Производящие функции (П.Ф.)

Вопросы, замечания, пожелания просьба присылать на почтовый ящик lena-ezhova@rambler.ru

Каждая задача без звездочки оценивается в 1 балл (задача со звездочкой в два балла и выше, в зависимости от задачи). Решая задачи, приведенные ниже, можно сдать одну тему занятий Математического кружка. Для сдачи нужно набрать не менее четырнадцати баллов.

1. Покажите методом П.Ф., что любое целое число может быть единственным образом представлено в двоичной системе исчисления.
2. Лягушонок может прыгнуть либо на соседнюю кувшинку, либо через одну. Найдите число способов добраться лягушонку от одного берега озера до другого, если через озеро тянется дорожка из двенадцати цветов.
3. Частица совершает случайные блуждания на горизонтальной оси. С вероятностью p частица сдвигается вправо, с вероятностью $q=1-p$ – влево. Напишите ПФСВ (производящая функция случайной величины), равной координате частицы на n-ом шаге.
Указание. П.Ф. легче получить, пользуясь рекуррентным уравнением, связывающим вероятность того, что частица находится в i-ой координате на n-ом шаге, вероятность того, что частица находится в (i-1)-ой координате на (n-1)-ом шаге, вероятность того, что частица находится в (i+1)-ой координате на (n-1)-ом шаге.
4. Вычислите вероятность q_n того, что случайная (0,1)-матрица размера $n\times n$ является невырожденной над полем $GF(2)=\{0,1\}$. Доказать, что существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} q_n$.
5. Сколько раз в среднем нужно бросить монету, чтобы решка выпала два раза подряд.
6. Найдите число способов замостить доску размера $2\times n$ доминошками (доминошки можно класть вертикально или горизонтально)?
7. Алиса и Боб играют в игру: они бросают монету до тех пор, пока не выпадет одна из комбинаций РРО или РОО, в первом случае выигрывает Алиса, во втором – Боб. Будет ли игра честной (кто в среднем чаще будет выигрывать)?
8. На листе бумаги пишутся числа от 00000 до 99999 (числа, меньшие 10000 дополняются нулями). Будем считать, что цифры 0, 1, 8 при переворачивании не меняются, а цифры 6 и 9 переходят друг в друга. Например, для чисел 06981 и 18690 можно приготовить один листок. Сколько листков понадобится?
9. Напишите цикловой индекс группы подстановок на множестве вершин правильного n-угольника, порожденных его вращениями в плоскости.
10. Напишите цикловой индекс группы подстановок на множестве вершин правильного n-угольника, порожденных группой его симметрий.
11. Задача о числе ожерелий (1). Имеется неограниченный запас из бусинок k цветов. Сколько можно составить различных ожерелий из n бусинок. Считается, что ожерелья, получающиеся друг из друга плоскими вращениями одинаковы, k=3; а) n=5, б) n=6.
12. Задача о числе ожерелий (2). Имеется неограниченный запас из бусинок k цветов. Сколько можно составить различных ожерелий из n бусинок. Считается, что ожерелья, получающиеся друг из друга поворотом в пространстве не различаются k=3; а) n=5, б) n=6.
13. Задача о числе ожерелий (3). Имеется $m_1,\dots,m_k$ бусинок k различных цветов. Сколько можно составить различных ожерелий из n бусинок. Считается, что ожерелья, получающиеся друг из друга плоскими вращениями одинаковы $m_1=2$, $m_2=5$, $m_3=3$, k=3; а) n=5, б) n=6.
14. Сколькими способами можно раскрасить в k цветов 1) ребра, 2) грани тетраэдра, который можно вращать в пространстве.

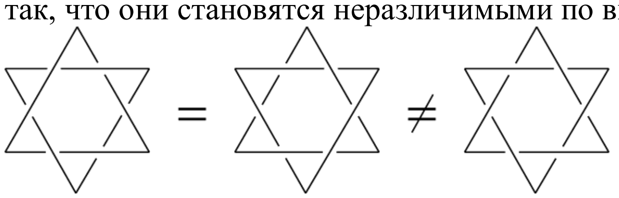
15. Сколькими способами можно раскрасить в k цветов 1) вершины, 2) ребра, 3) грани куба, который можно вращать в пространстве.

16. Сколькими геометрически различными способами можно раскрасить вершины куба в два цвета, чтобы вершин каждого цвета было поровну.

17. Сколькими способами можно раскрасить пять ребер куба в синий, а остальные в красный цвет.

18. Найдите число существенно различных способов размещения 8 одинаковых пометок на шахматной доске размера 8×8. Два способа существенно различны, если их нельзя преобразить в друг друга вращениями доски или отражениями относительно любой из четырех осей симметрии.

19. Звезда Давида. Фигура “Звезда Давида” составлена из кусков проволоки. Спаянных в точках пересечений. Сколько существует различных звезд с точки зрения вида их пересечений? Фигуры отождествляются, если одну из них можно переместить в пространстве так, что они становятся неразличимыми по виду пересечений.



20. Одновременно бросаются шесть симметричных игральных кубиков. Вычислить вероятность того, что сумма выпавших очков равна 21.

Указание. Напишите производящую функцию для результатов суммы выпавших очков; методом Лапласа вычислите приближенное значение нужного коэффициента в полученной производящей функции.

21. Языком Моцкина называется язык в алфавите $\{a,b,c\}$, состоящим из таких слов, что зачеркивание всех букв «с» в них дает слово из языка Дика (язык правильных скобочных выражений). **а)** Постройте для языка Моцкина грамматику с однозначным выводом и найдите с ее помощью производящую функцию этого языка. **б)** Постройте производящую функцию неразложимых слов языка Моцкина. Воспользуйтесь теоремой Лагранжа и получите производящую функцию самого языка.

22. О червяке Шредингера. В вершине пятиугольника $ABCDE$ находится яблоко, а на расстоянии двух ребер, в вершине C, находится червяк. Каждый день червяк переползает в одну из двух соседних вершин с равной вероятностью. Так, через один день червяк окажется в вершине B или D с вероятностью $1/2$. По прошествии двух дней червяк может снова оказаться в C, поскольку он не запоминает своих предыдущих положений. Достигнув вершины A, червячок останавливается пообедать.

1. Чему равны математическое ожидание и дисперсия числа дней прошедших до обеда?
2. Какую оценку дает *неравенство Чебышёва* $\left(\mathrm{P}\left(\left|X-MX\right|\geq a\right)\leq DX/a^{2}\right)$ для вероятности p того, что это число дней будет 100 или больше?
3. Что позволяют сказать о величине p оценки из задачи “об оценки хвостов”.

23. Пять человек стоят в вершинах пятиугольника $ABCDE$ и бросают друг другу диски Фрисби. У них имеется два диска, которые в начальный момент находятся в соседних вершинах. В очередной момент времени диски бросают либо налево, либо направо с одинаковой вероятностью. Процесс продолжается до тех пор, пока обе тарелки не окажутся в одной вершине.

1. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа пар бросков.
2. Найдите “замкнутое” выражение через числа Фибоначчи для вероятности того, что игра продлиться более 100 шагов.

24*. Обобщите задачу 23 на случай m-угольника и найдите математическое ожидание и дисперсию числа пар бросков до столкновения дисков. Докажите, что если m нечетно, то ПФСВ для числа бросаний представимо в следующем виде:[1]

$$G_m(z)=\prod_{k=1}^{(m-1)/2}\frac{p_k z}{1-q_k z},\text{ где } p_k=\sin^2\frac{(2k-1)\pi}{2m},\ q_k=\cos^2\frac{(2k-1)\pi}{2m}.$$

25. Загадочный случайный суп. Студент, решивший отобедать в столовой, может обнаружить в своей тарелке с супом случайное число N инородных частиц ☹ со средним μ и конечной дисперсией. С вероятностью p выбранная частица является мухой, иначе это таракан; типы разных частиц независимы. Пусть F – количество мух и S – количество тараканов.

А) Покажите, что производящая функция случайной величины F равна

$$\psi_F(s)=\psi_N(ps+1-p).$$

Б) Предположим, что случайная величина N имеет пуассоновское (poisson) распределение с параметром μ (записывают $\mathrm{N}\in Po(\mu)$). Покажите, что F имеет пуассоновское распределение с параметром $p\mu$, а случайные величины F и S независимы. Покажите, что

$$\psi_N(s)=\psi_N\left(\frac{1}{2}(1+s)\right)^2.$$

Убедитесь, что случайная величина N имеет пуассоновское распределение.

26*. Производящие функции, вычеты. Обозначим через E^n - множество бинарных последовательностей длины n, или множество вершин единичного n-мерного куба, а через E_k^n - k-ый слой куба E^n, то есть подмножество точек E^n, имеющих ровно k единичных координат. Пусть $X=(\vec{x},\vec{y})$ - случайная величина, где $\vec{x}\in E_p^n$, $\vec{y}\in E_q^n$ - независимые и равномерно распределенные на E_p^n и E_q^n соответственно векторы. Обозначим через $a_{p,q}(k)=P\{X=k\}$. Доказать следующие утверждения:

$$\textbf{1)}\ \sum_{k=0}^{n}a_{p,q}(k)z^k=\frac{1}{2\pi i}C_n^p\oint_{|u|=\rho}\frac{(1+zu)^p(1+u)^{n-p}}{u^{q+1}}du.$$

$$\textbf{2)}\ a_{p,q}(k)=\frac{C_p^k C_{n-p}^{q-k}}{C_n^q}.$$

$$\textbf{3)}\ EX=\frac{pq}{n}.$$

$$\textbf{4)}\ DX=\frac{pq}{n(n-1)}\left(n+\frac{pq}{n}-(p+q)\right).$$

Указание. Вычислите производящую функцию случайной величины $X=(\vec{x},\vec{y})$:

$$F_X(z)=\sum_{k=0}^{n}a_{p,q}(k)z^k=\frac{1}{C_n^p C_n^q}\sum_{x\in E_p^n;\ y\in E_q^n}z^{(x,y)}.$$

27. Найти асимптотику числа правильных скобочных выражений, в которых используется n пар скобок двух различных видов.

28. Покажите, что ЭПФ (экспоненциальная производящая функция) для числа помеченных корневых деревьев (то есть все вершины дерева пронумерованы и одна из вершин выделена и называется корнем) удовлетворяет уравнению Лагранжа

[1] Воспользуйтесь подстановкой $z=1/\cos^2\theta$.

$U(x)=xe^{U(x)}$, где $U(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n!}x^n$, u_n - число помеченных корневых деревьев на n вершинах.

а) Как следствие получите, что $u_n=n^{n-1}$ (теорема Кэли).

Указание: уточнение теоремы Лагранжа: пусть функции $w(t)$ и $\varphi(w)$ удовлетворяют уравнению Лагранжа: $w(t)=t\varphi\left(w(t)\right)$. Тогда коэффициент при t^n функции $w(t)$ удовлетворяет равенству $\left[t^n\right]w(t)=\frac{1}{n}\left[w^{n-q}\right]\varphi^n\left(w\right)$.

б) Число помеченных деревьев на n вершинах $t_n=n^{n-2}$.

29. Доказать, что производящая функция $\sum_{n=1}^{\infty}I_n s^n$ для числа инволюций (перестановок, квадрат которых есть тождественная перестановка) есть бесконечная цепная дробь:

$$\cfrac{1}{1-s-\cfrac{s^2}{1-s-\cfrac{2s^2}{1-s-\cfrac{3s^2}{1-s-\cdots}}}}.$$

30. Доказать, что экспоненциальная производящая функция $\mathrm{I}(s)=\sum_{n=1}^{\infty}I_n\frac{s^n}{n!}$ для числа инволюций есть $\mathrm{I}(s)=\exp\left\{s+\frac{s^2}{2}\right\}$.

Указание. Инволюция – перестановка, состоящая из циклов длины либо один, либо два. Экспоненциальная производящая функция для перестановок с циклами длиной не более r равна $\exp\left\{s+\frac{s^2}{2}+\cdots+\frac{s^r}{r}\right\}$.

31. ("сто заключенных"). В коридоре находятся 100 человек, у каждого свой номер (от 1 до 100). Их по одному заводят в комнату, в которой находится комод со 100 выдвижными ящиками. В ящики случайным образом разложены карточки с номерами (от 1 до 100). Каждому разрешается заглянуть в не более чем 50 ящиков. Цель каждого – определить, в каком ящике находится его номер. Общаться и передавать друг другу информацию запрещается. Предложите стратегию, которая с вероятностью не меньшей 0.3 (в предположении, что все 100! способов распределения карточек по ящикам равновероятны) приведет к выигрышу всей команды. Команда выигрывает, если все 100 участников верно определили ящик с карточкой своего номера.

Стратегия. Каждый человек первым открывает ящик под его номером, вторым – под номером, который указан на карточке, лежащей в ящике, открытом перед этим и т.д. **(**Воспользуйтесь результатом предыдущей задачи для подсчета вероятности того, что в случайной перестановке есть циклы длины более, чем 50). Тогда среднее число циклов длины большей n/2 есть $\sum_{i=n/2}^{n}\frac{1}{i}$. Это и есть вероятность существования цикла длины большей n/2.

Поэтому вероятность успеха команды – есть $1-\sum_{i=51}^{100}\frac{1}{i}\approx 0{,}31$. Если же просто произвольно открывать ящики, то вероятность успеха будет $2^{-100}\approx 8\cdot 10^{-31}$. В случае, когда карточки разложены не случайным образом, то следует сделать случайной нумерацию ящиков, и далее следовать старой стратегии.

32. а) Покажите, что экспоненциальная производящая функция для числа беспорядков, есть $D(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d_n}{n!}x^n=\frac{e^{-x}}{1-x}$ (беспорядком называется перестановка, не содержащая циклов единичной длины).

Указание: Обозначим, за $d_{n,k}$ - число перестановок на множестве из n элементов, оставляющих на месте ровно k элементов (то есть число неподвижных точек равно k). Покажите, что $d_{n,k}=C_n^k d_{n-k}$. Из правила суммы, получаем:

$$n!=\sum_{k=0}^{n}d_{n,k}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k d_{n-k}=\sum_{k=0}^{n}C_n^{n-k}d_{n-k}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k d_k.$$

То есть получилась биномиальная свертка:

$$a_k=d_k,\quad b_k=1,\quad c_k=k!$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d_n}{n!}x^n\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n\Rightarrow$$

$$\frac{1}{1-x}=D(x)e^x$$

б) Найдите ответ в задаче о «совпадениях» (из хорошо перетасованной колоды на стол последовательно выкладываются карты лицевой стороной наверх, после чего аналогичным образом выкладывается вторая колода, так что каждая карта первой колоды лежит под картой из второй колоды. Какова вероятность того, что произойдет ровно k совпадений?

Литература

Сачков В.Н. Комбинаторные методы дискретной математики. М.: МЦНМО, 2004.

Ландо С.К. Лекции о производящих функциях. М.: МЦНМО, 2009.

Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика. М.: Мир & Бином, 2004.

Леонтьев В.К. Избранные задачи комбинаторного анализа. М.: МГТУ, 2001.

Кельберт М.Я., Сухов Ю.М. Вероятность и статистика в примерах и задачах. Т. 1. Основные понятия теории вероятностей и математической статистики. М.: МЦНМО, 2007.

Flajolet P., Sedgewick R. Analytic combinatorics. Cambridge University Press, 2008.
http://algo.inria.fr/flajolet/Publications/book.pdf