0, \quad p \ne 1$. Как с помощью него сконструировать генератор, в результате обращения которому появляется 0 или 1 с одинаковой вероятностью 1/2. **В)** Чему равно математическое ожидание числа обращений к изначально имеющемуся генератору случайных чисел при построении последовательности пар до появления 0,1 или 1,0? Найти сложность в среднем алгоритма получения k «равновероятных» нулей и единиц с помощью сконструированного генератора (затраты определяются количеством обращений к изначально имеющемуся генератору). Можно ли указать значения p, для которых эта сложность имеет минимальное и, соответственно, максимальное значение?

Указание. А) Представьте p (возможно, с небольшой погрешностью) в виде конечной суммы вида

$$\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \cdots + \frac{a_k}{2^k}, \quad a_i \in \{0,1\}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Б) Порождая подряд две цифры с помощью имеющегося генератора, мы получаем комбинации 0,1 и 1,0 с одинаковой ненулевой вероятностью.

Соболь И.М. Численный метод Монте – Карло. М.: Наука, 1977.

Интегральная геометрия

Задача 1 (изогнутая игла Бюффона). Любопытный студент швейного техникума решил повторить опыты Бюффона по бросанию иглы (студент хочет оценить число π). Для этого он подготовил горизонтально расположенный лист бумаги, разлинованный параллельными прямыми так, что расстояние между соседними прямыми равно 1. Однако в распоряжении студента оказалось только погнутая иголка. Иголка имеет форму кочерги, но студент не имеет точного представления о том, как именно погнута иголка. Ему известно лишь то, что длина иголки, до того как она погнулась, была равна 2. Студент бросил погнутую иголку 1 000 000 раз и посчитал суммарное число пересечений, учитывая кратность. Помогите студенту оценить число π: **а)** с помощью неравенства Чебышёва; **б)** с помощью з.б.ч. (закона больших чисел) и неравенств о вероятностях больших уклонениий (см., например, задачу "принцип концентрации меры"); **в)** с помощью ц.п.т. (центральной предельной теоремы) и оценок скорости сходимости в ц.п.т., например, с помощью неравенства Берри – Эссена или более точных аппроксимаций.

Петров В.В. Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. М.: Наука, 1987.

Ширяев А.Н. Вероятность -1, 2. М.: МЦНМО, 2007.

Сенатов В.В. Центральная предельная теорема. Точность аппроксимации и асимптотические разложения. М.: УРСС, 2009.

Задача 2 (средняя площадь поверхности и интегральная геометрия). Покажите, что средняя площадь ортогональной проекции куба с ребром единица на случайную плоскость равна $3/2$.

Указание. Обозначим через S_k - k-мерный объем ортогональной проекции рассматриваемой области в $\mathbb{R}^n$ на случайную k-мерную плоскость, или, что то же самое, среднее значение (усредненное по всем k-мерным плоскостям, предполагаемым равновероятными) площади ортогональной k-мерным проекции области. Оказывается, что S_k также равны средним значениям (усредненным по поверхности рассматриваемой области) симметрических функций от главных кривизн поверхности, и участвуют в (удивительной) формуле для объема h-окрестности этой области:

$$V(h) = V_0 + V_1 h + V_2 h^2 + \ldots + V_n h^n,$$

где V_0 - объем области; V_1 - (n-1)-мерный объем границы области, пропорциональный среднему значению от числа 1; число V_k пропорционально S_k и выражается через средние значения от произведений k главных кривизн. В случае n = 3, из главных кривизн k_1 и k_2 в каждой точке можно составить *среднюю кривизну* $k_1 + k_2$ и *гауссову кривизну* $K = k_1 k_2$. В этом случае объем h-окрестности получается $V(h) = V_0 + V_1 h + V_2 h^2 + V_3 h^3$, где V_2 пропорционально интегралу от средней кривизны по всей поверхности, а V_3 - от гауссовской:

$$V_3 = \frac{4}{3}\pi \iint K dS .$$

Например, для сферы радиуса R

$$V(h) = \frac{4}{3}\pi \cdot (R+h)^3 = \frac{4}{3}\pi R^3 + h \cdot (4\pi R^2) + h^2 (4\pi R) + \frac{4}{3}\pi h^3 .$$

Здесь

$$k_1 = k_2 = 1/R ,\ k_1 + k_2 = 2/R ,\ k_1 k_2 = 1/R^2 ,\ \iint (k_1 + k_2) dS = 8\pi R ,$$

$$\iint (k_1 k_2) dS = 4\pi \ (\textit{формула Гаусса - Бонне}).$$

Коэффициент V_3 не зависит от деталей области, а зависит только от *эйлеровой характеристики* поверхности рассматриваемой области. Это обстоятельство привело Г. Вейля к созданию теории характеристических классов и чисел, обобщающих формулу Гаусса – Бонне.

Кендалл М., Моран П. Геометрические вероятности. М.: Наука, 1972.

Сантало Л. Интегральная геометрия и геометрические вероятности. М.: Наука, 1983.

Задача 3 (принцип концентрации площади сферы; А. Пуанкаре, 1911). Покажите, что если в многомерном шаре задано равномерное распределение вероятностей и согласно этому распределению вероятностей сгенерировано два случайных вектора, то с вероятностью близкой к единице концы этих векторов будут лежать почти на границе шара и эти два случайных вектора будут почти ортогональны.

Указание. Нетривиально второе утверждение (про ортогональность). Для того чтобы его установить, покажите, что доля от площади всей сферы S_r^n (радиуса r), которую занимает площадь сегмента, проектирующегося в отрезок $[a,b]$, скажем, оси x_1, равна

$$P[a,b] = \frac{\int_a^b \left(1-(x/r)^2\right)^{\frac{n-3}{2}} dx}{\int_{-r}^{r} \left(1-(x/r)^2\right)^{\frac{n-3}{2}} dx} .$$

Фиксируя $r = 1$ и устремляя n к бесконечности, получите,

$$P[-\delta,\delta] \sim 1 - \sqrt{\pi/2}\, \exp\left(-\delta^2 n/2\right).$$

В статистической физике $\sum_{i=1}^{n} V_i^2 = \frac{2E_n}{m} \sim n$. Поэтому если известно, что вектор скоростей молекул газа равномерно распределен по поверхности постоянной энергии,[2] то для того чтобы найти (следуя Максвеллу) распределение компонент вектора скорости, скажем V_1, нужно осуществить термодинамический скейлинг $n \to \infty$, $r = \sigma n^{1/2} \to \infty$

$$P[a,b] = \frac{\int_a^b \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)dx}{\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)dx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_a^b \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)dx.$$

Таким образом, получаем нормальный закон распределения Максвелла в статистической физике.

Зорич А.В. Математический анализ задач естествознания. М.: МЦНМО, 2008. С. 48-56.

Задача 4 (изопериметрическое неравенство и принцип концентрации меры; П. Леви, 1919). Число μ_f называют медианой функции f, если

$$\mu\left(\vec{x} \in S_1^n : \ f(\vec{x}) \geq \mu_f\right) \geq 1/2 \ \text{ и } \ \mu\left(\vec{x} \in S_1^n : \ f(\vec{x}) \leq \mu_f\right) \geq 1/2,$$

где $\mu(d\vec{x})$ - равномерное мера на единичной сфере S_1^n в $\mathbb{R}^n$. Пусть A - измеримое (борелевское) множество на сфере S_1^n. Через A_δ - будем обозначать δ-окрестность множества A на сфере S_1^n. Предположим теперь, что в некотором царстве, расположенном на S_1^n, царь предложил царице Диодоне построить огород с заданной длиной забора. Царица хочет, чтобы её огород при заданном периметре имел наибольшую площадь. Таким образом, царице надо решить изопериметрическую задачу (такие задачи обычно рассматриваются в курсах вариационного исчисления). Решение этой задачи хорошо известно – "круглый огород". Для нас же полезно, рассмотрение двойственной задачи, имеющей такое же решение: при заданной площади огорода спроектировать его так, чтобы он имел наименьшую длину забора, его ограждающего. Используя решение этой задачи, покажите, что если $\mu(A) \geq 1/2$, то

$$\mu(A_\delta) \geq 1 - \sqrt{\pi/2}\exp\left(-\delta^2 n/2\right).$$

[2] Равномерное распределение на поверхности постоянной энергии возникло из-за того, что инвариантной (и предельной по эргодической гипотезе) мерой для гамильтоновой системы будет как раз равномерная мера Лиувилля (фазовый объем сохраняется). Поскольку выполняется закон сохранения энергии, то система "живет" на поверхности постоянной энергии. Следовательно, носитель инвариантной меры сосредоточен именно на этой поверхности.

Пусть теперь на S_1^n задана функция с модулем непрерывности

$$\omega_f(\delta) = \sup\left\{\left|f(\vec{x}) - f(\vec{y})\right| : \rho(\vec{x}, \vec{y}) \le \delta, \vec{x}, \vec{y} \in S_1^n\right\}.$$

Тогда

$$\mu\left(\vec{x} \in S_1^n : \left|f(\vec{x}) - \mu_f\right| \ge \omega_f(\delta)\right) \le \sqrt{\pi/2}\exp\left(-\delta^2 n/2\right).$$

Можно показать, что при весьма естественных условиях медиана асимптотически близка к среднему значению (математическому ожиданию). Аналогичное неравенство можно получить (М. Талагран, 1994), например, для модели случайных графов (Эрдёша - Реньи). И исследовать плотную концентрацию около среднего значения различные функций на случайных графов: число независимости, хроматическое число и т.п..

Ledoux M. Concentration of measure phenomenon. Providence, RI, Amer. Math. Soc., 2001 (Math. Surveys Monogr. V. 89).

Алон Н., Спенсер Дж. Вероятностный метод. М.: Бином, 2007.

Вероятностный метод

- *Алон Н., Спенсер Дж.* Вероятностный метод. М.: Бином, 2007.

Пусть X – случайная величина, принимающая неотрицательные значения, $\varepsilon > 0$. Тогда

$$P\{X \ge \varepsilon\} \le \frac{EX}{\varepsilon} \text{ (\textit{неравенство Маркова})}.$$

Задача 1 (модель случайного графа Эрдёша – Реньи, 1959-1961). Задан случайный граф $G(n, p)$ (на n вершинах, любые две из которых соединяются ребром с вероятностью p, $p \in [0,1]$). Случайная величина $T_n(G)$ - равна числу треугольников, образованных ребрами, в случайном графе $G(n, p)$. Воспользовавшись неравенством Маркова, доказать, что если $p = o(1/n)$, то почти наверное треугольников в случайном графе нет, т.е.

$$P\{T_n(G) = 0\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$$

Указание. Для подсчета математического ожидания числа треугольников в случайном графе воспользуйтесь линейностью математического ожидания, представив $T_n(G)$ в виде суммы случайных величин, равных индикатору события – k-ый треугольник есть в случайном графе:

$$T_n(G) = T_{n,1}(G) + \ldots + T_{n,C_n^3}(G),$$

$$T_{n,k}(G)=\begin{cases}1, & \Delta_k \in G\\ 0, & \Delta_k \not\in G\end{cases}.$$

Пусть $X_1,\ldots,X_n$ независимые случайные величины, распределенные по закону:

$$X_k=\begin{cases}-1, & p=\dfrac{1}{2}\\ 1, & p=\dfrac{1}{2}\end{cases}.$$

Тогда приходим к знакомой (по задаче “принцип концентрации меры”) оценке: $\forall\ \delta>0$

$P\left\{\left|X_1+\ldots+X_n\right|\ge a\right\}\le 2\exp\left(-a^2/\left(2n\right)\right)$ (*неравенство о вероятностях больших уклонений*).

Задача 2. $V=\{1,...,m\}$, $\mathrm{M}=\{M_1,...,M_n\}$, $M_k\subseteq V$.

$\chi:\ \ V\to\{-1,1\}$ (можно интерпретировать, как раскраску множества V в два цвета).

$\chi(M_i)=\sum\limits_{a\in M_i}\chi(a)$ ($\left|\chi(M_i)\right|$ отвечает за «равномерность» покраски множества M_i в два цвета).

$disc(\mathrm{M},\chi)=\max\limits_{i=1..n}\left|\chi(M_i)\right|$ (от слова discrepancy - уклонение) - мера того, что хотя бы один объект в M раскрашен «неравномерно».

$disc(\mathrm{M})=\min\limits_{\chi} disc(\mathrm{M},\chi)$ («поиск» наилучшей раскраски).

Показать, что для $\forall n\ \forall m\ \forall \mathrm{M}\ \ disc(\mathrm{M})\le\sqrt{2m\ln(2n)}$. Т. е. $\exists\chi: disc(\mathrm{M},\chi)\le\sqrt{2m\ln(2n)}$.

Указание. Воспользоваться вероятностным методом: применить неравенство больших уклонений к случайной величине $\chi(M_i)$. И показать, что

$$P\left\{\left|\chi(M_i)\right|\ge\sqrt{2m\ln(2n)}\right\}<\frac{1}{n}$$

Затем, получить оценку $P\left\{\exists i:\left|\chi(M_i)\right|\ge\sqrt{2m\ln(2n)}\right\}<1$, откуда

$$P\left\{\forall i:\left|\chi(M_i)\right|<\sqrt{2m\ln(2n)}\right\}>0.$$

Задача 3.** Оцените, сколько можно найти подмножеств множества $\{1,2,...,n\}$ таких, что симметрическая разность любых двух из них имеет мощность не менее $n/3$?

Указание. Выбирайте множества случайным образом, и покажите, что вероятность иметь симметрическую разность мощности меньше $n/3$ для отдельной пары экспоненциально мала, так что ответ будет $\sim \exp(cn)$ для некоторой постоянной $c>0$.

Задача 4 (вероятностный метод в теории чисел; Харди – Рамануджан – Туран – Эрдёш - Кац, 1920, 1934, 1940)*.** Пусть $\nu(n)$ обозначает количество простых чисел p, делящих n. Тогда для любого λ

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left|\left\{k:1\le k\le n, \nu(k)\ge \ln\ln n+\lambda\sqrt{\ln\ln n}\right\}\right|=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\lambda}^{\infty}e^{-t^2/2}dt .$$

__**Разные задачи**__

Задача 1 (парадокс транзитивности). Будем говорить, что случайная величина X больше по вероятности случайной величины Y, если $\mathrm{P}(X>Y)>\mathrm{P}(X\le Y)$. Пусть известно, что для случайных величин X,Y,Z,W выполнена следующая цепочка равенств:

$$\mathrm{P}(X>Y)=\mathrm{P}(Y>Z)=\mathrm{P}(Z>W)=\alpha>\frac{1}{2}$$

Верно ли, что X больше по вероятности W и почему?

۞*Секей Г.* Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике. Москва – Ижевск, РХД, 2002.

Задача 2 (парадокс Стефана Банаха). В двух спичечных коробках имеется по **n** спичек. На каждом шаге наугад выбирается коробок, и из него удаляется (используется) одна спичка. Найти вероятность того, что в момент, когда один из коробков опустеет, в другом останется **k** спичек.

۞*Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О.* Конкретная математика. М.: Мир & Бином, 2004, стр. 471, 631 (здесь рассмотрена схожая задача).

Задача 3. До проведения схемы испытаний Бернулли разыгрывается с.в. p имеющая равномерное распределение на отрезке $[0.1, 0.9]$ (результаты розыгрыша нам неизвестны). После того как эта с.в. была разыграна, начинают проводиться опыты по схеме Бернулли (независимо $n = 1000$ раз подкидывается монетка) с вероятность успеха (выпадения "орла") в каждом опыте равной p (после того как с.в. p была разыграна, она уже приняла какое-то значения из отрезка $[0.1, 0.9]$ и рассматривается в серии опытов Бернулли уже как число, причем не меняющееся от опыта к опыту). В результате опыта было посчитано значение числа успехов $r = 777$. Определите апостериорное распределение с.в. p, т.е. найдите условную плотность распределения $p(\mathrm{p}|r = 777)$. Оцените, как изменится ответ, если точное значение числа успехов нам неизвестно. Известно только, что $r \in [750, 790]$. Т.е. посчитайте условную плотность вероятности $p(\mathrm{p}|r \in [750, 790])$.

Задача 4 (задача о наилучшем приближении)*. Предположим, что с.в. $X \in L_2$, это означает $MX^2 < \infty$. Докажите, что

$$\left\| X - M\left(X \,|Y_1,...,Y_n \right) \right\|_{L_2} = \min_{\varphi \in \mathrm{H}} \left\| X - \varphi(Y_1,...,Y_n) \right\|_{L_2}, \qquad (*)$$

где H - подпространство пространства L_2 всевозможных борелевских функций $\varphi(Y_1,...,Y_n) \in L_2$; $M\left(X \,|Y_1,...,Y_n \right)$ - условное математическое ожидание с.в. X относительно σ-алгебры порожденной с.в. $Y_1,...,Y_n$, часто говорят просто относительно с.в. $Y_1,...,Y_n$;

$$\|X\|_{L_2} = \sqrt{(X, X)_{L_2}} = \sqrt{M(X \cdot X)} = \sqrt{M\left(X^2\right)}.$$

Пояснение. Утверждение задачи означает, что в гильбертовом пространстве $L_2(\Omega, \Xi, \mu)$ всевозможных квадратично интегрируемых с.в. над заданным вероятностным пространством (Ω, Ξ, μ), ограниченный линейный оператор условного математического ожидания $E(\,\bullet\,|Y_1,...,Y_n)$: $L_2 \to L_2$ $\left(X \to M\left(X \,|Y_1,...,Y_n \right) \right)$ есть ни что иное, как проекция $X \in L_2$ на подпространство H.

۞*Розанов Ю.А.* Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика. М.: Наука, 1985.

Задача 5 (задача о линейной регрессии)*. Докажите, что если в условиях задачи 4 $\left(X, Y_1,...,Y_n \right)^T$ - является нормальным случайным вектором (без ограничения общности можно также считать, что $(Y_1,...,Y_n)^T$ - невырожденный нормальный случайный вектор), то в качестве Н можно взять подпространство всевозможных линейных комбинаций с.в. $Y_1,...,Y_n$. Т.е. мы можем более конкретно сказать на каком именно классе борелевских функций достигается минимум в (*).

Указание. Будем искать $M\left(X\left|Y_1,...,Y_n\right.\right)$ в виде

$$M\left(X\left|Y_1,...,Y_n\right.\right)=c_1Y_1+...+c_nY_n.$$

Поскольку $\left(X,Y_1,...,Y_n\right)^T$ - нормальный случайный вектор, то из условий, которые как нетрудно проверить (проверьте), однозначно определяют вектор коэффициентов $\left(c_1,...,c_n\right)^T$,

$$\forall\ k=1,...,n\to\left(X-c_1Y_1-...-c_nY_n,Y_k\right)_{L_2}=M\left(\left(X-c_1Y_1-...-c_nY_n\right)\cdot Y_k\right)=0$$

следует (объясните почему), что

$$X-M\left(X\left|Y_1,...,Y_n\right.\right)\ \text{и}\ \varphi\left(Y_1,...,Y_n\right)\ \text{- независимые с.в..}$$

Функция φ - произвольная борелевская функция из L_2. Так как (поясните почему)

$$M\left(X-M\left(X\left|Y_1,...,Y_n\right.\right)\right)=0,\ M\left(\left(X-M\left(X\left|Y_1,...,Y_n\right.\right)\right)\cdot\varphi\left(Y_1,...,Y_n\right)\right)=0,$$

то $X-M\left(X\left|Y_1,...,Y_n\right.\right)$ ортогонален подпространству Н пространства L_2 всевозможных борелевских функций $\varphi\left(Y_1,...,Y_n\right)\in L_2$. Следовательно,

$$M\left(X\left|Y_1,...,Y_n\right.\right)=c_1Y_1+...+c_nY_n$$

удовлетворяет условию (*).

Розанов Ю.А. Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика. М.: Наука, 1985.

Задача 6 (вырожденный нормальный случайный вектор).

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\in N\left(\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix},\begin{Vmatrix}5&2&7\\2&5&7\\7&7&14\end{Vmatrix}\right).$$

а) Найдите распределение случайной величины $y_1=x_1+x_2-x_3$.

б) Найдите распределение случайной величины $y_2=x_1+x_2+x_3$.

в) Найдите $M\left(y_2 \middle| x_1 = 5, x_2 = 3\right)$.

г) Найдите $M\left(y_2 \middle| x_1 = 5, x_2 < 3\right)$.

д) Найдите $P\left(y_2 < 10 \middle| x_1 = 5, x_2 < 3\right)$.

Задача 7. Может ли функция

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1, & t \in [-T, T] \\ 0, & t \notin [-T, T] \end{cases}$$

быть характеристической функцией некоторой с.в. ($\exists ?\ X:\ \varphi(t) = Me^{itX}$)? Изменится ли ответ, если "чуть-чуть" размазать (сгладить) разрывы функции $\varphi(t)$ в точках $t = \pm T$?

Указание. Для ответа на первый вопрос покажите, что если $\varphi(t)$ - непрерывна в точке $t = 0$, то она непрерывна везде (можно ли этот результат обобщить на старшие производные $\varphi(t)$?).

Для ответа на второй вопрос покажите, что $\varphi(t)$ не является неотрицательно определенной функцией (см. *теорему Бохнера - Хинчина*). Для этого достаточно показать, что преобразование Фурье $\varphi(t)$ не является всюду неотрицательной функцией.

Задача 8*. Докажите, что

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{L_2} X \Rightarrow X_n \xrightarrow[n\to\infty]{L_1} X \Rightarrow \underbrace{X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} X}_{\Downarrow} \Leftarrow X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.н.}} X$$

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} X$$

Здесь d – первая буква от слова distribution (сходимость по распределению = в основном = слабая). С помощью контрпримеров, покажите, что никакие другие стрелки импликации в эту схему в общем случае добавить нельзя. При каких дополнительных условиях можно утверждать, что

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.н.}} X \Rightarrow X_n \xrightarrow[n\to\infty]{L_1} X\ ?$$

Дополнение. Поскольку L_p, $p \geq 1$ – банахово пространство, т.е. полное нормированное (метрическое), то справедлив критерий Коши для сходимости в L_p, $p \geq 1$. Естественно задаться вопросом: а справедлив ли этот критерий для других типов сходимости? Оказывается, что да. Для сходимости по вероятности и распределению это следует из того, что обе эти сходимости метризуемы (и в этих метриках пространства полные), т.е. подобно тому, что по определению

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{L_2} X \Leftrightarrow \rho_{L_2}\left(X_n, X\right) = E\left(\left(X_n - X\right)^2\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

можно показать, что

а) $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} X \Leftrightarrow \rho_P\left(X_n, X\right) = M\left(\dfrac{\left|X_n - X\right|}{1+\left|X_n - X\right|}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0;$

б) $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} X \Leftrightarrow \rho_d\left(X_n, X\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, где $\rho_d\left(X_n, X\right)$ - *метрика Леви - Прохорова.*

Сходимость п.н. не метризуема и для неё нужно доказывать критерий Коши.

***** Докажите п. а).

۞*Ширяев А.Н.* Вероятность -1. М.: МЦНМО, 2007.

Задача 9 (вероятностное доказательство формулы Эйлера). Пусть X – целочисленная случайная величина с распределением

$$P\left(X = n\right) = \frac{1}{\varsigma(s)n^s}, \text{ где } \varsigma(s) = \sum_{n\geq 1} n^{-s}, \quad s > 1.$$

Пусть $1 < p_1 < p_2 < p_3 < \ldots$ - простые числа, и пусть A_k - событие = {X делится на p_k }.

А) Найдите $P\{A_k\}$ и покажите, что события $A_1, A_2, \ldots$ независимы.

Б) Получите, что

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1 - p_k{}^{-s}) = \frac{1}{\varsigma(s)} \text{ (\textit{формула Эйлера}).}$$

۞*Кельберт М.Я., Сухов Ю.М.* Вероятность и статистика в примерах и задачах. Т. 1. Основные понятия теории вероятностей и математической статистики. М.: МЦНМО, 2007.

Задача 10 (переход к полярным координатам, якобиан преобразования). Спортсмен стреляет по круговой мишени. Вертикальная и горизонтальная координаты точки попадания пули (при условии, что центр мишени – начало координат) – независимые случайные величины, каждая с распределением $N(0,1)$. Покажите, что расстояние от точки попадания до центра имеет плотность распределения вероятностей $r\exp\left(-r^2/2\right)$ для $r \geq 0$. Найдите медиану этого распределения.

Кельберт М.Я., Сухов Ю.М. Вероятность и статистика в примерах и задачах. Т. 1. Основные понятия теории вероятностей и математической статистики. М.: МЦНМО, 2007.

Задача 11 (распределение Коши). Радиоактивный источник испускает частицы в случайном направлении (при этом все направления равновероятны). Источник находится на расстоянии d от фотопластины, которая представляет собой бесконечную вертикальную плоскость.

А) При условии, что частица попадает в плоскость, покажите, что горизонтальная координата точки попадания (если начало координат выбирается в точке, ближайшей к источнику) имеет плотность распределения:

$$p(x) = \frac{d}{\pi\left(d^2 + x^2\right)}.$$

Это распределение известно как *распределение Коши*.

Б) Можно ли вычислить среднее (математическое ожидание) этого распределения?

Кельберт М.Я., Сухов Ю.М. Вероятность и статистика в примерах и задачах. Т. 1. Основные понятия теории вероятностей и математической статистики. М.: МЦНМО, 2007.

Задача 12 (рекорды). Пусть $X_1, X_2, \ldots$ - независимые случайные величины с одной и той же плотностью распределения вероятностей $p(x)$. Будем говорить, что наблюдается рекордное значение в момент времени n>1, если $X_n > \max\left[X_1, ..., X_{n-1}\right]$. Докажите следующие утверждения.

А) Вероятность того, что рекорд зафиксирован в момент времени n, равна 1/n.

Б) Математическое ожидание числа рекордов до момента времени n равно

$$\sum_{1<i\le n} \frac{1}{i} \sim \ln n.$$

В) Пусть Y_n - случайная величина, принимающая значение 1, если в момент времени n зафиксирован рекорд, и значение 0 – в противном случае. Тогда случайные величины $Y_1, Y_2, \ldots$ независимы в совокупности.

Г) Дисперсия числа рекордов до момента времени n равна

$$\sum_{1<i\le n} \frac{i-1}{i^2} \sim \ln n.$$

Д) Если Т – момент появления первого рекорда после момента времени 1, то $ET = \infty$.

Кельберт М.Я., Сухов Ю.М. Вероятность и статистика в примерах и задачах. Т. 1. Основные понятия теории вероятностей и математической статистики. М.: МЦНМО, 2007.

Задача 13 (устойчивые системы большой размерности; В.И. Опойцев, 1985). Из курсов функционального анализа и вычислительной математики хорошо известно, что если спектральный радиус матрицы $A = \left\|a_{ij}\right\|_{i,j=1}^{n}$ меньше единицы: $\rho(A) < 1$, то итерационный процесс $\vec{x}^{n+1} = A\vec{x}^{n} + \vec{b}$ (СОДУ $\dot{\vec{x}} = -\vec{x} + A\vec{x} + \vec{b}$), в независимости от точки старта $\vec{x}^{0}$, сходится к единственному решению уравнения $\vec{x}^{*} = A\vec{x}^{*} + \vec{b}$. Скажем, если $\|A\|_{\square} = \max\limits_{i} \sum\limits_{j} \left|a_{ij}\right| < 1$, то и $\rho(A) < 1$ (обратное, конечно, не верно). Предположим, что существует такое маленькое $\varepsilon > 0$, что

$$\frac{1}{n} \sum_{i,j} \left|a_{ij}\right| < 1 - \varepsilon . \quad \text{(S)}$$

Очевидно, что отсюда, тем более, не следует: $\rho(A) < 1$. Тем не менее, введя на множестве матриц, удовлетворяющих условию (S) равномерную меру, покажите, что относительная мера тех матриц (удовлетворяющих условию (S)), для которых спектральный радиус не меньше единице, стремится к нулю с ростом n (ε - фиксировано и от n не зависит).

Указание. 1. Покажите, что при доказательстве можно ограничиться матрицами с неотрицательными элементами. **2.** Покажите, что, не ограничивая общности, можно также считать, что в определении множества S стоит не неравенство, а равенство. Так определенное множество матриц будем называть SE. **3.** Положите, например,[3] $a_{ij} \in \mathrm{Exp}\left(n/(1-\varepsilon)\right)$ - i.i.d. , и покажите, что при $n \to \infty$ распределение элементов случайной матрицы $A = \left\|a_{ij}\right\|_{i,j=1}^{n}$ будет сходиться к равномерному распределению на SE. **4.** Покажите, введя обозначение $P_n = P\left(\|A\|_{\square} \ge 1\right) \ge P\left(\rho(A) \ge 1\right)$ и используя неравенство Чебышева, что

$$P_n \le nP\left(\sum_{j} a_{1j} \ge 1\right) \le \frac{n}{\varepsilon^4} M\left[\left(\sum_{j} a_{1j} - (1-\varepsilon)\right)^4\right] = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 .$$

Опойцев В.И. Устойчивые системы большой размерности // АиТ, № 6. 1986. С. 43-49.

[3] Независимые, одинаково распределенные с.в. (случайные величины) по показательному закону с параметром $n/(1-\varepsilon)$, т.е. $P\left(a_{ij} > x\right) = \exp\left(-\left(n/(1-\varepsilon)\right)x\right)$.

Задача 14 (сублинейный приближенный вероятностный алгоритм для матричных игр; Григориадис – Хачиян, 1995).** Рассматривается симметричная антагонистическая игра двух лиц X и Y. Смешанные стратегии X и Y будем обозначать соответственно $\vec{x}$ и $\vec{y}$. При этом x_k - вероятность того, что игрок X выберет стратегию с номером k, аналогично определяется y_k. Таким образом, $\vec{x},\vec{y}\in S=\left\{\vec{x}\in\mathbb{R}^n:\ \vec{e}^T\vec{x}=1,\ \vec{x}\geq\vec{0}\right\}$, где $\vec{e}=(1,\ldots,1)^T$. Выигрыш игрока X: $V_X\left(\vec{x},\vec{y}\right)=\vec{y}^T A\vec{x}$, а выигрыш игрока Y: $V_Y\left(\vec{x},\vec{y}\right)=-\vec{y}^T A\vec{x}$ (игра антагонистическая). Каждый игрок стремится максимизировать свой выигрыш, при заданном ходе оппонента. Равновесием Нэша (в смешанных стратегиях) называется такая пара стратегий $\left(\vec{x}^*,\vec{y}^*\right)$, что

$$\vec{x}^*\in\operatorname{Arg}\max_{\vec{x}\in S}\vec{y}^{*T}A\vec{x},\ \ \vec{y}^*\in\operatorname{Arg}\min_{\vec{y}\in S}\vec{y}^T A\vec{x}^*.$$

Ценой игры называют $\max\limits_{\vec{x}\in S}\min\limits_{\vec{y}\in S}\vec{y}^T A\vec{x}=\min\limits_{\vec{y}\in S}\max\limits_{\vec{x}\in S}\vec{y}^T A\vec{x}=\vec{y}^{*T}A\vec{x}^*$. Поскольку, по условию, игра также симметричная, то $A=-A^T$ - матрица $n\times n$. С помощью стандартной редукции можно свести к этому случаю общий случай произвольной матричной игры. В рассматриваемом же случае цена игры (выигрыш игроков в положении равновесия Нэша) есть 0, а множества оптимальных стратегий игроков совпадают. Требуется найти с точностью $\varepsilon>0$ положение равновесия Нэша (оптимальную стратегию), т.е. требуется найти такой вектор $\vec{x}$, что $A\vec{x}\leq\varepsilon\vec{e}$, $\vec{x}\in S$. Покажите, считая элементы матрицы A равномерно ограниченными, скажем, единицей, что приводимый ниже алгоритм находит с вероятностью не меньшей $1/2$ (вместо $1/2$ можно взять любое положительное число меньшее единицы) такой $\vec{x}$ за время $\mathrm{O}\left(\varepsilon^{-2}n\log^2 n\right)$, т.е. в определенном смысле даже не вся матрица (из n^2 элементов) просматривается. Отметим также, что в классе детерминированных алгоритмов, время работы растет с ростом n не медленнее чем $\sim n^2$ (эта нижняя оценка получается из информационных соображений). Другими словами, никакой детерминированный алгоритм не может также асимптотически быстро находить приближенно равновесие Нэша. Точнее говоря, описанный ниже вероятностный алгоритм дает почти квадратичное ускорение по сравнению с детерминированными.

<u>Алгоритм</u>

1. **Инициализация:** $\vec{x}=\vec{U}=\vec{0}$, $\vec{p}=\vec{e}/n$, $t=0$.
2. **Повторить:**
3. **Счетчик итераций:** $t:=t+1$.
4. **Датчик случайных чисел:** выбираем $k\in\{1,\ldots,n\}$ с вероятностью p_k.
5. **Модификация $\vec{x}$:** $x_k:=x_k+1$.

6. **Модификация $\vec{U}$:** $U_i := U_i + a_{ik}$, $i = 1,\ldots,n$.

7. **Модификация $\vec{p}$:** $p_i := p_i \exp\left(\varepsilon\, a_{ik}/2\right) \Big/ \left(\sum_{j=1}^{n} p_j \exp\left(\varepsilon\, a_{jk}/2\right) \right)$, $i = 1,\ldots,n$.

8. **Критерий останова:** если $\vec{U}/t \le \varepsilon\vec{e}$, то останавливаемся и печатаем $\vec{x} = X/t$.

Указание. Покажите, что с вероятностью не меньшей, чем $1/2$ алгоритм остановится через $t^* = 4\varepsilon^{-2}\ln n$ итераций. Для этого введите $P_i(t) = \exp\left(\varepsilon U_i(t)/2\right)$ и $\Phi(t) = \sum_{i=1}^{n} P_i(t)$. Покажите, что

$$M\left[\Phi(t+1) \big| \vec{P}(t)\right] = \Phi(t)\sum_{i,k=1}^{n} p_i(t) p_k(t) \exp\left(\varepsilon a_{ik}/2\right) \text{ и } \exp\left(\varepsilon a_{ik}/2\right) \le 1 + \varepsilon a_{ik}/2 + \varepsilon^2/6 .$$

Используя это и кососимметричность матрицы A, покажите

$$M\left[\Phi(t+1)\right] \le M\left[\Phi(t)\right]\left(1+\varepsilon^2/6\right).$$

Следовательно, $M\left[\Phi(t)\right] \le n\exp\left(t\varepsilon^2/6\right)$ и $M\left[\Phi\left(t^*\right)\right] \le n^{5/3}$. Отсюда по неравенству Маркова имеем, что ($n \ge 8$)

$$P\left(\Phi\left(t^*\right) \le n^2\right) \ge P\left(\Phi\left(t^*\right) \le 2n^{5/3}\right) \ge 1/2 .$$

Тогда $P\left(\varepsilon U_i\left(t^*\right)/2 \le 2\ln n, i = 1,\ldots,n\right) \ge 1/2$. Откуда уже следует, что $P\left(\vec{x}\left(t^*\right) \le \varepsilon\vec{e}\right) \ge 1/2$.

۞*Хачиян Л.Г.* Избранные труды. [сост. С.П. Тарасов] М.: МЦНМО, 2009, стр. 38-48.

Задача 15 (перколяция). В квадратном пруду (со стороной равной 1) выросли (случайным образом) $N \gg 1$ цветков лотоса, имеющих форму круга радиуса $r > 0$. Назовем r_N

- *радиусом перколяции*, если с вероятностью не меньшей 0.99 не любящий воду жук сможет переползти по цветкам лотоса с северного берега на южный, не замочившись.

Покажите, что $r_N \sim C/\sqrt{N}$. Оцените C.

۞*Эфрос А.Л.* Физика и геометрия беспорядка. Б-ка “Квант”, вып. 19. М.: Наука, 1982.

Задача 16 (предельные меры; А.М. Вершик и др., 1977). В качестве множества элементарных исходов рассматривается группа всевозможных подстановок (перестановок) S_n (симметрическая группа), $n \gg 1$. В этой группе $n!$ элементов. Припишем каждой подстановке одинаковую вероятность $1/n!$.

А)* Покажите, что математическое ожидание числа циклов есть $\approx \ln n$.

Б)** В каком смысле нормированные длины циклов случайной подстановки убывают со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем e^{-1}.

В)** Положим $\rho_n(a) = \left|\left\{g \in S_n : n_{\max}(g) \le an\right\}\right| / n!$, где $n_{\max}(g)$ - длина максимально цикла в подстановке g. Покажите, что $\rho_n(a)$ удовлетворяет *уравнению Дикмана – Гончарова* (40-ые годы XX века):

$$\rho_n(a) = \int_0^a \rho_n\left(\frac{a}{1-t}\right) dt.$$

Г)*** Покажите, что начиная с некоторого большого числа N 99% натуральных чисел n, больших, чем N обладают свойством

$$n^{0.99} < p_1 \cdot \ldots \cdot p_{11}.$$

Иначе говоря, у основной части (99%) натуральных чисел основная часть (99%) числа есть произведение наибольших простых делителей. Число 11 возникло из-за того, что мы выбрали 99% и 99%.

Указание. Решение задач всех пунктов сводится (весьма технически нетривиально!) к задаче о “ломании палки”. Отрезок $[0,1]$ делится (“ломается”) случайно с равномерной вероятностью. Левый отрезок фиксируем, а правый ломается аналогичным образом и т.д..

۞*Вершик А.М., Шмидт А.А.* Предельные меры, возникающие в асимптотической теории симметрических групп // ТВП, Т. 22. № 1. 1977.С. 72-88; Т. 23. № 1. 1978. С. 42-54.
۞*Вершик А.М.* Асимптотическое распределение разложений натуральных чисел на простые делители // ДАН, 1986. Т. 289, № 2. С. 269–272.
http://www.mathnet.ru/php/presentation.phtml?option_lang=rus&presentid=231
http://www.mathnet.ru/PresentFiles/231/v231.pdf

Задача 17*. Число α из отрезка $[0,1]$ назовем нормально приближаемым рациональными числами, если найдутся c, $\varepsilon>0$ такие, что при любом натуральном q

$$\min_{p\in\mathbb{Z}}\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|\geq\frac{c}{q^{2+\varepsilon}}.$$

Используя лемму Бореля - Кантелли докажите, что множество нормально приближаемых чисел на отрезка $[0,1]$ имеет Лебегову меру 1.

Указание. Зафиксируем c, $\varepsilon>0$ и рассмотрим множество

$$A_q=\left\{\alpha\in[0,1]\,|\,\min_{p\in\mathbb{Z}}\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\frac{c}{q^{2+\varepsilon}}\right\}.$$

Покажите, что $\mu\left(A_q\right)\leq\frac{2c}{q^{1+\varepsilon}}$. Таким образом, ряд $\sum_q\mu\left(A_q\right)$ сходится. В силу леммы Бореля-Кантелли отсюда следует нужное утверждение.

Заметим, что эта задача пришла из теории динамических систем на двумерном торе. Подобного же рода задачи возникают и в КАМ теории.

В связи с полученным результатом, будет интересно заметить, что существует такая бесконечная последовательность q_k и соответствующая ей последовательность p_k, что

$$\left|\alpha-\frac{p_k}{q_k}\right|<\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1}{q_k^{\,2}}.$$

В теории цепных дробей показывается, что последовательность $\frac{p_k}{q_k}$ - будет подпоследовательностью последовательности подходящих дробей для числа α. Заметим также, что константу $\frac{1}{\sqrt{5}}$ в неравенстве уменьшить нельзя.

Синай Я.Г. Основы эргодической теории. М.: ФАЗИС, 1996.

Задача 18 (обобщенная схема размещений; В.Ф. Колчин, 2004). А)* Пусть для неотрицательных целочисленных с.в. $\eta_1,\ldots,\eta_N$ существуют независимые одинаково распределенные с.в. $\xi_1,\ldots,\xi_N$ такие, что

$$P\left(\eta_1=k_1,\ldots,\eta_N=k_N\right)=P\left(\xi_1=k_1,\ldots,\xi_N=k_N\middle|\xi_1+\ldots+\xi_N=n\right). \qquad (**)$$

Введем независимые одинаково распределенные с.в. $\xi_1^{(r)},\ldots,\xi_N^{(r)}$, где r целое неотрицательное число и

$$P\left(\xi_1^{(r)}=k\right)=P\left(\xi_1=k\middle|\xi_1\neq r\right),\ k=0,1,\ldots$$

Пусть $p_r=P(\xi_1=r)$ и $S_N=\xi_1+\ldots+\xi_N$, $S_N^{(r)}=\xi_1^{(r)}+\ldots+\xi_N^{(r)}$. Пусть $\mu_r(n,N)$ - число тех с.в. $\eta_1,\ldots,\eta_N$, принявших значение r. Покажите, что с.в. типа $\mu_r(n,N)$ можно изучать с помощью *обобщенной схемы размещений*: для любого $k=0,1,\ldots,N$

$$P\left(\mu_r(n,N)=k\right)=C_n^k p_r^k (1-p_r)^{N-k}\frac{P\left(S_{N-k}^{(r)}=n-kr\right)}{P(S_N=n)}.$$

Напомним, что в классической схеме размещений n различных частиц по N различным ячейкам было доказано, что распределение заполнений ячеек $\eta_1,\ldots,\eta_N$ имеет вид:

$$P(\eta_1=k_1,\ldots,\eta_n=k_n)=\frac{n!}{k_1!\ldots.k_N!N^n},$$

где $k_1,\ldots,k_n$ - неотрицательные целые числа такие, что $k_1+\ldots.+k_n=n$. Если положить $\xi_1,\ldots,\xi_N\in Po(\lambda)$ - i.i.d. ($\lambda>0$ - произвольно), то получим (**).

Б)* ** Дан случайный граф[4] (модель Эрдеша - Реньи) $G(n,p)$. Пусть $p=c\frac{\ln n}{n}$. Покажите, что при $c>1$ граф $G(n,p)$ почти наверное связен[5], а при $c<1$ - почти наверное не связен.

---

[4] Даны n вершин, любые две вершины соединены ребром с вероятностью p независимо от того, какие еще пары вершин соединены ребрами. Таким образом, $q=1-p$ - есть вероятность отказа ребра. По сути, в задаче приведен некий порог $\bar{q}$ для q (по аналогии со статистической механикой иногда говорят, что этот порог характеризует “фазовый переход случайного графа”). Если в полном графе на n вершинах рёбра отказывают с вероятностью “большей” $\bar{q}$, то транспортная система почти наверное разрушится, если же рёбра отказывают с вероятностью “меньшей” $\bar{q}$, то транспортная система (несмотря на то, что может потерять много рёбер), почти наверное сохранит свое основное свойство – возможность добраться по рёбрам из любой вершины в любую другую.

[5] Из любой вершины можно добраться в любую другую по рёбрам. Словосочетание “почти наверное” - означает, что вероятностная мера тех графов, для которых это не так, стремится к нулю с ростом n.

В)[6]*** Пусть $p \geq \sqrt{2\frac{\ln n}{n}}$, причем длина (вес) r_{ij} каждого появившегося ребра – есть независимая от того, какие еще пары вершин соединены ребрами и какие длины у этих рёбер случайная величина, имеющая равномерное распределение на отрезке $[0, 2r]$. Покажите, что тогда почти наверное граф $G(n, p)$ имеет гамильтонов цикл, причём длина почти всех гамильтоновых циклов стабилизируется около nr.

۞ *Колчин В.Ф.* Случайные графы. М.: Физматлит, 2004.

Задача 19 (пуассоновский поток событий). Рассмотрим интервал $[-N, N]$ и бросим на него независимо и случайно (точнее равномерно) $M = [\rho N]$ точек, где $\rho > 0$ - некоторая константа, называемая плотностью. Легко вычислить биномиальную вероятность $P_{N,M}(k, I)$ того, что в конечный интервал $I \subset [-N, N]$ попадет ровно k точек. Покажите, что $P_{N,M}(k, I)$ стремится при $N \to \infty$ к пуассоновскому выражению:

$$P(k, I) \overset{def}{=} \lim_{N \to \infty} P_{N,M(N)}(k, I) = \frac{(\rho |I|)^k}{k!} e^{-\rho |I|}, \ k = 0,1,...$$

Покажите также, что если $I_1, I_2 \subset [-N, N]$ и $I_1 \cap I_2 = \varnothing$, то

$$P(k_1, I_1; k_2, I_2) \overset{def}{=} \lim_{N \to \infty} P_{N,M(N)}(k_1, I_1; k_2, I_2) = P(k, I_1) P(k, I_2).$$

۞ *Кингман Дж.* Пуассоновские процессы. М.: МЦНМО, 2007.

Определение.[7] ***Процессом Леви*** $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ называется стохастически непрерывный случайный процесс, удовлетворяющий следующим условиям:

1. $X(0) \overset{\text{п.н.}}{=} 0$;
2. для любых $t > s \geq 0$ распределение $X(t) - X(s)$ зависит только от $t - s$ (также говорят, что $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ имеет **стационарные приращения** или $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ - однородный);

[6] См. В.А. Перепелица, Асимптотический подход к решению некоторых экстремальных задач на графах // Проблемы кибернетики, Т. 26, 1973, С. 291 – 314.

[7] См. А.Н. Ширяев, Основы финансовой стохастической математики, М.: ФАЗИС, 2004, т. 1, глава 3, п. 1.

3. для любых $n \in \mathbb{N}$, $0 \le t_0 \le t_1 \le \ldots \le t_n$ выполняется: $X(t_1) - X(t_0)$, …, $X(t_n) - X(t_{n-1})$ - независимые в совокупности с.в. (также говорят, что $\{X(t)\}_{t \ge 0}$ имеет **независимые приращения**).

Известно,[8] что в качестве предельных (при $n \to \infty$) распределений сумм, $\sum_{k=1}^{n} x_{kn}$ состоящих (при каждом $n \in \mathbb{N}$) из последовательностей независимых одинаково распределенных с.в., выступают всевозможные безгранично делимые[9] законы распределения (и только они). При этом имеет место **представление Леви – Хинчина**:

$$X \text{ - безгранично делимая с.в. } \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \; \exists \; \big(b, c, \nu(dx)\big): \; c \ge 0, \; \int_{-\infty}^{\infty} \max\big(1, x^2\big)\, \nu(dx) < \infty, \; \nu(dx) \ge 0:^{10}$$

$$\varphi_X(\mu) = M\, \mathrm{e}^{i\mu X} = \exp\left\{ i\mu b - c\mu^2/2 + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\mathrm{e}^{i\mu x} - 1 - i\mu x I\big(|x| < 1\big) \right) \nu(dx) \right\}, \; I\big(|x|<1\big) = \begin{cases} 1, & |x| < 1 \\ 0, & |x| \ge 1 \end{cases}.$$

Причем триплет $\big(b, c, \nu(dx)\big)$ определяется единственным образом.

Задача 20 (процесс Леви)*. Покажите, что если $X(t)$ - процесс Леви, то:

$$\exists! \; \big(b, c, \nu(dx)\big): \; c \ge 0, \; \int_{-\infty}^{\infty} \max\big(1, x^2\big)\, \nu(dx) < \infty, \; \nu(dx) \ge 0:$$

$$\forall \; t \ge 0 \to \varphi_{X(t)}(\mu) = M\, \mathrm{e}^{i\mu X(t)} = \exp\left\{ t\left[i\mu b - c\mu^2/2 + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\mathrm{e}^{i\mu x} - 1 - i\mu x I\big(|x|<1\big) \right) \nu(dx) \right] \right\}.$$

Задача 21*. 1) Биномиальная однопериодная модель Кокса – Росса - Рубинштейна.** Пусть на “идеализированном” фондовом рынке имеется всего две ценные бумаги, и торговля осуществляется всего в два момента времени. Пусть цена первой бумаги S (будем называть её акцией (stock)) известна в первый момент. Цена второй бумаги C (бу-

---

[8] См., например, Б.В. Гнеденко, Курс теории вероятностей, М.: Наука, 1969, глава 9 и § 56; А.Н. Ширяев, Вероятность-1, М.: МЦНМО, 2004, глава 3, § 6; А.Н. Ширяев, Основы финансовой стохастической математики, М.: ФАЗИС, 2004, т. 1, глава 3, п. 1.

[9] С.в. X называется безгранично делимой, а ее распределение вероятностей безгранично делимым, если для любого $n \in \mathbb{N}$ найдутся i.i.d. с.в. $\{X_{kn}\}_{k=1}^{n}$: $X \overset{d}{=} \sum_{k=1}^{n} X_{kn}$ (т.е. $\forall \; x \in \mathbb{R} \to F_X(x) = F_{\sum_{k=1}^{n} X_{kn}}(x)$).

[10] Последнее условие означает, что мера Леви $\nu(dx)$ - неотрицательная мера (не заряд), т.е. $\nu(A) \ge 0$ - для любого измеримого множества $A \subseteq \mathbb{R}$.

дем называть ее call – опционом европейского типа[11]) не известна в первый момент. Пусть с ненулевой вероятностью $p>0$ к моменту времени 2 цена акции вырастет в $u>1$ (up) раз и с вероятностью $1-p$ цена акции “вырастет” в $d<1$ (down) раз, т.е. падает. Пусть также известны возможные цены опциона во второй момент: C_u - если акция выросла в цене и C_d - если акция упала в цене. Для простоты будем считать, что банк работает с нулевым процентом, т.е. класть деньги в банк, в расчете на проценты, бессмысленно. Говорят, что ***рынок безарбитражный***, если не существует таких k_S, k_C, что[12]

$$X(1)=k_S S+k_C C=0,\ P\big(X(2)\ge 0\big)=P\big(k_S S(2)+k_C C(2)\ge 0\big)=1, \text{ причем } P\big(X(2)>0\big)>0.$$

Докажите, что рассматриваемый рынок безарбитражный тогда и только тогда, когда[13]

$$C=\tilde{p}C_u+(1-\tilde{p})C_d, \text{ где } \tilde{p}=\frac{1-d}{u-d}.$$

2) Биномиальная n-периодная модель Кокса – Росса – Рубинштейна. Предложите обобщение рынка и соответствующих понятий п. 1 на n - периодный рынок. С возможностью класть деньги в банк под процент $r-1$ ($d<r<u$) - за один период (под такой же процент брать деньги из банка). Опцион исполняется в заключительный $n+1$-ый момент. Платежи по опциону в этот момент известны - описываются известной функцией $\bar{C}(S)$ (например, для указанного в п. 1 опциона[14] $\bar{C}(S)=\max\{0,S-X\}$), т.е.

---

[11] Опцион характеризуется датой исполнения (в нашем случае - момент времени 2) и платежами в момент исполнения (C_u и C_d). Причем эти платежи - заранее известные функции от цены акции в этот момент (введение опционов было мотивированно, желанием “хеджироваться”, страховаться от нежелательных изменений цен акций). Основная задача заключается в установлении “справедливой” цены опциона C в момент времени 1 (см. А.Н. Ширяев, Вероятность-2, М.: МЦНМО, 2004, глава 7, § 11; А.Н. Ширяев, Основы финансовой стохастической математики, М.: ФАЗИС, 2004, т. 1, т. 2).

[12] Не имея в начальный момент 1 капитала $X(1)=0$, но, проделав некоторую махинацию (продав одних ценных бумаг (в зависимости от специфики рынка, иногда разрешается “вставать в короткую позицию” – продавать ценные бумаги, не имея их в наличие; приобретая при этом долг) и купив на вырученные деньги других бумаг), можно в момент времени 2 гарантированно ничего не проиграть, и при этом с ненулевой вероятностью выиграть (не уточняя сколько – поскольку, “прокручивая” по имеющемуся арбитражу (пропорционально увеличивая коэффициенты k_S, k_C) сколь угодно большую сумму, можно получить с ненулевой вероятностью сколь угодно большой выигрыш).

[13] $\tilde{p}$ - называется мартингальной вероятностью (смысл такого определения будет раскрыт позже) и задает ***мартингальную меру***. Если существует единственная мартингальная мера, то рынок называется ***полным***. На полном рынке неизвестная цена опциона C в начальный момент определяется однозначно и может интерпретироваться как “справедливая цена”.

[14] X - называется ценной исполнения опциона и считается известной. Собственно, вид функции $\bar{C}(S)=\max\{0,S-X\}$ проясняет смысл опциона. Опцион дает право купить (у того, кто продал нам опцион) в момент исполнения опциона акцию по цене X. Если акция стоит дороже в этот момент, то, конечно, мы этим правом воспользуемся и получим прибыль (продавец опциона обязан продать нам акцию). Если же цена акции меньше цены исполнения опциона, то нам уже не выгодно покупать акцию по более дорогой

$C_k(n+1) = \bar{C}(S_k(n+1))$, где k - состояние в котором находится рынок в момент времени $n+1$. Считайте, что $S_k(n+1) = Su^k d^{n-k}$, т.е. k - характеризует то, сколько раз акция поднималась в цене. Также как и в п. 1, требуется определить "справедливую" цену опциона.

Указание. Обоснуйте формулу Кокса – Росса – Рубинштейна:

$$C = \frac{1}{r^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\tilde{p}^k(1-\tilde{p})^{n-k}\bar{C}(Su^k d^{n-k}), \text{ где } \tilde{p} = \frac{r-d}{u-d}. \quad \text{(i)}$$

3) Континуальная биномиальная модель Блэка – Шоулса. Уместим на отрезке времени $[0,t]$ $n+1$ - моментов (промежутки между которыми одинаковы), в которые осуществляется торговля согласно п. 2. Введем два параметра: a - **снос**, $\sigma^2 \ge 0$ - **волатильность** (дисперсия). Положим,

$$\mu = a + \frac{\sigma^2}{2},\ r = \exp\left(\mu\frac{t}{n}\right),\ u = \exp\left(\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}\right),\ d = \exp\left(-\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}\right),\ \tilde{p} = \frac{r-d}{u-d} \approx \frac{1}{2}\left(1+\frac{a}{\sigma}\sqrt{\frac{t}{n}}\right). \quad \text{(ii)}$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$ в формуле (i) (с $\bar{C}(S) = \max\{0, S-X\}$), согласно (ii), получите формулу Блэка – Шоулса для справедливой цены опциона в "континуальной биномиальной модели". Почему вводится именно два параметра (а не один, три и т.д.)? Почему

$$r-1 \sim \frac{\mu t}{n},\ u-1 \approx \sigma\sqrt{\frac{t}{n}},\ d-1 \approx -\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}\ ?$$

Возможны ли какие-нибудь другие осмысленные варианты соотношений типа (ii), при которых будет существовать предел при $n \to \infty$ в формуле (i) (для простоты вычислений считайте, что $\bar{C}(S) := S$)?

4) Броуновское движение (процесс Башелье) и винеровский процесс. Исходя из формулы (i), имеем, что "рынок" при определении "справедливой" цены опциона считает, что случайный процесс $S(m)$ (цена акции в момент времени m) - эволюционирует согласно биномиальной модели с неизменными параметрами[15] d, u, $\tilde{p}$. Построим случай-

---

цене, чем рыночная, и мы не исполняем опцион, т.е. ничего не делаем (ведь опцион дает нам право, ни к чему не обязывая).

[15] Кстати говоря, один из альтернативных способов введения мартингальных вероятностей $\tilde{p}$ основывается на, так называемых, "риск нейтральных" или "мартингальных" соображениях. Заключающихся в том, что $\tilde{p}$ выбирается исходя из равенства $M_{\tilde{p}}\left[Su^{\sum_{k=1}^{n}x_k} d^{\,n-\sum_{k=1}^{n}x_k}\right] = Sr^n$, где i.i.d. $x_k \in Be(\tilde{p})$ или исходя из того, что про-

ный процесс $S(t)$ (в непрерывном времени), исходя из процесса $S(m)$, заданного в дискретном времени предельным переходом, аналогичным п. 3. Назовем, полученный процесс $S(t)$ - ***геометрическим броуновским движением*** (или случайным процессом Башелье - Самуэльсона) с параметрами[16] a, $\sigma^2 \geq 0$, а случайный процесс $B(t) = \ln \frac{S(t)}{S(0)}$ - ***броуновским движением*** с параметрами a, $\sigma^2 \geq 0$. Если $a = 0$, $\sigma^2 = 1$, то такое броуновское движение имеет специальное название – ***винеровский процесс*** $W(t)$. Покажите, что броуновское движение является процессом Леви. Найдите триплет $(b, c, \nu(dx))$.

Задача 22 (пуассоновский процесс)*. В приложениях (в теории надежности, теории массового обслуживания) широко используются ***процессы восстановления (потоки Пальма)***. Основным (и наиболее удобным для анализа) представителем таких процессов является ***пуассоновский процесс***, который можно определить следующим образом:[17]

$$K(t) = \max\left\{k:\ \sum_{i=1}^{k} T_i < t\right\},\text{ где}^{18}\text{ i.i.d. с.в. } T_i \in \mathrm{Exp}(\lambda),\text{ т.е.}^{19}\ P(T_i > t) = \mathrm{e}^{-\lambda t},\ \lambda > 0.$$

Покажите, что $K(t)$ является процессом Леви. Найдите триплет $(b, c, \nu(dx))$.

цесс приведенной (продисконтированной) стоимости акции $\tilde{S}(m) = S(m)/r^m$ - должен быть ***мартингалом*** относительно мартингальной меры $\tilde{p}$ (отсюда и название), т.е.

$$M_{\tilde{p}}\left(\tilde{S}(m+1)\middle|\left(\tilde{S}(1),\ldots,\tilde{S}(m)\right)\right) = \tilde{S}(m)$$

(см. А.В. Летчиков, Лекции по финансовой математике, Москва - Ижевск, РХД, 2004, глава 3).

[16] Эти параметры имеют следующий смысл: $a = \frac{1}{t} M\left[\ln \frac{S(t)}{S(0)}\right]$, $\sigma^2 = \frac{1}{t} D\left[\ln \frac{S(t)}{S(0)}\right]$.

[17] $K(t)$ - число отказов приборов к моменту времени $t \geq 0$ (отказавший прибор сразу же заменяется исправным). Все приборы идентичны, т.е. имеют одинаковое распределение времени безотказной работы. Кроме того, приборы работают независимо друг от друга.

[18] Параметр $\lambda > 0$ принято называть интенсивностью пуассоновского процесса.

[19] Напомним важную особенность показательного распределения “отсутствие последействия”: $P(T_i > t + \tau | T_i > t) = P(T_i > \tau)$. Заметим также, что общие процессы восстановления задаются аналогичной формулой с той лишь разницей, что i.i.d. $T_i \geq 0$ п.н. уже не обязательно распределены по показательному закону.

Задача 23 (сложный пуассоновский процесс).** В микроэкономике, страховании и в ряде других приложений часто возникает ***сложный (взвешенный) пуассоновский процесс***, который можно определить следующим образом:[20] $Q(t)=\sum_{i=1}^{K(t)} V_i$, где i.i.d. V_i ($dF_{V_i}(x)=\nu(dx)/\nu(\mathbb{R})$) не зависят от пуассоновского процесса $K(t)$, интенсивность, которого равна $\lambda=\nu(\mathbb{R})<\infty$. Покажите, что $Q(t)$ является процессом Леви. Найдите триплет $(b, c, \nu(dx))$. С помощью теоремы 8.10 (предельная теорема с управляющим параметром) из книги “*Натан А.А., Горбачев О.Г., Гуз С.А.* Теория вероятностей. М.: МЗ Пресс, 2007” исследуйте поведение $Q(t)$ при $t\to\infty$.

Замечание. Исходя из задачи 21 п. 4 и задачи 23 можно выдвинуть гипотезу, что любой процесс Леви может быть получен как сумма броуновского движения и сложного пуассоновского процесса. Такого рода утверждение действительно имеет место и называется ***представлением Леви – Ито***. Однако, вместо сложного пуассоновского процесса в этом представлении в общем случае следует брать процесс, который может быть получен как “предел” сложных пуассоновских процессов[21]. Сделанное замечание отчасти поясняет важность трех ключевых распределений теории вероятностей и трех типов процессов Леви: вырожденного нормального[22] (вырожденное броуновское движение), нормального (броуновское движение), распределения Пуассона (пределы сложных пуассоновских процессов). Помимо того, что при наиболее естественных для приложений предположениях имеет место сходимость к одному из этих трех безгранично делимых законов, они в некотором смысле являются базисом: любое распределение, которое может возникать в пределе при суммировании независимых одинаково распределенных с.в., “может быть получено” исходя из этих трех базовых распределений. Задача 23 частично проясняет, в каком смысле любое распределение “может быть так получено”.

Задача 24*. Пусть n единичных масс равномерно распределены на $[-n, n]$. На единичную массу в начале координат действует гравитационная сила

---

[20] $Q(t)$ может интерпретироваться, как прибыль фирмы к моменту времени t. При этом предполагается, что к этому моменту времени фирма осуществляет $K(t)$ сделок (т.е. число сделок, вообще говоря, случайно), причем каждая сделка, в независимости от остальных сделок (и их количества), приносит случайный доход V_i.

[21] См. K.-I. Sato, Levy processes and infinitely divisible distributions. Cambridge, 1999.

[22] Когда дисперсия равняется нулю.

$$f_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\operatorname{sign}(X_k)}{X_k^2}.$$

В силу равномерного распределения X_k

$$M\left[\exp\left\{it\frac{\operatorname{sign}(X_k)}{X_k^2}\right\}\right] = \int_{-n}^{n} \exp\left\{it\frac{\operatorname{sign}(x)}{x^2}\right\}\frac{dx}{2n} = \frac{1}{n}\int_{0}^{n}\cos\left(\frac{t}{x^2}\right)dx.$$

Покажите, что $M\left[\exp\{itf_n\}\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} \exp\left(-c\sqrt{|t|}\right)$. Что отсюда следует? Заметим, что соответствующее предельное распределение в элементарных функциях не выражается.

Ламперти Дж. Вероятность. М.: Наука, 1973.