1999–2000 учебный год

Задачи для I курса

1. Дано семейство $F = \{A \subset \mathbb{N} \mid \#A < \infty\}$ такое, что $A \cap B \neq \varnothing$ для любых A и B из F.

   Верно ли, что всегда найдётся такое конечное множество $X \subset \mathbb{N}$, что $A \cap B \cap X \neq \varnothing$ для любых A и B из F?

2. Пусть $f \in C[0,1]$ и $\forall\, x, y \in [0,1]$ выполняется неравенство $xf(y) + yf(x) \leqslant 1$. Доказать, что
$$\int_0^1 f(x)\,dx \leqslant \frac{\pi}{4}\,.$$

3. ’уществует ли такая биекция $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, что
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi(n)}{n^2} < \infty?$$

4. Пусть невырожденная матрица M порядка $2n$ и обратная матрица M^{-1} разбиты на квадратные блоки:
$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \qquad M^{-1} = \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix}.$$
   Доказать, что $\det M \cdot \det H = \det A$.

5. Пусть L — вещественное линейное пространство, $\dim L = 10$, L_1 и L_2 — подпространства L, $L_1 \subset L_2$, $\dim L_1 = 3$, $\dim L_2 = 6$. Пусть $\mathcal{E}$ — пространство тех линейных преобразований L, для которых L_1 и L_2 являются инвариантными подпространствами. Найти размерность пространства $\mathcal{E}$.

6. Пусть $P(x)$ — многочлен степени n с вещественными коэффициентами, имеющий только вещественные корни. Доказать, что
$$(n-1)(P'(x))^2 \geqslant nP(x)P''(x)$$
   для любого $x \in \mathbb{R}$.

Задачи для II–VI курсов

1. Дано семейство $F = \{A \subset \mathbb{N} \mid \#A < \infty\}$ такое, что $A \cap B \neq \varnothing$ для любых A и B из F.

   Верно ли, что всегда найдётся такое конечное множество $X \subset \mathbb{N}$, что $A \cap B \cap X \neq \varnothing$ для любых A и B из F?

2. Пусть $f \in C[0,1]$ и $\forall\, x, y \in [0,1]$ выполняется неравенство $xf(y) + yf(x) \leqslant 1$. Доказать, что
$$\int_0^1 f(x)\,dx \leqslant \frac{\pi}{4}\,.$$

3. ’уществует ли такая биекция $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, что
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi(n)}{n^2} < \infty?$$

4. Пусть невырожденная матрица M порядка $2n$ и обратная матрица M^{-1} разбиты на квадратные блоки:
$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \qquad M^{-1} = \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix}.$$
   Доказать, что $\det M \cdot \det H = \det A$.

5. Пусть L — вещественное линейное пространство, $\dim L = 10$, L_1 и L_2 — подпространства L, $L_1 \subset L_2$, $\dim L_1 = 3$, $\dim L_2 = 6$. Пусть $\mathcal{E}$ — пространство тех линейных преобразований L, для которых L_1 и L_2 являются инвариантными подпространствами. Найти размерность пространства $\mathcal{E}$.

6. Пусть $P(x)$ — многочлен степени n с вещественными коэффициентами, имеющий только вещественные корни. Доказать, что
$$(n-1)(P'(x))^2 \geqslant nP(x)P''(x)$$
   для любого $x \in \mathbb{R}$.

Решения задач

1. Нет. Пусть $A_n = \{1, 2, \ldots, 2n-3, 2n-1, 2n\}$, $B_n = \{2, 4, \ldots, 2n-2, 2n, 2n+1\}$, $F = \{A_1, B_1, A_2, B_2, \ldots\}$. ’огда $A_k \cap M_m = \begin{cases} \{2k\}, & \text{если } m \geqslant k, \\ \{2m+1\}, & \text{если } m < k. \end{cases}$

2. $I = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^{\pi/2} f(\sin\varphi)\cos\varphi\,d\varphi = \int_0^{\pi/2} f(\cos\varphi)\sin\varphi\,d\varphi$. Отсюда следует, что $2I = \int_0^{\pi/2} (\cos\varphi \cdot f(\sin\varphi) + \sin\varphi \cdot f(\cos\varphi))\,d\varphi \leqslant \int_0^{\pi/2} d\varphi = \frac{\pi}{2}$.

3. Покажем, что $\sum_{n=N+1}^{3N} \frac{\pi(n)}{n^2} > \frac{1}{9}$ при $\forall\, N \geqslant 1$. ’реди $2N$ чисел $\pi(N+1), \ldots, \pi(3N)$ по крайней мере N чисел больше, чем N. ’ледовательно,
$$\sum_{n=N+1}^{3N} \frac{\pi(n)}{n^2} > \frac{1}{(3N)^n} \sum_{n=N+1}^{3N} \pi(n) > \frac{1}{9N^2} \cdot N \cdot N.$$

4. Пусть I — единичная матрица порядка n. ’огда, применяя правила умножения блочных матриц, получаем: $\det M\cdot\det H=\det\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}\cdot\det\begin{pmatrix}I&F\\0&H\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I&F\\0&H\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}A&0\\C&I\end{pmatrix}=\det A$.

5. Пусть $\{e_1,e_2,\ldots,e_{10}\}$ — такой базис в L_1, что $\{e_1,e_2,e_3\}$ — базис в L_1, $\{e_1,\ldots,e_6\}$ — базис в L_2. В этом базисе матрица преобразования из $\mathcal{E}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix}
* & * & * & * & * & * & * & * & * & *\\
* & * & * & * & * & * & * & * & * & *\\
* & * & * & * & * & * & * & * & * & *\\
0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * & * & *\\
0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * & * & *\\
0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * & * & *\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & *\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & *\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & *\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & *
\end{pmatrix}.$$

’ледовательно, $\dim\mathcal{E}=3\cdot3+3\cdot6+4\cdot10=67$.

6. Достаточно доказать неравенство при $n>1$ и $x\neq x_i$, где $x_1,\ldots,x_n$ — корни многочлена $P(x)$. Имеем:

$$\frac{P'(x)}{P(x)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x-x_i}\,,\qquad \frac{P''(x)}{P(x)}=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\frac{2}{(x-x_i)(x-x_j)}\,.$$

’ледовательно,

$$\begin{aligned}
(n-1)\left(\frac{P'(x)}{P(x)}\right)^2-n\frac{P''(x)}{P(x)} &= (n-1)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x-x_i}\right)^2-\\
&\qquad -n\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\frac{2}{(x-x_i)(x-x_j)}=\\
&= \sum_{i=1}^{n}\frac{n-1}{(x-x_i)^2}-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\frac{2}{(x-x_i)(x-x_j)}=\\
&= \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\left(\frac{1}{x-x_i}-\frac{1}{x-x_j}\right)^2\geqslant 0.
\end{aligned}$$