Итоговая контрольная работа по годовому курсу по выбору
Математический кружок
“Современные приложения функционального анализа и дискретной математики”

Оценка = min{Число решенных задач + 3, 10} по десятибалльной системе

Задача 1. Одновременно бросаются шесть симметричных игральных кубиков. Вычислить вероятность того, что сумма выпавших очков равна 18.

Указание. Напишите производящую функцию для результатов суммы выпавших очков; методом перевала вычислите приближенное значение нужного коэффициента в полученной производящей функции.

Задача 2. Языком Моцкина называется язык в алфавите {a,b,c}, состоящим из таких слов, что зачеркивание всех букв «c» в них дает слово из языка Дика (язык правильных скобочных выражений). **а)** Постройте для языка Моцкина грамматику с однозначным выводом и найдите с ее помощью производящую функцию этого языка. **б)** Постройте производящую функцию неразложимых слов языка Моцкина. Воспользуйтесь теоремой Лагранжа и получите производящую функцию самого языка.

Задача 3. Качественный анализ флаттер–эффекта показывает, что ситуация определяется параметрами E и μ – модули Юнга и сдвига, m – масса движущегося тела, ρ – плотность жидкости, l – характерный размер тела, v – критическая скорость. Покажите, что $\exists\ \varphi(\,\cdot\,,\cdot\,)$: $\mathrm{v}=\sqrt{E/\rho}\cdot\varphi\left(\mu/E, m/\left(\rho l^3\right)\right)$.

Задача 4. Найдите замкнутую, но не являющуюся точной:
а) 1-форму на $\mathbb{R}^2\setminus\{\vec{0}\}$; **б)** 2-форму на $\mathbb{R}^3\setminus\{\vec{0}\}$. Ответ обоснуйте.

Задача 5. Найдите значение интеграла $\int_M \omega$, если $\omega=\left(y^2+z^2\right)dx+\left(x^2+z^2\right)dy+\left(x^2+y^2\right)dz$, а многообразие M задается уравнениями: $x^2+y^2+z^2=2Rx$, $x^2+y^2=2Rx$, $R>0$.

Задача 6. Пусть $f\in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^3\right)$. Покажите, что

$$\int_{\mathbb{R}^3} f\ dx_1dx_2dx_3=(-1/3)\int_{\mathbb{R}^3}\left(x_1\,\partial f/\partial x_1+x_2\,\partial f/\partial x_2+x_3\,\partial f/\partial x_3\right)dx_1dx_2dx_3\,.$$

Задача 7 (систем обмена ресурсами). а) Пусть система обладает набором ресурсов $\vec{x}=\left(x^1,...,x^n\right)$ и осуществляет с окружением локальные обмены $d\vec{x}=\left(dx^1,...,dx^n\right)$. Каждый i ресурс имеет свой коэффициент $\lambda_i(\vec{x})>0$ выгодности. Обмен считается допустимым, если $\lambda_i dx^i\ge 0$ (суммирование по i). Можно ли такой системе приписать структурную функцию $S(\vec{x})$ (определяющуюся из условия: обмен выгоден тогда и только тогда, когда $dS(\vec{x})\ge 0$), если известно, что с помощью серии локально выгодных обменов нельзя перевести систему в состояние с меньшим содержанием всех видов ресурсов, т.е. отобрать ресурсы, ничего не давая в замен (это соответствует принципу адиабатической недостижимости)?

б) (принцип Ле Шателье) Легко понять, что если система со структурной функцией $S(\vec{x})$ находится в равновесии со средой, то функция $S(\vec{x})$ достигает строгий локальный максимум. Тогда матрица Якоби в равновесии $\Gamma=\left\|\partial^2 S(\vec{x})/\partial x^i\partial x^j\right\|$ – отрицательно определена (точнее говоря, не положительно определена, но для простоты ограничимся рассмотрением случая отрицательной определенности), т.е. $d\lambda_i dx^i=\left(\partial^2 S(\vec{x})/\partial x^i\partial x^j\right)dx^i dx^j=d^2S<0$. Покажите, что $\left|\partial\lambda_i/\partial x^i\right\|_{\lambda_1,...,\lambda_{i-1},\lambda_{i+1},...,\lambda_n}\le\left|\partial\lambda_i/\partial x^i\right\|_{x_1,...,x_{i-1},x_{i+1},...,x_n}$.

Указание. Введем скалярное произведение $\langle\vec{x},\vec{y}\rangle_\otimes=-\langle\vec{x},\Gamma^{-1}\vec{y}\rangle$. Обозначим через $\vec{e}_i$ – вектор, все компоненты которого равны нулю, кроме i-ой компоненты, равной единице. По неравенству Коши–Буняковского: $\left|\partial x^i/\partial\lambda_i\right\|_{\lambda_1,...,\lambda_{i-1},\lambda_{i+1},...,\lambda_n}\cdot\left|\partial\lambda_i/\partial x^i\right\|_{x_1,...,x_{i-1},x_{i+1},...,x_n}=\langle\vec{e}_i,\vec{e}_i\rangle_\otimes\cdot\langle\Gamma\vec{e}_i,\Gamma\vec{e}_i\rangle_\otimes\ge\langle\vec{e}_i,\Gamma\vec{e}_i\rangle_\otimes^2=1$.

Задача 8 (модель Эренфестов). Рядом стоят две собаки с номерами ***1*** и ***2***. На собаках как-то расположились $M=2n\gg 1$ блох. Скажем, в начальный момент все блохи собрались на собаке с номером ***1***. На каждом шаге случайно и независимо от предыстории определяется блоха (с вероятность $1/M$ будет выбрана любая из блох), которая перепрыгивает на другую собаку. Пусть $n_1(m)$ – число блох на первой собаке на шаге m, а $n_2(m)$ – на второй. Покажите, что $\lim\limits_{m\to\infty}P\left(\left|n_1(m)-n_2(m)\right|/M\le 3/\sqrt{M}\right)\ge 0.99$.

Задача 9 (модель расчета матрицы корреспонденций). В некотором городе имеется n районов, $L_i > 0$ – число жителей i-го района, $W_j > 0$ – число работающих в j-м районе (число рабочих мест), $\text{x}_{ij}(t) \ge 0$ – число жителей, живущих в i-м районе и работающих в j-м в момент времени $t \ge 0$. Со временем пронумерованные жители (количество которых не меняется и равно $N = \sum_{i=1}^{n} L_i = \sum_{j=1}^{n} W_j$) меняют места жительства (квартиры). Считается, что отмеченные изменения могут происходить только за счёт обмена квартирами, т.е. $\text{x}_{ij}(t) \ge 0$, $\sum_{j=1}^{n} \text{x}_{ij}(t) \equiv L_i$, $\sum_{i=1}^{n} \text{x}_{ij}(t) \equiv W_j$, $i, j = 1, \dots, n$. Пусть в момент времени $t \ge 0$ r-й житель живет в k-м районе и работает в m-м, а l-й житель живет в p-м районе и работает в q-м. Тогда $\kappa N^{-1} \exp\left(\gamma \cdot \left(t_{km} + t_{pq} - \left(t_{pm} + t_{kq}\right)\right)/2\right)\Delta t + o(\Delta t)$ – есть вероятность того, что жители с номерами r и l ($1 \le r < l \le N$) поменяются квартирами в промежутке времени $(t, t + \Delta t)$. Множитель $\kappa > 0$ – отвечает за интенсивность обмена, числа $\gamma > 0$ и $t_{ij} \ge 0$ – время в пути от района i до района j ($i, j = 1, \dots, n$) – известны. Пусть $N \sim nm$, $L_i, W_j \sim m$, $m \gg 1$, $\forall\ i, j = 1, \dots, n \to t_{ij} = \tau > 0$. Покажите, что

$$\exists\ \lambda > 0:\ \lim_{t \to \infty} P\left(\forall\ i, j = 1, \dots, n \to \left|\text{x}_{ij}(t)/x_{ij}^* - 1\right| \le \lambda/\sqrt{m}\right) \ge 0.999 \text{, где } x_{ij}^* \approx L_i W_j / N \sim m/n,\ i, j = 1, \dots, n.$$

Задача 10 (матричная игра). Рассматривается игра двух лиц с матрицей выигрышей $\begin{pmatrix} (3,3) & (8,1) \\ (1,8) & (5,5) \end{pmatrix}$.
Найдите равновесие Нэша. Будет ли оно устойчивым?

Задача 11 (сходимость к равновесию Нэша). Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений (СОДУ): $\dot{x}_i = \gamma_i(t)\left(f_i(x_1, \dots, x_n) - x_i\right)$, $\gamma_i(t) > 0$ при $t \ge 0$ и $\int_0^\infty \gamma_i(t)\,dt = \infty$, $i = 1, \dots, n$; $f_i(\cdot)$, $i = 1, \dots, n$ – непрерывные функции; $\exists\ K \Subset \mathbb{R}^n$: $\vec{f}(K) \subseteq K$.

Докажите, что приводимое ниже условие обеспечивает существование равновесия СОДУ (единственность в K) и его асимптотическую устойчивость: $\forall\ \vec{x} \in K,\ i = 1, \dots, n \to \sum_{j=1}^{n} \left|\partial f_i(\vec{x})/\partial x_j\right| < 1$.

Указание. В кубической норме ($\|\vec{x}\|_\square = \max_{i=1,\dots,n} |x_i|$) $\vec{f}(\vec{x})$ – сжимающее отображение компакта K в себя. Устойчивость показывается с помощью второго метода Ляпунова. В качестве функции Ляпунова следует взять $V(\vec{x}) = \|\vec{x} - \vec{x}^*\|_\square$, где $\vec{x}^*$ – единственное положение равновесия в K.

Задача 12. Доказать, что задача Коши $y' = y^{2/3} + c^{2/3}$, $y(0) = y_0$ имеет единственное решение при любом $c > 0$. Исследуйте сходимость последовательности решений $y_c(t; y_0)$ задач Коши при стремлении к нулю параметра $c \to 0+$, в том числе, при $y(0) = 0$.

Задача 13. Доказать отсутствие решения у задачи Коши

$$y' = f(y),\ y(0) = 0, \text{ где } f(y) = 1, \quad y < 0,\ f(y) = -1, \quad y \ge 0.$$

Пусть $f_h(y)$ – свертка функции $f(y)$ с ядром усреднения Урысона полуширины h. Исследовать сходимость последовательности решений $y_h(t)$ при стремлении к нулю параметра $h \to 0+$.

Задача 14. Доказать, что существует конечно-аддитивная мера на измеримом пространстве ($\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}$), которая неотрицательна, нормирована, и обладает следующим свойством: если для подмножества A множества $\mathbb{N}$ существует предел при отношения количества элементов множества A в натуральном отрезке от 1 до m к числу m, то значение меры на множестве A равно указанному пределу.

Указание. Примените теорему Хана–Банаха.

Задача 15 (банахов предел). Доказать, что на пространстве l_∞ существует регулярный обобщенный метод суммирования последовательностей, который каждой ограниченной последовательности сопоставляет число (обобщенный предел) таким образом, что: обобщенный предел линейной комбинации равен линейной комбинации обобщенных пределов; если последовательность сходится, то ее обобщенный предел равен настоящему пределу; обобщенный предел последовательности инвариантен относительно сдвига последовательности на единицу, т.е. относительно отбрасывания нескольких первых членов.

Указание. Использовать совокупно результат предыдущей задачи и метод суммирования по Чезаро.

Задачи предложили: *А. В. Гасников, М. И. Исаев, В. Ж. Сакбаев, Е. О. Черноусова*