Контрольная работа по теории вероятностей у 871, 875, 876 групп

5 ноября 2010 г.

Задача 1 (метод Монте – Карло для вычисления значения интеграла). Требуется вычислить с заданной точностью ε и с заданной доверительной вероятностью γ абсолютно сходящийся интеграл

$$J = \int\limits_{[0,1]^m} f(\vec{x})\,d\vec{x}.$$

Пояснение. Введем случайный m-вектор $\vec{X} \in R\left([0,1]^m\right)$ и с.в. $\xi = f(\vec{X})$. Тогда $M\xi = \int\limits_{[0,1]^m} f(\vec{x})\,d\vec{x} = J$. Поэтому получаем оценку интеграла $\bar{J}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\vec{x}^k)$, где $\vec{x}^k$, $k = 1,\ldots,n$ - повторная выборка значений случайного вектора $\vec{X}$ (т.е. все $\vec{x}^k$, $k = 1,\ldots,n$ - независимы и одинаково распределены: также как и вектор $\vec{X}$). В задаче требуется оценить сверху число n ($n \gg m$), начиная с которого $P\left(\left|J - \bar{J}_n\right| \le \varepsilon\right) \ge \gamma$. Считайте, что $\forall\ \vec{x} \in [0,1]^m \to \left|f(\vec{x})\right| \le 1$.

Задача 2 (подсчет количества нулевых столбцов в случайных бинарных матрицах). Пусть ξ - с.в., равномерно распределенная на множестве бинарных матриц (т.е. матриц с элементами типа 0 и 1) порядка $m \times n$ и равная числу нулевых столбцов матрицы. Доказать, что

а) $P_k(m,n) = P\{\xi = k\} = C_n^k \cdot \left(2^m - 1\right)^{n-k} \big/ 2^{m\cdot n}$;

б) $M\xi = n/2^m$;

в) если $2^m - 1 = \alpha \cdot n$, где α не зависит от n, то $\lim\limits_{n\to\infty} P_k(m,n) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$, где $\lambda = \alpha^{-1}$.

Задача 3 (о выборах). В некотором городе прошел второй тур выборов. Выбор был между двумя кандидатами А и В (графы “против всех” на этих выборах не было). Сколько человек надо опросить на выходе с избирательных участков, чтобы исходя из ответов можно было определить долю проголосовавших за кандидата А с точностью 1% и с вероятностью не меньшей 0.99. Считайте, что исходя из голосования в первом туре известно, что каждый из кандидатов наберет не меньше 30% голосов избирателей.

Задача 4 (средние характеристики случайных перестановок). На множестве $n!$ перестановок n различных элементов задано равномерное распределение. Обозначим через ξ_k случайную величину равную числу инверсий, образованных элементом с номером k, т.е. равную числу элементов с номерами меньшими чем k, которые стоят в перестановке правее элемента с номером k. Покажите, что

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}\xi_k - n^2/4}{n^{3/2}/6} \xrightarrow[n\to\infty]{d} N(0,1).$$

Указание. 1. Покажите, что ξ_k не зависит от ξ_1, …, ξ_{k-1} для любого $k = 2,\ldots,n$ (отсюда будет следовать взаимная независимость случайных величин ξ_1, ..., ξ_n). **2.** Покажите, что $M\xi_k = (k-1)/2$, $D\xi_k = \left(k^2-1\right)/12$. **3.** Покажите, что решение S_n^m разностного уравнения $S_{n+1}^m - S_n^m = n^m$, $n = 1,2,3,\ldots$ имеет асимптотику (при $n \to \infty$) $S_n^m = n^{m+1}/(m+1) + O\left(n^m\right)$. **4.** Введя случайную величину $T_n = \sum_{k=1}^{n}\xi_k$ - общее число инверсий в перестановке, покажите (используя пп. 1 - 3), что $MT_n = n^2/4 + O(n)$, $DT_n = n^3/36 + O\left(n^2\right)$. **5.** Воспользуйтесь центральной предельной теоремой (ц.п.т.) для $T_n = \sum_{k=1}^{n}\xi_k$.

Задача 5 (о числах Рамсея и вероятностном методе). Покажите, что можно так раскрасить в два цвета ребра полного графа с n вершинами (т.е. графа (без петель), в котором любые две различные вершины соединены одним ребром), что любой его полный подграф с m вершинами, где $2C_n^m (1/2)^{C_m^2} < 1$, имеет ребра разного цвета.