2) производящие (характеристические) функции в теории вероятностей и (асимптотической) комбинаторике (пропаганда идеи: часто для нахождения чисел, имеющих комбинаторную или вероятностную природу, выгодно изучить некоторое функциональное уравнение относительно неизвестной функции, которая соодержит в себе всю информацию об этих числах): формальные грамматики (теорема Лагранжа), перечислительная комбинаторика (теория Д. Пойа), метод включения и исключения и его обобщения (подход Дж.-К. Рота), метод отыскания значений (и их асимптотик) различных комбинаторных сумм (подход Г.П. Егорычева), сведение вычисления (асимптотики) чисел, имеющих вероятностную природу, к вычислению вычетов (к исследованию асимптотического поведения интегралов в комплексной плоскости, зависящих от параметра, с помощью метода перевала или стационарной фазы), предельные теоремы и законы больших чисел;

Вначале, не вдаваясь в тонкости теории, покажем, как работает метод производящих функций в трех классических задачах.

1) ***Задача о взвешивании.*** В начале XVIII века Л.Эйлер решал задачу: *Какие грузы можно взвесить гирями в* $1, \quad 2, \quad 2^2, \quad 2^3, \quad \ldots, \quad 2^m, \quad \ldots$ *грамм, и сколькими способами?*

Эйлер рассматривает бесконечное произведение двучленов:

$$\alpha(x) = (1+x)\left(1+x^2\right)\left(1+x^4\right)\left(1+x^8\right)\cdots\left(1+x^{2^m}\right)\cdots$$

После раскрытия скобок и приведения подобных членов, получается «бесконечный» многочлен:

$$\alpha(x) = 1 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots$$

Замети, что коэффициенты A_k равны числу различных представлений числа k в виде суммы некоторых из чисел: $1, \quad 2, \quad 2^2, \quad 2^3, \quad \ldots, \quad 2^m, \quad \ldots$, другими словами это число способов взвесить груз в k грамм указанными гирями.

Для нахождения коэффициентов A_k домножим правую и левую часть последнего равенства на $(1-x)$ и воспользуемся тождествами:

$$\begin{aligned}
&(1-x)(1+x) = \left(1-x^2\right) \\
&\left(1-x^2\right)\left(1+x^2\right) = \left(1-x^4\right) \\
&\left(1-x^4\right)\left(1+x^4\right) = \left(1-x^8\right) \\
&\ldots
\end{aligned}$$

Получим:

$$(1-x)(1+x)\left(1+x^2\right)\left(1+x^4\right)\left(1+x^8\right)\cdots\left(1+x^{2^m}\right)\cdots = 1$$

Т.е.

$$\begin{aligned}
&(1-x)\alpha(x) = 1 \\
&\alpha(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots
\end{aligned}$$

Таким образом, $A_k = 1$ для всех k, т.е. всякий груз в целое число грамм можно взвесить гирями в $1, \quad 2, \quad 2^2, \quad 2^3, \quad \ldots, \quad 2^m, \quad \ldots$, притом единственным способом.

Упражнение. Доказать, что любое целое положительное число можно единственным образом в двоичной системе исчисления. (Указание: сравнить с задачей о взвешивании)

2) ***Задача о разбиении числа***. Так Л.Эйлер назвал следующую задачу: *Найти число положительных целых решений уравнения:*

$$y_1 + y_2 + \cdots y_m = k,$$

где m *и* k *- фиксированные натуральные числа.*

Здесь к цели приводит выражение:

$$\beta(x) = \left(1 + x + x^2 + x^3 \dots\right)^m$$

После раскрытия скобок и приведения подобных членов, получим:

$$\beta(x) = 1 + B_1 x + B_2 x^2 + B_3 x^3 \dots$$

Теперь коэффициент B_k дает ответ к поставленной задаче.

Можно переписать выражение в виде:

$$\beta(x) = \left(1 + x + x^2 + x^3 \dots\right)^m = \left(\frac{1}{1-x}\right)^m = 1 + B_1 x + B_2 x^2 + B_3 x^3 \dots$$

Воспользовавшись дифференцированием последнего соотношения и подставляя $x = 0$, получим формулу для коэффициентов:

$$B_k = \frac{m(m+1)\cdots(m+k-1)}{k!}.$$

3) ***Задача о размене.*** *Сколькими способами можно разменять доллар монетами в* $1,\ 5,\ 10,\ 25,\ 50$ *центов? Или сколько неотрицательных целых решений имеет уравнение*

$$y_1 + 5y_2 + 10y_3 + 25y_4 + 50y_5 = 100?$$

В более общем виде «задачу о размене» ставят так: *Сколько неотрицательных целых решений имеет уравнение*

$$a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3 + \cdots + a_m y_m = k,$$

где $a_1, \dots, a_m, n$ *- фиксированные натуральные числа?*

Для решения этой задачи воспользуемся выражением:

$$\gamma(x) = \left(1 + x^{a_1} + x^{2a_1} + x^{3a_1} + \dots\right)\left(1 + x^{a_2} + x^{2a_2} + x^{3a_2} + \dots\right)\times\dots\times\left(1 + x^{a_m} + x^{2a_m} + x^{3a_m} + \dots\right) =$$

$$= \frac{1}{\left(1 - x^{a_1}\right)\left(1 - x^{a_2}\right)\cdots\left(1 - x^{a_m}\right)} = 1 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \dots$$

Теперь коэффициент C_k дает ответ на поставленный вопрос.

Теперь немного теории.

Производящей функцией для последовательности $a_0,\ a_1,\ \dots\ a_n,\ \dots$ называется формальный степенной ряд

$$A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

Термин «формальный» означает, что мы не находим область сходимости ряда $A(x)$, нигде не будем вычислять значений $A(x)$ для конкретных значений переменной x, будем лишь выполнять некоторые операции над такими рядами и определять коэффициенты при степенях x; таким образом, $A(x)$ интересует нас не как числовая функция от переменной x, а как «носитель» последовательности (a_k).

Суммой произвольных рядов

$$A(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k, \quad B(x)=\sum_{k=0}^{\infty}b_k x^k$$

называется ряд

$$A(x)+B(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(a_k+b_k)x^k.$$

Произведением ряда $A(x)$ на число λ называется ряд

$$\lambda A(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda a_k x^k.$$

Произведением рядов $A(x)$ и $B(x)$ называется ряд

$$A(x)B(x)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k x^k,$$

где $c_k=\sum_{i=0}^{k}a_i b_{k-i}$.

Из курса математического анализа известно, что если степенной ряд сходится в некоторой окрестности нуля, то в этой окрестности его сумма является аналитической функцией, по отношению к которой сам ряд является рядом Маклорена:

$$a_k=\frac{A^{(k)}(0)}{k!}, \quad k=0,1,2,\ldots .$$

Ниже приведены производящие функции для некоторых простых последовательностей:

Последовательность (a_k)	Производящая функция $A(x)$
$1,1,\ldots,1,\ldots$	$\dfrac{1}{1-x}$
$1,\dfrac{1}{1!},\dfrac{1}{2!},\ldots,\dfrac{1}{k!},\ldots$	e^x
$1,2,2^2,\ldots,2^k,\ldots$	$\dfrac{1}{1-2x}$
$0,1,2,\ldots,k,\ldots$	$\dfrac{x}{(1-x)^2}$
$C_n^0,C_n^1,\ldots,C_n^k,\ldots,C_n^n,0,\ldots$	$(1+x)^n$
$1,\alpha,\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!},\ldots,\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!},\ldots$	$(1+x)^\alpha$

Покажем, как может быть получена производящая функция для последовательности неотрицательных целых чисел:

$$\sum_{k=0}^{\infty}kx^k=x\sum_{k=0}^{\infty}kx^{k-1}=x\sum_{k=0}^{\infty}\frac{d}{dx}\left(x^k\right)=x\frac{d}{dx}\left(\sum_{k=0}^{\infty}x^k\right)=x\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{x}{(1-x)^2}.$$

Применим аппарат производящих функций к решению следующей весьма общей по постановке задачи.

Найти a_k - число всех неупорядоченных k-элементных выборок с повторениями, удовлетворяющих заданными ограничениями на число вхождений в них каждого элемента генеральной совокупности $X=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$: элемент x_i может присутствовать в выборке y_i раз, где y_i - элемент некоторого числового множества $Y_i\subset \mathrm{N}_0$ $(i=1,\ldots,n)$.

Проиллюстрируем постановку задачи на примере:

Сколько разных наборов из k шаров можно получить, имея 1 синий шар, 2 одинаковых белых и 4 одинаковых красных.

Здесь генеральная совокупность состоит из синего, белого и красного шара. Возможное число вхождений каждого шара в набор определяется множествами $Y_1 = \{0,1\}$, $Y_2 = \{0,1,2\}$, $Y_3 = \{0,1,2,3,4\}$.

Пусть $A(x)$ производящая функция для последовательности (a_k). Тогда справедливо следующее соотношение:

$$A(x) = \prod_{i=1}^{n} \sum_{y_i \in Y_i} x^{y_i}.$$

Действительно,

$$A(x) = \prod_{i=1}^{n} \sum_{y_i \in Y_i} x^{y_i} = \sum_{y_1,\ldots,y_n} x^{y_1} \ldots x^{y_n} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k,$$

где $a_k = \sum_{y_1+\ldots+y_n=k} 1$. В выражении для a_k суммирование производится по всем наборам $(y_1,\ldots,y_n)$ таким, что $\forall i \;\; y_i \in Y_i$ и $y_1 + \ldots + y_n = k$, в результате чего получится искомое число k-выборок.

Для примера с шарами производящая функция имеет вид:

$$A(x) = (1+x)(1+x+x^2)(1+x+x^2+x^3+x^4) = 1+3x+5x^2+6x^3+6x^4+5x^5+3x^6+x^7.$$

Теперь рассмотрим применение аппарата производящих функций к выводу формул для числа сочетаний (без повторений и с повторениями). В обоих случаях будем считать, что генеральная совокупность состоит из n элементов.

Сочетания без повторений из n по k. Каждый элемент в выборке встречается не более одного раза, т.е. $\forall i \;\; Y_i = \{0,1\}$; k-выборка при этом является сочетанием (без повторения) из n по k. Производящая функция имеет вид:

$$A(x) = (1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k.$$

Сочетания с повторениями из n по k. Каждый элемент в выборке может появиться любое число раз: $\forall i \;\; Y_i = \mathrm{N}_0$; k-выборка при этом суть сочетание с повторениями из n по k. Производящая функция имеет вид:

$$A(x) = (1+x+x^2+\ldots)^n = \left(\frac{1}{1-x}\right)^n = (1-x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-n(-n-1)\cdots(-n-k+1)}{k!}(-x)^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{n(n+1)\cdots(n+k-1)}{k!}(-x)^k = \sum_{k=0}^{\infty} C_{n+k-1}^k x^k.$$

Число счастливых билетов.

Трамвайные билеты имеют шестизначные номера. Билет называют счастливым, если сумма его первых трех цифр равна сумме трех последних.

Покажем, что существует взаимно-однозначное соответствие между множеством «счастливых» 6-значных номеров и множеством 6-значных номеров с суммой цифр 27. Это соответствие задается так. Заменим в произвольном«счастливом» номере последние три цифры на цифры, дополняющие из до 9 (например, $147624 \to 147375$). Если сумма первых трех (и последних) цифр равна k, то после указанного преобразования сумма трех последних цифр станет равной $27-k$, а общая сумма шести цифр будет равна 27.

Таким образом, число счастливых билетов совпадает с числом билетов, сумма цифр у которых равна 27.

Каждый 6-значный номер с суммой цифр k можно рассматривать, как k-выборку, составленную из элементов генеральной совокупности $\left\{1, 10, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5\right\}$, причем каждый элемент может встречаться не более 9 раз. Пусть a_k - число таких k-выборок.
Производящая функция для последовательности (a_k) (см. выше):

$$A(x) = \left(1 + x + x^2 + \ldots + x^9\right)^6 = \left(\frac{x^{10} - 1}{x - 1}\right)^6.$$

Задача, которую мы решаем, сводится к вычислению a_{27}.
Воспользуемся базисным фактом теории функций комплексного переменного – теоремой Коши.
Теорема Коши. Для любого многочлена Лорана $p(z)$ его свободный член p_0 равен

$$p_0 = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{p(z)dz}{z},$$

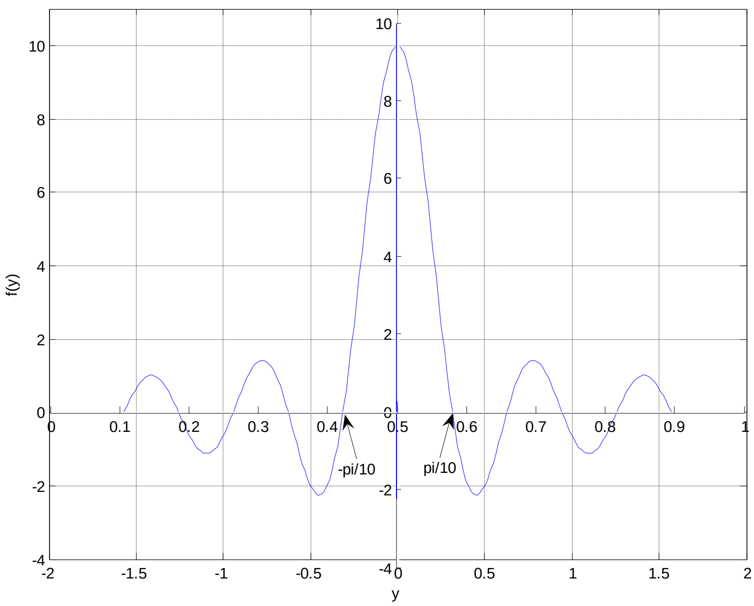
где интеграл берется по любой окружности на комплексной плоскости, содержащей внутри себя начало координат.
Для нашей задачи:

$$a_{27} = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|x|=1}\left(\frac{x^{10}-1}{x-1}\right)^6 \frac{dx}{x^{28}} = \left[x = e^{i\varphi}\right] = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{e^{10i\varphi}-1}{e^{i\varphi}-1}\right)^6 \frac{ie^{i\varphi}}{e^{28i\varphi}}d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{e^{5i\varphi}-e^{-5i\varphi}}{e^{i\varphi/2}-e^{-i\varphi/2}}\right)^6 d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{\sin 5\varphi}{\sin\left(\varphi/2\right)}\right)^6 d\varphi = \left[y = \frac{\varphi}{2}\right] = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\left(\frac{\sin 10y}{\sin y}\right)^6 dy = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin 10y}{\sin y}\right)^6 dy.$$

Таким образом, решение классической дискретной задачи записывается с помощью интеграла от тригонометрической функции!

Попробуем оценить значение последнего интеграла. График функции $f(y) = \dfrac{\sin 10y}{\sin y}$ на отрезке $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$ выглядит так, как показано на рисунке:



В нуле функция достигает своего максимума, равного 10. Вне отрезка $\left[-\frac{\pi}{10};\frac{\pi}{10}\right]$ величина функции f не превосходит $\frac{1}{\sin\frac{\pi}{10}} \approx 3$. Основная составляющая интеграла сосредоточена на отрезке $\left[-\frac{\pi}{10};\frac{\pi}{10}\right]$. Для оценки вклада этого отрезка методом стационарной фазы. Этот метод позволяет оценить значение интеграла

$$\int_{-\frac{\pi}{10}}^{\frac{\pi}{10}} f^t dy = \int_{-\frac{\pi}{10}}^{\frac{\pi}{10}} e^{t\ln f} dy$$

при $t \to \infty$. При больших значениях t величина интеграла определяется поведением функции $\ln f$ («фазы») в окрестности с стационарной точки 0 (точки, в которой $(\ln f)' = 0$, или, что то же самое, $f' = 0$). В окрестности нуля $f(y) \approx 10\left(1-\frac{32}{2}y^2\right)$, а $\ln f(y) \approx \ln 10 - \frac{32}{2}y^2$. При больших t имеем

$$\int_{-\frac{\pi}{10}}^{\frac{\pi}{10}} e^{t\left(\ln 10-\frac{33}{2}y^2\right)} dy = e^{t\ln 10}\int_{-\frac{\pi}{10}}^{\frac{\pi}{10}} e^{-\frac{33}{2}ty^2} dy \approx e^{t\ln 10}\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{33t}}.$$

Полагая $t = 6$, получаем окончательный результат:

$$a_k \approx \frac{10^6}{3\sqrt{11\pi}} \approx 56700$$

Полученный результат с хорошей точностью (отклонение составляет не более 3%) приближает искомое значение. Точное значение равно 55252.

Заметим, что задачу о числе счастливых билетов можно решить, зная формулу для числа сочетания с повторениями (см. выше) и метод включения-исключения.

Формула включения-исключения:

Пусть для любого i множество A_i является подмножеством некоторого конечного множества A. Обозначим через $\overline{A}_i$ дополнение к A_i до множества A: $\overline{A}_i = A \setminus A_i$. Тогда

$$\left|\overline{A}_1 \bigcap \overline{A}_2 \ldots \bigcap \overline{A}_n\right| = |A| - \sum_{i=1}^{n}\left|\overline{A}_i\right| + \sum_{1\le i<j\le n}\left|\overline{A}_i \bigcap \overline{A}_j\right| - \ldots + (-1)^n\left|A_1 \bigcap A_2 \ldots \bigcap A_n\right|$$

Рассмотрим множество всех расстановок неотрицательных целых чисел с суммой 27 в шести позициях и введем шесть свойств таких расстановок. i - ое свойство состоит в том, что число в i - ой позиции не меньше 10. Число счастливых билетов равно числу указанных расстановок, не обладающих ни одним из шести таких свойств.

Число всех расстановок неотрицательных целых чисел с суммой 27 в шести позициях есть $|A| = C_{32}^5$ (сочетание с повторениями из 6 по 27). Далее, для любого i $\left|\overline{A}_i\right| = C_{22}^5$.

Действительно, мы можем поставить в i - ую позицию число 10, а оставшуюся сумму 17 произвольно распределить по шести позициям. Аналогично для любой пары $\left|\overline{A}_i \bigcap \overline{A}_j\right| = C_{12}^5$: мы ставим число 10 в i - ую и j - ую позиции, а оставшуюся сумму 7 произвольным образом распределяем по шести позициям. Заметим, что остальные слагаемые в формуле включения-исключения для этой задачи равны нулю, так как расстановки неотрицательных чисел с суммой 27 в шести позициях не могут обладать более, чем двумя свойствами одновременно. Таким образом, число счастливых билетов равно

$$C_{32}^{5}-6C_{22}^{5}+15C_{12}^{5}.$$

Теория Пойа.

При решении ряда перечислительных задач комбинаторные объекты могут естественным образом отождествляться.

Примерами могут служить задача о числе различных ожерелий из n бусинок, где каждая окрашена в один из k цветов, задача о перечислении изомеров органических молекул заданной структуры, задача о компостере. Для таких комбинаторных объектов характерно то, что некоторые из них можно отождествить за счет вращений (трехмерная структура молекулы), осевой симметрии (рисунок компостера) или поворота (ожерелье, компостер). В теории Пойа, названной так в честь американского математика венгерского происхождения, подсчет числа элементов некоторого множества осуществляется с точностью до отношения эквивалентности, заданного на данном множестве при помощи указания некоторой группы подстановок, действующей на данном множестве. В результате применения теории Пойа для числа классов эквивалентности различных видов строится производящая функция. Теория Пойа является хорошим примером демонстрации возможностей алгебраического аппарата при решении комбинаторных задач.

Пусть S - n-элементное множество. *Подстановкой* на множестве S называется взаимно-однозначное отображение S на себя.

Образ элемента $s\in S$ при действии на него подстановкой $\pi : S\to S$ будем обозначать πs. *Тождественная подстановка* ε переводит каждый элемент S в себя:

$$\forall s\in S \quad \varepsilon s=s$$

Произведением $\pi_1\pi_2$ подстановок π_1 и π_2 на множестве S назовем их композицию – подстановку, определяемую последовательным выполнением данных подстановок:

$$\forall s\in S \quad (\pi_1\pi_2)s=\pi_1(\pi_2 s).$$

Операция умножения подстановок обладает свойством ассоциативности, а значит степень (π^n) определяется как n-кратное произведение $\pi\cdot\pi\cdot\ldots\cdot\pi=\pi^n$.

Если некоторое множество подстановок на S

1) замкнуто относительно операции умножения;
2) содержит тождественную подстановку;
3) вместе с каждой подстановкой содержит ей обратную,

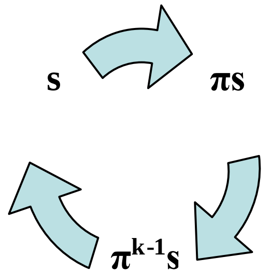
то оно образует *группу*, в которой в роли нейтрального элемента выступает тождественная подстановка ε, а умножение подстановок является (групповой) бинарной операцией. Самой «бедной» (по числу ее элементов) является группа, содержащая лишь ε. Самая «богатая» группа содержит все подстановки на множестве S, их число совпадает с числом перестановок n элементов и равно $n!$. Такую группу называют симметрической и обозначают S_n.

Зафиксируем некоторый элемент $s\in S$ и рассмотрим последовательность

$$s, \pi s, \pi^2 s, \pi^3 s, \ldots.$$

Данная последовательность не может содержать бесконечное число различных элементов ввиду конечности множества S. Первый элемент, который повторно встретится в последовательности, есть s. Наименьшее натуральное число k такое, что $\pi^k s=s$, называют порядком элемента s. Последовательность $s, \pi s, \pi^2 s, \pi^3 s, \pi^{k-1}s$ называют *орбитой* (или *циклом*) элемента s.

Элементы орбиты циклически переставляются подстановкой π.



Возьмем какой-нибудь элемент, не входящий в орбиту s (если конечно такой элемент существует, что будем в случае, когда орбита s не исчерпывает всего множества S); он порождает свою орбиту, не имеющей общих элементов с орбитой s. Если при этом остались элементы множества S, не вошедшие в построенные орбиты, то можно указать еще одну орбиту и т.д. В результате множество S разбивается на непересекающиеся орбиты (каждая подстановка, вообще говоря, задает свое разбиение S).
Длиной орбиты называют число ее элементов. Если подстановка разбивает множество S на k_1 орбит длины 1, k_2 длины 2, … k_n орбит длины n, то говорят, что подстановка имеет тип $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$. Сумма длин всех орбит равна числу элементов множества S:

$$\sum_{i=1}^{n} ik_i.$$

Цикловым индексом подстановки называют одночлен

$$x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n},$$

где $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ - тип подстановки.
Цикловым индексом группы подстановок G называют среднее арифметическое цикловых индексов ее элементов:

$$P_G(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{G} \sum_{g \in G} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}.$$

Примеры.
1) Тождественная подстановка ε порождает n орбит длины 1, поэтому цикловой индекс группы, состоящей только из тождественной подстановки, равен:

$$P_{\{\varepsilon\}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^{n}.$$

2) Найдем циклового индекс группы подстановок вершин тетраэдра, порожденных его вращениями.
Вращение тетраэдра вокруг его высоты на 120^0 в любом направлении задает подстановку на множестве вершин, имеющую тип $(1, 0, 1, 0)$ (вершина, через которую проходит высота, при вращении остается на месте, три другие вершины циклически переставляются, образуя цикл длины 3). Всего имеем 8 таких вращений, соответственно 8 подстановок, имеющий цикловой индекс $x_1^1 x_3^1$.
Вращение тетраэдра на 180^0 вокруг прямой, соединяющей середины противоположных ребер, порождает подстановку типа $(0, 2, 0, 0)$ (концы каждого из указанных ребер меняются местами при повороте, образуя 2-элементную орбиту). Поэтому в группе подстановок имеется трип подстановки с цикловым индексом x_2^{2}.
Учтя, наконец, тождественную подстановку, имеющую цикловой индекс x_1^{4}, запишем цикловой индекс рассматриваемой группы:

$$P_G(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{12}\left(8x_1x_3 + 3x_2^{2} + x_1^{4}\right).$$

Пусть $R^D = \{ f : D \to R \}$ - множество всевозможных функций с областью определения D и принимающих значения на множестве R, где R и D - некоторые конечные множества. Каждую такую функцию можно отождествить с размещением с повторениями из $|R|$ элементов по $|D|$; поэтому $\left|R^D\right| = |R|^{|D|}$.

Пусть G - группа подстановок, действующих на множестве D. Назовем функции f_1 и f_2 из R^D *эквивалентными* ($f_1 \sim f_2$), если для некоторой подстановки $g \in G$ $f_1(g) = f_2$, т.е.

$$\forall d \in D \quad f_1\left(g\left(d\right)\right) = f_2\left(d\right).$$

Введенное отношение эквивалентности обладает свойствами рефлексивности, транзитивности, симметричности.

Каждому элементу r множества R придадим некоторый *вес* $w(r)$. (Вес – это элемент некоторого коммутативного кольца.) *Весом функции* $f \in R^D$ назовем произведения весов образов всех элементов множества D при отображении f:

$$W(f) = \prod_{d \in D} w(f(d)).$$

Пример.

Пусть $D = \{1, 2, 3, 4\}$ - множество вершин тетраэдра;

$R = \{\text{синий, красный, зеленый, белый}\} = \{\text{с,к,з,б}\}$ - множество цветов. Тогда R^D - множество всевозможных раскрасок вершин тетраэдра в указанные цвета. С помощью G - группы подстановок вершин, возникающих в результате вращений тетраэдра, множество R^D разбивается на классы эквивалентности. Класс эквивалентности составляют раскраски, переходящие друг в друга в результате вращений тетраэдра, такие раскраски будем называть геометрически неразличимыми. Например, с точность до геометрической неразличимости существует ровно одна раскраска, при которой три вершины – белые, а одна – синяя. Каждому элементу множества R придадим вес: $w(\text{с}) = x$; $w(\text{к}) = y$; $w(\text{з}) = z$; $w(\text{б}) = t$. Вес упомянутой выше раскраски равен xt^3.

Теорема (без доказательства).

Эквивалентные функции имеют одинаковый вес:

$$f_1 \sim f_2 \Rightarrow W\left(f_1\right) = W\left(f_2\right).$$

Теперь становится корректным следующее определение. Весом класса эквивалентности называется вес любой функции из этого класса; если F - класс эквивалентности и $f \in F$, то $W(F) = W(f)$.

Заметим, что и у неэквивалентных функций могут совпадать веса.

Теорема Пойа (1937г.).

Сумма весов классов эквивалентности рана

$$\sum_F W(F) = P_G\left(\sum_{r \in R} w(r), \sum_{r \in R} w^2(r), \sum_{r \in R} w^3(r), \dots\right),$$

где P_G - цикловой индекс группы подстановок G.

Следствие.

Число классов эквивалентности равно $P_G\left(|R|, |R|, |R|, \dots\right)$.

Действительно. Если положить вес каждого элемента R равным 1, то и вес каждой функции, и, значит, каждого класса эквивалентности будет равен 1; поэтому сумма весов всех классов эквивалентности будет равна их числу.

Примеры.

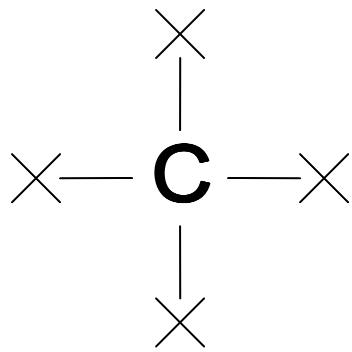
1) Воспользуемся теоремой Пойа для ***подсчета числа существенно различных раскрасок вершин тетраэдра в k цветов.*** Так как цикловой индекс группы подстановок вершин тетраэдра, порожденных его вращениями, равен:

$$P_G(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{12}\left(8x_1x_3 + 3x_2{}^2 + x_1{}^4\right).$$

Применив следствие теоремы Пойа, получим

$$\frac{1}{12}\left(11k^2 + k^4\right).$$

2) Задача о перечислении числа изомеров органических молекул заданной структуры, где C - атом углерода, а места, обозначенные крестиками, могут занимать метил $\left(CH_3\right)$, этил $\left(C_2H_5\right)$, водород $\left(H\right)$ и хлор $\left(Cl\right)$. Математическая модель этих молекул – тетраэдр, в центре которого расположен атом углерода. Расположение в вершине тетраэдра определенной группы атомов будем считать покраской вершины в определенный цвет (один из четырех). Таким образом, задача сведена к предыдущей (при $k = 4$). Общее число молекул равно $\frac{1}{12}\left(11\cdot 4^2 + 4^4\right) = 36.$



Для того чтобы подсчитать число молекул с фиксированным числом атомов водорода, положим:

$$w(H) = x; \quad w(Cl) = w(CH_3) = w(C_2H_5) = 1.$$

Тогда вес молекулы с i атомами водорода будет равен x^i. Применяя теорему Пойа, получим:

$$P_G\left(x+3,\ x^2+3,\ x^3+3,\ x^4+3\right) = x^4 + 3x^3 + 6x^2 + 11x + 15.$$

Значит, существует одна молекула CH_4 (метан), три молекулы с 3 атомами водорода, шесть молекул с 2 атомами водорода и 15 молекул без атомов водорода.

3) Задача о числе ожерелий. Имеется неограниченный запас бусинок k цветов. Сколько можно составить различных ожерелий из n бусинок (ожерелья, получаемые плоскими вращениями не будем различать)?

Считая, что бусинки располагаются в вершинах правильного n-угольника, сведем задачу к задаче о числе геометрически различных (т.е. не получающихся друг из друга вращениями в плоскости) раскрасок вершин правильного n-угольника в k цветов. При этом D - множество вершин, R - множество цветов, $|D| = n$, $|R| = k$; R^D - множество раскрасок. Отношение эквивалентности на множестве R^D задается с помощью G - группы подстановок вершин, порожденной вращениями правильного n-угольника; $|G| = n$.

Пусть $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$, где g_j - подстановка, возникающая в результате поворота на угол $\frac{2\pi}{n}j$ ($j = 1, \ldots, n$) (в частности, тождественная подстановка $\varepsilon = g_n$). Тогда, если отождествить вершину с ее номером, положив $D = \{1, 2, \ldots, n\}$ (номера проставляются по порядку против часовой стрелки), то подстановка g_j описывается соотношением:

$$g_j(i) \equiv i + j \pmod n.$$

Длину орбиты произвольного элемента можно найти как наименьшее натуральное число k, для которого kj делится на n. Если (n, j) - наибольший общий делитель j и n, то $j = j_1(n, j),\ n = n_1(n, j)$, где j_1 и n_1 - взаимно простые числа. Поэтому $kj = kj_1(n, j)$ делится $n = n_1(n, j)$ тогда и только тогда, когда k делится на n_1, наименьшее натуральное k с таким свойством равно $n_1 = \frac{n}{(n, j)}$. Итак при повороте на угол $\frac{2\pi}{n} j$ все орбиты имеют длину (n, j). Запишем цикловой индекс группы подстановок:

$$P_G(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(x_{\frac{n}{(n,j)}}\right)^{(n,j)}.$$

По следствию из теоремы Пойа общее число раскрасок N выражается формулой:

$$N = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} k^{(n,j)}.$$

В полученной сумме показатели степеней k принимают значения делителей числа n. Несложно видеть, что общее количество чисел из множества $\{1, 2, \ldots, n\}$, для которых их наибольший делитель с n равен d, где $d \mid n$, совпадает с количеством натуральных чисел, не превосходящих число $\frac{n}{d}$ и взаимно простых с ним, т.е. равно $\varphi\left(\frac{n}{d}\right)$ (φ - функция Эйлера). Таким образом,

$$N = \frac{1}{n}\sum_{d \mid n} k^d \varphi\left(\frac{n}{d}\right).$$

Упражнение. На листках бумаги пишутся числа от 00000 до 99999. Будем считать, что при переворачивании цифры 0, 1, 8 не меняются, а цифры 6 и 9 переходят друг в друга. Например, для чисел 06981 и 18690 можно приготовить только один листок. Сколько всего понадобится листков?

Числа Каталана.

Числом Каталана c_n называется число различных правильных скобочных структур из n пар скобок.

Удобно полагать $c_0 = 1$. Тогда последовательность чисел Каталана начинается так:

$$1,\quad 1,\quad 2,\quad 5,\quad 14,\quad 42,\quad 132,\quad \ldots$$

Чтобы вывести производящую функцию для чисел Каталана, найдем сначала рекуррентное соотношение для этих чисел.

Всякая правильная скобочная структура удовлетворяет следующим двум условиям:

1) число левых и правых скобок в правильной скобочной структуре одинаково;
2) число левых скобок в любом начальном отрезке правильной скобочной структуры не меньше числа правых скобок.

Наоборот, всякая (конечная) скобочная структура, удовлетворяющая условиям 1) и 2) является правильной.

В правильной скобочной структуре все скобки разбиваются на пары: каждой левой скобке соответствует парная ей правая. Парная правая скобка выделяется следующим правилом: это первая правая скобка справа от данной левой скобки, такая, что между выбранными двумя скобками стоит правильная скобочная структура.

Рассмотрим в правильной скобочной структуре из $n+1$ пар скобок пару скобок, в которую входит самая левая скобка структуры. Тогда последовательность скобок внутри этой пары образует правильную скобочную структуру и последовательность скобок вне этой пары образует правильную скобочную структуру. Если число пар скобок во внутренней скобочной структуре равно k, то во внешней структуре $n-k$ пар скобок.

Наоборот, по каждой паре скобочных структур из k и $n-k$ пар скобок можно восстановить структуру из $n+1$ пар скобок, заключив первую структуру в скобки и приписав к результату справа вторую структуру.
Отсюда мы получаем рекуррентное соотношение для чисел Каталана:

$$c_{n+1} = c_0 c_n + c_1 c_{n-1} + \ldots + c_n c_0.$$

Рассмотрим производящую функцию для чисел Каталана:

$$Cat(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots$$

Возведем ее в квадрат и умножим результат на x, получим

$$cCat^2(x) = c_0{}^2 x + \left(c_0 c_1 + c_1 c_0\right)x^2 + \left(c_0 c_2 + c_1 c_1 + c_2 c_0.\right)x^3 + \ldots =$$

$$= c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \ldots = Cat(x) - c_0 = Cat(x) - 1,$$

Что дает нам квадратное уравнение на производящую функцию

$$xCat^2(x) - Cat(x) + 1 = 0,$$

откуда

$$Cat(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}.$$

(Второй корень отбрасывается, так как $\frac{1+\sqrt{1-4x}}{2x} = \frac{1}{x} + \ldots$ содержит отрицательные степени x.)
Согласно биному Ньютона

$$c_n = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2}\cdot 4^{n+1}}{2(n+1)!} = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} = \frac{1}{n+1}C_{2n}^{n}.$$

Можно получить и более простое рекуррентное соотношение для чисел Каталана:

$$c_{n+1} = \frac{4n+2}{n+2}c_n.$$

Числа Каталана перечисляют самые разнообразные комбинаторные объекты.
Это и число различных триангуляции выпуклого многоугольника (разбиение многоугольника непересекающимися диагоналями на треугольники), число способов расставить 2n людей в очередь за покупкой товара в 50руб., если у n человек есть только купюра в 100руб., а у n человек - купюра в 50руб., при этом изначальна кассам магазина пуста, и никто не хочет ждать свою сдачу.

Формальные грамматики с однозначным выводом. Теорема Лагранжа.
Снова рассмотрим правильные скобочные структуры, описываемые числами Каталана. Если обозначить левую скобку буквой a, а правую b, то можно переписать правильные скобочные структуры в виде «слов» в алфавите $\{a,b\}$.

Определение. Пусть $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ - произвольный конечный набор различных букв. *Словом* в алфавите A называется произвольная конечная последовательность букв $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m$, где $\alpha_i \in A$ $i = 1,\ldots,m$. Число m называется *длиной слова*. *Языком над алфавитом* A называется произвольное (конечное или бесконечное) множество слов в алфавите A.
Пустое слово λ имеет длину 0 и может входить или не входить в язык.
Множество правильных скобочных структур вместе с пустой структурой образует язык над алфавитом $\{a,b\}$. Этот язык называется *языком Дика*.
Производящей функцией языка L называется производящая функция

$$L(x) = l_0 + l_1 x + l_2 x^2 + \ldots,$$

где l_k есть число слов длины k в языке L.
Рассмотрим *правила вывода в языке Дика*:

$$1)\quad r \to \lambda;$$

$$2)\quad r \to arbr.$$

Действительно, всякое слово в языке Дика есть либо

1) пустое слово, либо
2) слово, в котором внутри самой левой пары соответственных скобок стоит некоторое слово языка Дика и после этой пары стоит слово языка Дика.

Вычислим с помощью правил вывода производящую функцию для языка Дика. Для этой цели напишем «некоммутативный производящий ряд», перечисляющий слова языка. Этот ряд представляет собой просто формальную сумму всех слов языка, выписанных в порядке возрастания длины:

$$D(a,b) = \lambda + ab + aabb + abab + aaabbb + aababb + \dots$$

Теорема. Этот ряд удовлетворяет уравнению

$$D(a,b) = \lambda + aD(a,b)bD(a,b).$$

Доказательство основано на правилах вывода языка.
Чтобы перейти от некоммутативного производящего ряда к обычному, сделаем подстановку $a = x$, $b = x$, $\lambda = x^0 = 1$. Тогда получим

$$D(x,x) = 1 + x^2 D^2(x,x).$$

Отсюда обозначив $D(x,x)$ через $d(x)$, получим

$$d(x) = 1 + x^2 d^2(x).$$

Решение

$$d(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{2x^2}$$

Этого уравнения, конечно же, совпадает (с точностью до возведения формальной переменной в квадрат) с производящей функцией для чисел Каталана. Необходимость подстановки переменной x^2 вместо x объясняется тем, что в языке Дика длина слова, составленного из n пар скобок, равна $2n$, тогда как ранее мы перечисляли эти слова по числу пар скобок.

Определение. Слово $w = \beta_1 \dots \beta_m$ языка L называется *неразложимым* в этом языке, если никакое его непустое подслово $\beta_i \beta_{i+1} \dots \beta_{i+l}$, $1 \le i,\, i+l \le m,\, l \ge 0$, отличное от самого слова w, не принадлежит языку L.
В частности, пустое слово в любом языке, содержащим его, неразложимо. Предположим, что язык L обладает следующими свойствами:
1) пустое слово входит в язык L;
2) начало всякого неразложимого слова не совпадает с концом другого или того же самого неразложимого слова;
3) если между любыми двумя буквами любого слова языка L вставить слово языка L, то получится слово языка L;
4) если из любого слова языка L выкинуть подслово, входящее в язык L, то получится слово языка L.
Обозначим через $n(y) = n_0 + n_1 y + n_2 y^2 + \dots$ производящую функцию для числа неразложимых слов языка L.
Теорема (без доказательства). Производящая функция для языка L, удовлетворяющего свойствам 1)-4), и производящей функцией для подъязыка неразложимых слов в нем связаны между собой *уравнением Лагранжа*

$$l(x) = n\big(xl(x)\big).$$

Пример. Для языка Дика $n(y) = 1 + y^2$. Неразложимые слова – это λ и ab. Отсюда немедленно получаем уравнение $l(x) = 1 + \left(xl(x)\right)^2$ на производящую функцию для языка Дика.
Уравнение Лагранжа – функциональное уравнение, связывающее между собой производящие функции для числа слов в языке и числа неразложимых слов в нем. Оказывается, если одна из функций известна, то оно всегда разрешимо.
Приведем уравнение к классическому виду. Положим $xl(x) = \tilde{l}(x)$. Тогда уравнение Лагранжа примет вид:

$$\tilde{l}(x) = xn(\tilde{l}(x)).$$

Теорема Лагранжа. Пусть задана одна из производящих функций $\tilde{l}(x)$ ($\tilde{l}_0 = 0$, $\tilde{l}_1 \neq 0$) или $n(y)$ ($n_0 \neq 0$). Тогда вторая производящая функция однозначно восстанавливается по ней из уравнения $\tilde{l}(x) = xn(\tilde{l}(x))$.

Метод включения-исключения.
Классическая формула.
Для любых конечных множеств $X_1, X_2, \ldots, X_n$ справедливо

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} X_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |X_i| - \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n} \left|X_{i_1} \bigcap X_{i_2}\right| + \ldots (-1)^k \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots i_k \le n} \left|X_{i_1} \bigcap X_{i_2} \ldots \bigcap X_{i_k}\right| + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^n \left|X_1 \bigcap X_2 \ldots \bigcap X_n\right|$$

Эта формула легко доказывается индукцией по n. База индукции:

$$\left|X \bigcup Y\right| = |X| + |Y| - \left|X \bigcap Y\right|,$$

что справедливо в силу правила суммы для любых конечных множеств X, Y:

$$\left|X \bigcup Y\right| = \left|X \bigcap Y\right| + \left|X \setminus X \bigcap Y\right| + \left|Y \setminus X \bigcap Y\right| =$$
$$= \left|X \bigcap Y\right| + \left(|X| - \left|X \bigcap Y\right|\right) + \left(|Y| - \left|X \bigcap Y\right|\right) =$$
$$= \left|X \bigcup Y\right| = |X| + |Y| - \left|X \bigcap Y\right|.$$

Далее, полагая $X = \bigcup_{i=1}^{n-1} X_i, Y = X_n$, получаем формулу.

Задача на метод вкл-искл
(возможно, счастливые билетики)

Обобщим теперь классическую формулу включения-исключения.
Рассмотрим N элементов $a_1, a_2, \ldots, a_N$, которым соответственно приписаны веса $w(a_1), w(a_2), \ldots, w(a_N)$, являющиеся элементами некоторого коммутативного кольца K. Каждый из заданных элементов может обладать или не обладать некоторыми свойствами $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Обозначим через $M(r)$ суммарный вес элементов, обладающих точно r свойствами, а через M_r - суммарный вес элементов, обладающих не менее чем r свойствами. Покажем, что

$$M(r)=\sum_{k=r}^{n}(-1)^{k-r}C_k^r S_k,\quad r=0,1,\dots,n,$$

$$M_r=\sum_{k=r}^{n}(-1)^{k-r}C_{k-1}^{r-1}S_k,\quad r=0,1,\dots,n,$$

где

$$S_0=\sum_{i=1}^{N}w(a_i),\quad S_k=\sum_{1\le i_1<i_2<\dots i_k\le n}M\left(A_{i_1}A_{i_2}\dots A_{i_k}\right),\quad k=1,2,\dots,n,$$

$M\left(A_{i_1}A_{i_2}\dots A_{i_k}\right)$ - суммарный вес элементов, обладающих фиксированными свойствами $A_{i_1},A_{i_2},\dots,A_{i_k}$.

Для доказательства первого тождества покажем, что в правую часть равенства входят все веса элементов, обладающих r свойствами, и только они.

Веса элементов, обладающих точно r свойствами, учитываются один раз в сумме S_r и не входят в остальные суммы $S_{r+1},\dots,S_n$. Веса элементов, обладающих $\mu>r$ свойствами, в сумме S_k, $k>r$, учитываются C_μ^k раз. Поэтому в правую часть доказываемого равенства вес таких элементов входит с коэффициентом:

$$\sum_{k=r}^{n}(-1)^{k-r}C_k^r C_\mu^k=C_\mu^r\sum_{j=0}^{\mu-r}(-1)^j C_{\mu-r}^j=0.$$

Веса элементов, обладающих $\mu<r$ свойствами, не входят в правую часть доказываемого тождества.

Справедливость второго тождества вытекает из следующего:

$$M_r=\sum_{j=r}^{n}M(j)=\sum_{j=r}^{n}\sum_{k=j}^{n}(-1)^{k-j}C_k^j S_k=\sum_{k=r}^{n}S_k\sum_{j=r}^{k}(-1)^{k-j}C_k^j.$$

Сумма

$$\sum_{j=r}^{k}(-1)^{k-j}C_k^j=\sum_{j=0}^{k-r}(-1)^j C_k^j$$

Есть коэффициент при x^{k-r} в выражении $(1-x)^k(1-x)^{-1}$. С другой стороны, этот коэффициент равен $(-1)^{k-r}C_{k-1}^{k-r}$.

Если $w(a_1)=w(a_2)=\dots=w(a_N)=1$, то $M(r)$ представляет собой число элементов, обладающих ровно r свойствами из числа заданных $A_1,A_2,\dots,A_n$. Если Ψ_i - множество элементов, обладающих свойством A_i, $i=1,\dots,n$, то число элементов, обладающих одновременно свойствами $A_{i_1},A_{i_2},\dots,A_{i_k}$, равно $M\left(A_{i_1}A_{i_2}\dots A_{i_k}\right)=\left|\Psi_{i_1}\bigcap\Psi_{i_2}\bigcap\dots\bigcap\Psi_{i_k}\right|$.

Кроме того, число элементов, обладающих хотя бы одним из свойств $A_1,A_2,\dots,A_n$, равно $M_1=\left|\bigcup_{i=1}^{n}\Psi_i\right|$, таким образом, получается классическая формула включения-исключения.

Неравенства Бонферрони.

Будем предполагать, что элементы коммутативного кольца K, определяющего веса элементов $a_1,a_2,\dots,a_N$, являются неотрицательными числами. В этом предположении выведем неравенства, которые в ряде случаев упрощают применение метода включения-исключения, так как в пределах допустимой точности позволяют ограничиться подсчетом в знакопеременной сумме $M(r)=\sum_{k=r}^{n}(-1)^{k-r}C_k^r S_k$ лишь нескольких членов.

Для $r+1 \le d \le n$ имеем:

$$M(r) - \sum_{k=r}^{d-1} (-1)^{k-r} C_k^r S_k = (-1)^{d-r} U(d,r),$$

где $U(d,r) = \sum_{k=d}^{n} (-1)^{k-d} C_k^r S_k$.

Сначала выразим величины S_k , $k = 0,1,\dots,n$ через $M(r)$, $r = 0,1,\dots,n$:

$$\sum_{r=k}^{n} C_r^k M(r) = \sum_{r=k}^{n} C_r^k \sum_{l=r}^{n} (-1)^{l-r} C_l^r S_l = \sum_{l=k}^{n} S_l \sum_{r=k}^{l} (-1)^{l-r} C_r^k C_l^r .$$

Выражая биноминальные коэффициенты через факториалы, получаем:

$$\sum_{r=k}^{l} (-1)^{l-r} C_r^k C_l^r = C_l^k \sum_{r=k}^{l} (-1)^{l-r} C_{l-k}^{l-r} = C_l^k \sum_{j=0}^{l-k} (-1)^j C_{l-k}^j = \begin{cases} 1, & l = k, \\ 0, & l > k. \end{cases}$$

Поэтому получаем:

$$S_k = \sum_{r=k}^{n} C_r^k M(r), \quad k = 0,1,\dots,n.$$

В силу этого равенства можно переписать:

$$U(d,r) = \sum_{k=d}^{n} (-1)^{k-d} C_k^r S_k = \sum_{k=d}^{n} (-1)^{k-d} C_k^r \sum_{j=k}^{n} C_j^k M(j) = \sum_{j=d}^{n} M(j) \sum_{k=d}^{j} (-1)^{k-d} C_k^r C_j^k .$$

Заметим, что

$$\sum_{k=d}^{j} (-1)^{k-d} C_k^r C_j^k = C_j^r \sum_{k=d}^{j} (-1)^{k-d} C_{j-r}^{k-r} = C_j^r \sum_{l=0}^{j-d} (-1)^{j-l-d} C_{j-r}^{l}$$

При этом $\sum_{l=0}^{j-d} (-1)^{j-l-d} C_{j-r}^{l}$ есть коэффициент при x^{j-d} в разложении $(1+x)^{j-r}(1+x)^{-1}$. С другой стороны, он равен C_{j-r-1}^{j-d} . Поэтому окончательно получаем:

$$U(d,r) = \sum_{j=d}^{n} C_{j-r-1}^{d-r-1} C_j^r M(j) \ge 0.$$

С учетом этого неравенства, получаем:

$$M(r) - \sum_{k=r}^{r+2\nu-1} (-1)^{k-r} C_k^r S_k = (-1)^{2\nu} U(r+2\nu, r) \ge 0,$$

$$M(r) - \sum_{k=r}^{r+2\nu} (-1)^{k-r} C_k^r S_k = (-1)^{2\nu+1} U(r+2\nu+1, r) \le 0.$$

Из этих двух соотношений вытекают так называемые неравенства Бонферрони:

$$\sum_{k=r}^{r+2\nu-1} (-1)^{k-r} C_k^r S_k = (-1)^{2\nu} U(r+2\nu, r) \le M(r) \le \sum_{k=r}^{r+2\nu} (-1)^{k-r} C_k^r S_k = (-1)^{2\nu+1} U(r+2\nu+1, r),$$

где $0 \le \nu \le {(n-r)}/{2}$.

Из этих неравенств следует, что, отбрасывая в сумме $M(r) = \sum_{k=r}^{n} (-1)^{k-r} C_k^r S_k$ слагаемые, начиная с некоторого, мы получим погрешность, знак которой совпадает с со знаком первого из отброшенных членов, а абсолютная величина погрешности не превосходит абсолютной величины первого из отброшенных членов.

(доказательства не нужно. Задача)

Задача о беспорядках.

Перестановка π элементов множества $\{1,2,\ldots,n\}$ называется беспорядком, если $\pi(k)\neq k$ ни при каких $k=1,\ldots,n$. Обозначим через d_n число беспорядков на множестве из n элементов.

Чтобы посчитать число беспорядков, введем n свойств перестановок на множестве из n элементов. Свойство c_i состоит в том, что перестановка оставляет на месте элемент i. Число всех перестановок равно $n!$ Число перестановок, удовлетворяющих свойству c_i, равно $(n-1)!$: мы фиксируем i-й элемент, а остальные переставляем произвольно. Число перестановок, удовлетворяющих свойствам c_i и c_j равно $(n-2)!$: два элемента фиксируются, остальные переставляются произвольно. Вообще, число перестановок, удовлетворяющих m фиксированным свойствам, равно $(n-m)!$. Таким образом,

$$d_n = C_n^0 n! - C_n^1(n-1)! + C_n^2(n-2)! - \ldots = n!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}\right).$$

Этой задаче можно придать такую интерпретацию: группа из n фанатов выигрывающей футбольной команды на радостях подбрасывают в воздух свои шляпы. Шляпы возвращаются в случайном порядке – по одной к каждому болельщику. Какова вероятность того, что никому из фанатов не вернется своя шляпа?

Из описанного выше, получаем, что искомая вероятность равна

$$1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}\underset{n\to\infty}{\to} e^{-1}.$$

Общий подход.

Зафиксируем некоторую последовательность $\{\alpha_n\}$. Каждой последовательности $\{a_n\}$ мы можем сопоставить производящую функцию

$$\{a_n\}\mapsto\sum_{n=0}^{\infty}a_n\alpha_n x^n,$$

определяемую последовательностью $\{\alpha_n\}$. Если в последовательность $\{\alpha_n\}$ отсутствуют нулевые элементы, то такое сопоставление однозначно. Если $\alpha_n\equiv 1$, то получаем обычную производящую функцию. Если $\alpha_n=\frac{1}{n!}$ - экспоненциальную производящую функцию.

Операции с обычными производящими функциями уже были описаны выше. Посмотрим на поведение экспоненциальных производящих функций.

Сумма ведет себя обычным образом, а вот произведение иначе:

$$C(x)=A(x)B(x)=\left(\frac{a_0}{0!}+\frac{a_1}{1!}x+\frac{a_2}{2!}x^2+\cdots\right)\left(\frac{b_0}{0!}+\frac{b_1}{1!}x+\frac{b_2}{2!}x^2+\cdots\right)=\frac{c_0}{0!}+\frac{c_1}{1!}x+\frac{c_2}{2!}x^2+\cdots$$

Где $c_n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a_k b_{n-k}$ - биномиальная свертка.

Покажем, что экспоненциальная производящая функция для числа беспорядков, есть

$$D(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d_n}{n!}x^n=\frac{e^{-x}}{1-x}.$$

Обозначим, за $d_{n,k}$ - число перестановок на множестве из n элементов, оставляющих на месте ровно k элементов (то есть число неподвижных точек равно k). При таком обозначении $d_{n,0}=d_n$. Более того, $d_{n,k}=C_n^k d_{n-k}$ (C_n^k способами можно выбрать k неподвижных элементов, а остальные $n-k$ образуют беспорядок). Из правила суммы, получаем:

$$n! = \sum_{k=0}^{n} d_{n,k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k d_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^{n-k} d_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k d_k .$$

То есть получилась биномиальная свертка:

$$a_k = d_k, \quad b_k = 1, \quad c_k = k!$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{n!} x^n \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \Rightarrow$$

$$\frac{1}{1-x} = D(x)e^x$$

(Может стоит, пока речь зашла о экспоненциальных ПФ, рассказать про получение ЭПФ в комбинаторных задачах с помеченными объектами? Например, вывести ЭПФ для числа помеченных деревьев на n вершинах)

Задача. Сколько существует остовных деревьев в полном графе с n вершинами $\{1, 2, \ldots, n\}$?

Обозначим это число t_n. Полный граф содержит $\frac{n(n-1)}{2}$ ребер, так что по существу ищется число способов соединить n объектов, проведя только $n-1$ ребер.
Выделим одну вершину и посмотрим на те связные компоненты или блоки, на которое разобьется остовное дерево, если проигнорировать все ребра, проходящие через выделенную вершину. Если невыделенные вершины образуют m компонент размеров $k_1, k_2, \ldots, k_m$, то их можно соединить с выделенной вершиной $k_1 k_2 \cdots k_m$ способами.
Такие рассуждения приводят к рекуррентному соотношению

$$t_n = \sum_{m>0} \frac{1}{m!} \sum_{k_1+k_2+\ldots+k_m=n-1} \binom{n-1}{k_1, k_2, \ldots, k_m} k_1 k_2 \cdots k_m \, t_{k_1} t_{k_2} \cdots t_{k_m},$$

при любом $n > 1$. Действительно, имеется $\binom{n-1}{k_1, k_2, \ldots, k_m} = \frac{(n-1)!}{k_1! k_2! \cdots k_m!}$ (полиномиальный коэффициент) способов представить $n-1$ объект в виде последовательности из m компонент размеров, соответственно, $k_1, k_2, \ldots, k_m$; имеется $t_{k_1} t_{k_2} \cdots t_{k_m}$ способов соединить вершины внутри этих компонент какими-то остовными деревьями; имеется $k_1 k_2 \cdots k_m$ способов соединить вершину n с этими компонентами; далее надо разделить на $m!$, так как не должен учитываться порядок компонент.
Теперь обозначим $u_n = n t_n$, тогда рекуррентное соотношение примет следующий вид:

$$\frac{u_n}{n!} = \sum_{m>0} \frac{1}{m!} \sum_{k_1+k_2+\ldots+k_m=n-1} \frac{u_{k_1}}{k_1!} \frac{u_{k_2}}{k_2!} \cdots \frac{u_{k_m}}{k_m!}, \quad n > 1.$$

Обозначим за $U(x)$ ЭПФ для последовательности $\{u_n\}$ (то есть $U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{n!} x^n$). Тогда правая часть полученного соотношения есть коэффициент при x^{n-1} в разложении $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} U^m(x) = e^{U(x)}$ или по-другому, коэффициент при x^n в $xe^{U(x)}$. В то же время, слева - коэффициент при x^n в $U(x)$. Таким образом,

$$U(x) = xe^{U(x)}$$

Заметим, что числа t_n можно интерпретировать, как число помеченных деревьев на n вершинах. Если в дереве выделить одну вершину и назвать ее корнем, то получим корневое помеченное дерево. .Так как выделить в качестве корня среди n помеченных вершин дерева можно n способами, то последовательность чисел u_n есть число помеченных корневых деревьев на n вершинах.
Итак, ЭПФ для числа помеченных корневых деревьев удовлетворяет уравнению Лагранжа $U(x) = xe^{U(x)}$.
Для нахождения явной формулы для этой последовательности, можно воспользоваться следующим уточнением теоремы Лагранжа.
Теорема. Пусть функции $\varphi = \varphi(x)$ ($\varphi(0) = 0$) и $\psi = \psi(z)$ связаны между собой уравнением Лагранжа

$$\varphi(x) = x\psi\left(\varphi(x)\right).$$

Тогда коэффициенты при x^n в функции φ равен коэффициенту при z^{n-1} в разложении $\frac{1}{n}\psi^n(z)$.
Применяя это утверждение к нашей задаче, получаем: $u_n = n^{n-1}$.
То есть число помеченных корневых деревьев на n вершинах равно n^{n-1} (утверждение Кэли), а число помеченных деревьев равно n^{n-2}. (или для первоначальной формулировки задачи – число остовных деревьев в полном графе с n вершинами $\{1, 2, \ldots, n\}$).

Задача. (Парадокс дней рождений).
Сколько студентов (в среднем) должно быть в группе, чтобы нашлось хотя бы двое с одинаковым днями рождения?
Решение. Пусть дискретная случайная величина X равна числу человек в произвольном классе, в котором нет совпадающих дней рождений.
Распределение случайной величины X:
$P(X > n) = \dfrac{r(r-1)(r-2)\ldots(r-n+1)}{r^n}$, $r = 365$ - число дней в году (не високосном)
Введем обозначение коэффициент при z^n в разложении функции $f(z)$ в ряд Тейлора в окрестности нуля: $\left[z^n\right] f(z)$. Тогда $P(X > n) = \dfrac{n!}{r^n}\left[z^n\right](1+z)^r = n!\left[z^n\right]\left(1+\dfrac{z}{r}\right)^r$.
Математическое ожидание случайной величины X:
$EX = \sum_{n=0}^{\infty} P(X > n) = 1 + \sum_{n=1}^{r} \dfrac{r(r-1)(r-2)\ldots(r-n+1)}{r^n}$.
Для подсчета математического ожидания можно не вычислять значение последней суммы, а обратиться к экспоненциальной производящей функции.
Экспоненциальной производящей функцией (ЭПФ) последовательности a_0, a_1, … a_n, … называется формальный степенной ряд

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$$

Тогда для последовательности $\{a_n = P(X > n)\}_{n=0}^{\infty}$ получим ЭПФ $A(z) = \left(1 + \frac{z}{r}\right)^r$, откуда

$$EX = \sum_{n=0}^{\infty} P(X > n) = \sum_{n=0}^{\infty} n!\left[z^n\right]\left(1+\frac{z}{r}\right)^r = \int_0^{\infty} e^{-t}\left(1+\frac{t}{r}\right)^r dt .$$

В последнем равенстве, мы воспользовались преобразованием Лапласа:

Если $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$, то $\sum_{n=0}^{\infty} n!\, f_n = \int_0^{\infty} e^{-t} f(t)dt$.

Далее для приближенного вычисления интеграла $\int_0^{\infty} e^{-t}\left(1+\frac{t}{r}\right)^r dt = r\int_0^{\infty} e^{r(\ln(1+u)-u)}du$

воспользуемся методом Лапласа:

$$\int_0^{\infty} f(u)e^{rS(u)}du \approx f(u_0)e^{rS(u_0)}\int_{u_0-\delta}^{u_0+\delta} e^{\frac{rS''(u_0)(u-u_0)^2}{2}}du \quad \underset{\substack{r\to\infty \\ \Downarrow \\ \sqrt{-rS''(u_0)}\delta\to\infty}}{\overset{x=\sqrt{-rS''(u_0)}(u-u_0)}{\longrightarrow}} \quad \frac{f(u_0)e^{rS(u_0)}}{\sqrt{-rS''(u_0)}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \frac{f(u_0)e^{rS(u_0)}}{\sqrt{-rS''(u_0)}},$$

где u_0 - единственная точка максимума вещественнозначной функции $S(u)$ на полубесконечном интервале $(0;+\infty)$. Основная идея асимптотического представления интеграла Лапласа заключается в представлении функции $S(u)$ в окрестности точки максимума u_0 в ряд Тейлора.

В нашей задаче $S(u) = \ln(1+u) - u$, $u_0 = 0$, $f(u) \equiv 1$.

$$\int_0^{\infty} e^{r(\ln(1+u)-u)}du \approx \int_0^{\delta} e^{-r\frac{u^2}{2}}du \overset{x=\sqrt{r}u}{=} \frac{1}{\sqrt{r}}\int_0^{\sqrt{r}\delta} e^{-\frac{x^2}{2}}dx \approx \frac{1}{\sqrt{r}}\int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \sqrt{\frac{\pi}{2r}}$$. Значит

$$EX = \int_0^{\infty} e^{-t}\left(1+\frac{t}{r}\right)^r dt = r\int_0^{\infty} e^{r(\ln(1+u)-u)}du \approx \sqrt{\frac{\pi r}{2}} .$$

Так как $r = 365 \gg 1$, то ответ приблизительно 24,6.

Замечание. На эту задачу можно смотреть, как на отображение $[1..n] \to [1..r]$. Вопрос коллизии дня рождений в терминах отображений будет таким: при каком n отображение будет инъективным.

Задача. Покажите, что распределение случайной величины X из предыдущей задачи имеет асимптотически распределение Релея при $n = t\sqrt{r}$:

$$P\left\{X > t\sqrt{r}\right\} \sim e^{-\frac{t^2}{2}} \quad P\left\{X = t\sqrt{r}\right\} \sim \frac{1}{\sqrt{r}} t e^{-\frac{t^2}{2}}$$

Решение

Для решения задачи воспользуемся знаниями из ТФКП (теорема Коши, седловая точка).

$$P(X > n) = n!\left[z^n\right]\left(1+\frac{z}{r}\right)^r = \frac{1}{n!}\frac{1}{2i\pi}\oint_{|z|=\rho}\left(1+\frac{z}{r}\right)^r \frac{dz}{z^{n+1}}$$

В полярных координатах:

$$\frac{1}{2i\pi}\oint_{|z|=\rho}\left(1+\frac{z}{r}\right)^r \frac{dz}{z^{n+1}} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(1+\frac{\rho e^{i\theta}}{r}\right)^r \frac{d\theta}{\rho^n e^{in\theta}}$$

Перепишем интеграл в таком виде:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{r\ln\left(1+\frac{\rho e^{i\theta}}{r}\right)-n\ln\rho-in\theta}d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{f(\rho e^{i\theta})}d\theta,$$

$$f(z)=r\ln\left(1+\frac{z}{r}\right)-n\ln z,\quad z=\rho e^{i\theta};$$

Далее, выберем ρ таким, чтобы точка $z=\rho e^{i\theta}\big|_{\theta=0}=\rho$ была седловой точкой. То есть $f'(z)\big|_{z=\rho}=0,\ f''(z)\big|_{z=\rho}\neq 0$ (простая седловая точка).

Тогда $f(\rho e^{i\theta})=f(\rho)-\frac{1}{2}\beta(\rho)\theta^2+O(\theta^3)$ для $|\theta|<\delta$ (разложение Тейлора) (выбор параметра δ будет показан ниже), где $\beta(\rho)=\rho^2\left[\left(\frac{d}{dz}\right)^2 f(z)\right]\Bigg|_{z=\rho}$.

Отсюда интеграл по части окружности $|z|=\rho$ можно представить:

$$\int_{-\delta}^{\delta} e^{f(\rho e^{i\theta})}d\theta=e^{f(\rho)}\int_{-\delta}^{\delta} e^{-\frac{1}{2}\beta(\rho)\theta^2+O(\theta^3)}d\theta=\frac{e^{f(\rho)}}{\sqrt{\beta(\delta)}}\int_{-\delta\sqrt{\beta(\rho)}}^{\delta\sqrt{\beta(\rho)}} e^{-\frac{1}{2}u^2+O(u^3)}du\underset{\beta(\rho)\to\infty}{\to}\frac{e^{f(\rho)}}{\sqrt{\beta(\delta)}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}u^2}du=$$

$$=\sqrt{2\pi}\,\frac{e^{f(\rho)}}{\sqrt{\beta(\delta)}}.$$

Заметим, что здесь важно, что $\beta(\rho)\to\infty$.

Выбор δ должен быть таким, чтоб «хвосты» оставшегося интеграла удовлетворяли:

$$\int_{-\pi}^{-\delta} e^{f(\rho e^{i\theta})}d\theta=o\left(\int_{-\delta}^{\delta} e^{f(\rho e^{i\theta})}d\theta\right);\quad \int_{\delta}^{\pi} e^{f(\rho e^{i\theta})}d\theta=o\left(\int_{-\delta}^{\delta} e^{f(\rho e^{i\theta})}d\theta\right);$$

Тогда будет справедливо асимптотическое приближение исходного интеграла:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{f(\rho e^{i\theta})}d\theta\approx\frac{e^{f(\rho)}}{\sqrt{2\pi\beta(\rho)}}.$$

В нашей задаче уравнение на седловую точку принимает вид:

$$f'(z)\big|_{z=\rho}=0,\ f(z)=r\ln\left(1+\frac{z}{r}\right)-n\ln z\Rightarrow\frac{r}{r+\rho}=\frac{n}{\rho}\Rightarrow\rho=\frac{nr}{r-n}=\frac{tr}{\sqrt{r}-t}.$$

Далее

$$\beta(\rho)=\rho^2\left[\left(\frac{d}{dz}\right)^2 f(z)\right]\Bigg|_{z=\rho}=n\left(1-\frac{n}{r}\right)\overset{n=t\sqrt{r}}{=}t\sqrt{r}\left(1-\frac{t}{\sqrt{r}}\right)=t\sqrt{r}-t^2\underset{r\to\infty}{\to}\infty$$

$$e^{f(\rho)}=e^{-n\ln n-(r-n)\ln\left(1-\frac{n}{r}\right)}=\frac{1}{n^n}\left(1-\frac{n}{r}\right)^{-(r-n)}=\frac{1}{n^n}\left(1-\frac{n}{r}\right)^{-\frac{r}{n}(n-\frac{n^2}{r})}\approx\frac{e^{n-\frac{n^2}{r}}}{n^n}=\left(\frac{e}{n}\right)^n e^{-\frac{n^2}{r}}$$

$$n!\frac{e^{f(\rho)}}{\sqrt{2\pi\beta(\rho)}}=n!\left(\frac{e}{n}\right)^n e^{-\frac{n^2}{r}}\frac{1}{\sqrt{2\pi n\left(1-\frac{n}{r}\right)}}\approx\cancel{n!\frac{1}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}}e^{-\frac{n^2}{r}}\frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{n}{r}\right)}}\overset{n=t\sqrt{r}}{=}e^{-\frac{t^2}{2}}\frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{t}{\sqrt{r}}\right)}}\underset{r\gg 1}{\to}e^{-\frac{t^2}{2}}$$

То есть $P\left\{X>t\sqrt{r}\right\}\sim e^{-\frac{t^2}{2}}$.

Соответственно

$$P\left\{X=t\sqrt{r}\right\}=t\sqrt{r}\left.\frac{dP\left\{X<x\right\}}{dx}\right|_{x=t\sqrt{r}}\sim -t\sqrt{r}\left.\frac{de^{-\frac{x^2}{2r}}}{dx}\right|_{x=t\sqrt{r}}=t\sqrt{r}\left.\left(\frac{x}{r}e^{-\frac{x^2}{2r}}\right)\right|_{x=t\sqrt{r}}=\frac{1}{\sqrt{r}}te^{-\frac{t^2}{2}}$$

Задача. («двойственная» задача относительно парадокса дня рождений) Сколько в среднем должно быть студентов на потоке, чтобы каждый день в течение всего года находился хотя бы один студент, празднующий в этот день свой день рождения. (или в терминах отображения $[1..n]\to[1..r]$, при каком n отображение будет сюръективным.)

Ответ: 2365

Задача (со ссылкой на задачу из задания про заключенных и задачу Вершика о подсчете среднего числа циклов длины r)

1)Доказать, что среднее число циклов в случайной перестановке длины n, имеющих длину от $\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil$ до n рано $\sum_{r=\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil}^{n}\frac{1}{r}\underset{n\to\infty}{\to}\ln 2$.

2) Доказать, что вероятность того, что в случайной перестановке из n элементов есть только циклы длины от $\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil$ до n рано $\sum_{r=\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil}^{n}\frac{1}{r}\underset{n\to\infty}{\to}\ln 2$.

Задачи на метод перевала

(числа Каталана)