

НЕРАВНОВЕСНАЯ СТАТИСТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Программа курса по выбору для V курса
(МФТИ)

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебной работе

Ю.А.Самарский

17 мая 2005 г.

ПРОГРАММА

по курсу ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

по направлению 511600

факультет: ВСЕ ФАКУЛЬТЕТЫ

кафедра теоретической физики

курс V

семестр 9

лекции 34 часа

Экзамен – 9 семестр

практические (семинарские)

занятия 34 часа

Зачет – нет

лабораторные занятия – нет

Самостоятельная работа–

2 часа в неделю

ВСЕГО ЧАСОВ 68

Программу и задание составили:

д.ф.-м.н., проф. В.Н. Горелкин и

д.ф.-м.н., проф. Р.О. Зайцев

Программа обсуждена на заседании

кафедры теоретической физики

27 мая 2005 года



Заведующий кафедрой

Ю.М. Белоусов

НЕРАВНОВЕСНАЯ СТАТИСТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

А. Классическая теория

I. Уравнение Больцмана

Функция распределения. Законы сохранения. H-теорема. Равновесное и локально-равновесное распределение.

5-моментное приближение. Линеаризованное уравнение

Больцмана. Схема метода Чепмена–Энскога. τ -приближение.

Сдвиговая вязкость и теплопроводность в τ -приближении.

Звук в вязкой жидкости.

Уравнение для лёгких частиц в тяжелом газе. Кинетические коэффициенты. Плотность источников энтропии.

II. Кинетические уравнения Фоккера–Планка

Общий вид уравнений типа Фоккера–Планка. Интеграл

столкновений в форме Ландау. Примеры уравнений типа

Фоккера–Планка. Уравнение Ланжевена.

III. Кинетическое уравнение для лёгких частиц в тяжелом газе

Коэффициенты переноса в τ -приближении. Плотность источников тепла.

IV. Уравнение Власова

Диэлектрическая проницаемость максвелловской плазмы.

Затухание Ландау. Ионный звук. Флуктуации полей. Дебаевские

поправки к термодинамическим потенциалам.

V. Установление равновесия в ионизованных газах

Кольцевое суммирование. Уравнение Балеску–Леннарда.

Термодинамические свойства при низкой температуре.

Б. Квантовая теория

VI. Диаграммная техника для неравновесных процессов

Запаздывающая, причинная и опережающая функции Грина. Квантовомеханическое усреднение двухкомпонентных временных функций Грина. Система уравнений Келдыша и переход к уравнениям для функции распределения.

VII. Уравнения Каданова–Бейма

Аппроксимация Хартри и уравнение Больцмана. Обобщённое уравнение Больцмана. Квазиравновесные явления и распространение звука.

VIII. Флуктуационно-диссипативная теорема

Формулы Кубо для линейного отклика. Соотношения Каллена–Вельтона. Флуктуационно-диссипационная теорема для ток-токового коррелятора. Формула Найквиста. Белый шум.

IX. Уравнения Блоха

Феноменологический вывод уравнений Блоха. Корреляторы компонент магнитных моментов. Дельта-коррелированность случайных магнитных полей в уравнениях Блоха. Вывод уравнений Блоха методом случайных траекторий. Понятие об ортогональных операторах.

X. Диффузионные процессы при низкой температуре

Уравнения электродинамики в металлах. Аномальный скин-эффект и эффект Кондо. Диффузоны, купероны и теплопроводностные моды. Соотношение Эйнштейна. Вычисление четырёхтоковых корреляторов. Понятие о $1/f$ -шумах.

XI. Неравновесные процессы в сверхпроводниках

Вычисление аномальных функций Грина. Квантовая теория туннельного эффекта. Туннельный ток между сверхпроводником и нормальным металлом. Микроскопическая теория эффекта Джозефсона.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Статистическая физика. Ч. 1. – М.: Наука, 1995.
2. *Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П.* Статистическая физика. Ч. 2. – М.: Наука, 1978.
3. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Физическая кинетика. – М.: Наука, 2001.
4. *Абрикосов А.А.* Основы теории металлов. – М.: Наука, 1987.
5. *Кубо Р.* Статистическая механика. – М.: Мир, 1967.
6. *Каданов Л., Бейм Г.* Квантовая статистическая механика. – М.: Мир, 1964.
7. *Балеску Р.* Равновесная и неравновесная статистическая механика. – М.: Мир, 1978.
8. *Горелкин В.Н., Минеев В.П.* Введение в физическую кинетику: Учеб. пособие. – М.: МФТИ, 1989.
9. *Зайцев Р.О., Орлов В.Г.* Теория высокотемпературной сверхпроводимости: Учеб. пособие. – М.: МФТИ, 1993.
10. *Горелкин В.Н., Минеев В.П.* Дополнительные главы физической кинетики: Учеб. пособие. – М.: МФТИ, 1990.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ И ПОНЯТИЯ

I. Кинетика газа

Функция распределения $f(t, \mathbf{v}, \mathbf{r})$:

$$\int f(t, \mathbf{v}, \mathbf{r}) d\mathbf{v} = n(t, \mathbf{r}) \equiv n, \quad \int \mathbf{v} f(t, \mathbf{v}, \mathbf{r}) d\mathbf{v} = n \langle \mathbf{v} \rangle = n \mathbf{V} = \mathbf{j}.$$

Среднее любой одночастичной величины $a(t, \mathbf{v}, \mathbf{r})$:

$$\frac{\int a(t, \mathbf{v}, \mathbf{r}) f(t, \mathbf{v}, \mathbf{r}) d\mathbf{v}}{\int f(t, \mathbf{v}, \mathbf{r}) d\mathbf{v}} = \langle a \rangle \quad \text{или} \quad \int a(t, \mathbf{v}, \mathbf{r}) f(t, \mathbf{v}, \mathbf{r}) d\mathbf{v} = n \langle a \rangle.$$

Тепловая скорость $\mathbf{u} = \mathbf{v} - \langle \mathbf{v} \rangle = \mathbf{v} - \mathbf{V}$.

$$\text{Плотность внутренней энергии } \rho_E = nm \left\langle \frac{u^2}{2} \right\rangle,$$

$$\text{потока тепла } Q_k = nm \left\langle u^2 u_k / 2 \right\rangle.$$

$$\text{Тензор давлений } \Pi_{ik} = nm \langle u_i u_k \rangle.$$

Уравнение Больцмана:

$$\widehat{L}f = \frac{\partial f}{\partial t} + v_i \frac{\partial f}{\partial r_i} + \frac{F_i}{m} \frac{\partial f}{\partial v_i} = \widehat{I}_{cm} f;$$

$$\widehat{I}f = \iiint W(1,2;1',2') \{f(1')f(2') - f(1)f(2)\} dv_2 dv_1' dv_2';$$

$$\frac{\partial \langle na \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \langle n v_i a \rangle}{\partial r_i} = n \langle \widehat{L}a \rangle + \int a \widehat{I}_{cm} f d\mathbf{v}.$$

Субстанциональная производная $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \nabla$.

$$\text{H-теорема: } \frac{\partial}{\partial t} \langle ns \rangle + \text{div} \langle vns \rangle = q^s > 0,$$

$$s = -\ln(f/e), \quad q^s = -\int \ln(f/e) \widehat{I}_{cm} f d\mathbf{v}.$$

Гидродинамическая форма законов сохранения:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} n \\ V_i \\ \frac{u^2}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\operatorname{div} \mathbf{V} \\ -\frac{1}{nm} \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial r_k} + \frac{F_i}{m} \\ -\frac{1}{nm} \frac{\partial Q_k}{\partial r_k} - \frac{\Pi_{ik}}{mn} \frac{\partial V_i}{\partial r_k} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} &\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div}(n\mathbf{V}) = 0 \\ &\Rightarrow \text{второй закон Ньютона} \\ &\Rightarrow \frac{dE}{dt} = T \frac{dS}{dt} - p \frac{dV}{dt} \end{aligned}$$

Локально-равновесная функция распределения (ЛРР):

$$f_0 = n \left(\frac{m}{2\pi T} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{m(\mathbf{v} - \mathbf{V})^2}{2T} \right],$$

$$m \frac{\langle u^2 \rangle_0}{2} = \frac{3}{2} T, \quad \Pi_{ik}^0 = nT\delta_{ik}.$$

Линеаризованное уравнение Больцмана: $f = f_0(1 + \chi)$,

$$\hat{L} \ln f_0 = \iint \{ \chi(1') + \chi(2') - \chi(1) - \chi(2) \} f_0(2) |v_{12}| d\sigma dv_2,$$

$$\hat{L} \ln f_0 = \frac{m}{T} \left\{ u_i u_k - \frac{\delta_{ik}}{3} u^2 \right\} \frac{\partial V_i}{\partial r_k} + \left\{ \frac{mu^2}{2} - \frac{5}{2} \right\} \frac{u_k}{T} \frac{\partial T}{\partial r_k},$$

в τ -приближении для однокомпонентного газа

$$I_{cm} f = \frac{f - f_0}{\tau}, \quad f = f_0 - \tau \hat{L} f_0,$$

$$\Pi_{ik} = nT\delta_{ik} - \eta \left[\frac{\partial V_i}{\partial r_k} + \frac{\partial V_k}{\partial r_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial V_l}{\partial r_l} \right],$$

$$Q_i = -\kappa \frac{\partial T}{\partial r_i}, \quad \eta = nT\tau, \quad \kappa = \frac{5}{2} \frac{nT\tau}{m}.$$

II. τ -приближение для легких частиц в тяжелом газе

$f = f_0 - \tau \widehat{L} f_0^0$, где f_0^0 – ЛРР при $\mathbf{V} = 0$.

$$\tau^{-1} = nv\sigma_{tr} = nv\pi \int_0^\pi (1 - \cos\theta)\sigma(\theta)d\theta.$$

Проводимость металлов

$$\sigma = \frac{e^2 N \tau_{tr}}{m} \sim \begin{cases} \frac{1}{T}, & T \gg \Theta_D \\ \frac{1}{T^5}, & T \ll \Theta_D \end{cases}$$

Теплопроводность металлов

$$\kappa = \frac{\pi^2 N T \tau_{tr}}{3m} \sim \begin{cases} \text{const}, & T \gg \Theta_D \\ \frac{1}{T^2}, & T \ll \Theta_D \end{cases}$$

Закон Видемана–Франца при $T \gg \Theta_D$

$$\frac{\kappa}{\sigma} = \frac{\pi^2 T}{3e^2}.$$

III. Общий вид потоков в феноменологической гидродинамике

$$\Pi_{ik} = p\delta_{ik} - \eta \left[\frac{\partial V_i}{\partial r_k} + \frac{\partial V_k}{\partial r_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial V_l}{\partial r_l} \right] - \eta'' \delta_{ik} \frac{\partial V_l}{\partial r_l},$$

$$Q_i = -\kappa \frac{\partial T}{\partial r_i}, \quad \mathbf{J} = \rho \mathbf{V}.$$

Скорость диссипации механической энергии: $\varepsilon = -Tq^s$,

$$q^s = -\frac{1}{T} (\Pi_{ik} - p\delta_{ik}) \frac{\partial V_i}{\partial r_k} + Q_k \frac{\partial}{\partial r_k} \left(\frac{1}{T} \right).$$

Звук в газе (жидкости): $\omega = ck$, $c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_S = \frac{c_p}{c_V} \frac{T}{M}$,

$$2\gamma = \frac{\omega^2}{c^3 \rho} \left(\frac{4}{3} \eta' + \eta'' + \frac{\kappa m}{c_p c_v} \right).$$

IV. Уравнения Фоккера–Планка–Ландау

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial s_\alpha}{\partial p_\alpha} = 0,$$

где для уравнения Фоккера–Планка

$$s_\alpha = -A_\alpha f - \frac{\partial}{\partial p_\beta} (B_{\alpha\beta} f),$$

$$A_\alpha = \int q_\alpha w(\mathbf{p}, \mathbf{q}) d\mathbf{q}, \quad B_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \int q_\alpha q_\beta w(\mathbf{p}, \mathbf{q}) d\mathbf{q},$$

где для уравнения Ландау

$$s_\alpha = \sum_b \int \left[f_a(\mathbf{p}) \frac{\partial f_b(\mathbf{p}')}{\partial p_\beta} - f_b(\mathbf{p}') \frac{\partial f_a(\mathbf{p})}{\partial p_\beta} \right] C_{\alpha\beta} d\mathbf{p}',$$

$$C_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} C \left[\delta_{\alpha\beta} - \frac{(v_\alpha - v'_\alpha)(v_\beta - v'_\beta)}{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|^2} \right].$$

В общем случае

$$C = C_{\alpha\alpha} = \frac{1}{2} \int q^2 |\mathbf{v} - \mathbf{v}'| d\sigma.$$

Для кулоновского газа интеграл столкновений Ландау определяется интегралом Балеску–Леннарда:

$$C_{\alpha\beta} = 2(e_a e_b)^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{k \leq k_{\max}} \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}') \frac{k_\alpha k_\beta d\mathbf{k}}{k^4 |\epsilon_l(\omega, k)|^2}.$$

V. Матрица плотности Вигнера $\rho(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$

$$n(t, \mathbf{R}, \mathbf{p}) = \int e^{-i\mathbf{p}\mathbf{r}} \rho \left(t, \mathbf{R} + \frac{\mathbf{r}}{2}, \mathbf{R} - \frac{\mathbf{r}}{2} \right) d\mathbf{r},$$

$$N_{\mathbf{p}} = \int n(t, \mathbf{R}, \mathbf{p}) d\mathbf{R},$$

$$N(t, \mathbf{R}) = \int n(t, \mathbf{R}, \mathbf{p}) d\mathbf{p} = \rho(t, \mathbf{R}, \mathbf{R}).$$

VI. Квантовое кинетическое уравнение

$$G = \begin{pmatrix} G^{--} & G^{-+} \\ G^{+-} & G^{++} \end{pmatrix},$$

$$G_{\alpha\beta}^{-+}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = i \langle \Psi_{\beta}^{+}(\mathbf{r}', t') \Psi_{\alpha}(\mathbf{r}, t) \rangle,$$

$$G_{\alpha\beta}^{+-}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = -i \langle \Psi_{\alpha}(\mathbf{r}, t) \Psi_{\beta}^{+}(\mathbf{r}', t') \rangle,$$

$$G_{\alpha\beta}^{--}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = \theta(t-t') G_{\alpha\beta}^{+-}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') + \theta(t'-t) G_{\alpha\beta}^{-+}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t'),$$

$$G_{\alpha\beta}^{++}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = \theta(t-t') G_{\alpha\beta}^{-+}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') + \theta(t'-t) G_{\alpha\beta}^{+-}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t').$$

$$n(t, \mathbf{R}, \mathbf{p}) = -i \int G_{\omega, \mathbf{p}}^{-+}(t, \mathbf{R}) \frac{d\omega}{2\pi},$$

$$G_{\omega, \mathbf{p}}^{-+}(t, \mathbf{R}) = \int e^{i\omega\tau - i\mathbf{p}\mathbf{r}} G_{\omega, \mathbf{p}}^{-+} \left(t + \frac{\tau}{2}, \mathbf{R} + \frac{\mathbf{r}}{2}; t - \frac{\tau}{2}, \mathbf{R} - \frac{\mathbf{r}}{2} \right) d\mathbf{r} d\tau.$$

$$[\widehat{G}^0(0,1)]^{-1} \widehat{G}(1,2) = \widehat{\tau}_z \delta^{(4)}(X_1 - X_2) + \int \widehat{\tau}_z \widehat{\Sigma}(1,3) \widehat{G}(3,2) d^4 X_3,$$

$$[\widehat{G}_*^0(0,2)]^{-1} \widehat{G}(1,2) = \widehat{\tau}_z \delta^{(4)}(X_1 - X_2) + \int \widehat{G}(1,3) \widehat{\Sigma}(3,2) \widehat{\tau}_z d^4 X_3,$$

$$[\widehat{G}_*^0(0,2)]^{-1} - [\widehat{G}^0(0,1)]^{-1} = -i \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{m} \nabla_{\mathbf{r}} \nabla_{\mathbf{R}} \right).$$

В отсутствие внешних полей и взаимодействий:

$$\begin{aligned} \widehat{G}_{\omega}^0(\mathbf{p}) = & \\ = & \left(\begin{array}{cc} \frac{1-n_F(\xi_{\mathbf{p}})}{\omega-\xi_{\mathbf{p}}+i\delta} + \frac{n_F(\xi_{\mathbf{p}})}{\omega-\xi_{\mathbf{p}}-i\delta} & 2\pi i n_F(\xi_{\mathbf{p}})\delta(\omega-\xi_{\mathbf{p}}) \\ -2\pi i(1-n_F(\xi_{\mathbf{p}}))\delta(\omega-\xi_{\mathbf{p}}) & -\frac{1-n_F(\xi_{\mathbf{p}})}{\omega-\xi_{\mathbf{p}}-i\delta} - \frac{n_F(\xi_{\mathbf{p}})}{\omega-\xi_{\mathbf{p}}+i\delta} \end{array} \right). \end{aligned}$$

VII. Уравнения Максвелла для металла или полупроводника

$$\operatorname{div} \mathbf{e} = 4\pi\rho = \kappa^2(\psi - \varphi), \quad \operatorname{rot} \mathbf{h} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j},$$

$$\mathbf{e} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{j} = \sigma \left(-\nabla\psi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right),$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + D \left(\Delta\psi + \frac{1}{c} \operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right), \quad \mathbf{h} = \operatorname{rot} \mathbf{A}.$$

Соотношение Эйнштейна:

$$\kappa^2 D = 4\pi\sigma.$$

Формулы, предполагающиеся известными из предшествующих курсов

1. "Золотое" правило Ферми:

$$dw_{fi} = \frac{2\pi}{\hbar} |F_{fi}|^2 \delta(E_i - E_j).$$

2. Формула Сохоцкого:

$$\frac{1}{z-i\Delta} = P \frac{1}{z} + i\pi\delta(z); \quad \Delta > 0, \quad \Delta \rightarrow 0+.$$

3. Представление Гейзенберга:

$$\widehat{A}_t = e^{i\widehat{H}t/\hbar} \widehat{A}^{sh}(t) e^{-i\widehat{H}t/\hbar},$$

$$-i\hbar \frac{d\hat{A}_t}{dt} = -i\hbar \frac{\partial \hat{A}_t}{\partial t} + [\hat{H}_t, \hat{A}_t].$$

4. Вторичное квантование бозе-частиц со спином 0.

Ненулевые матричные элементы:

$$\begin{aligned} & \left\langle \dots (N_{\mathbf{p}}) \dots \left| \hat{b}_{\mathbf{p}}^+ \right| \dots (N_{\mathbf{p}} - 1) \dots \right\rangle = \\ & = \left\langle \dots (N_{\mathbf{p}} - 1) \dots \left| \hat{b}_{\mathbf{p}} \right| \dots (N_{\mathbf{p}}) \dots \right\rangle = \sqrt{N_{\mathbf{p}}}. \end{aligned}$$

Перестановочные соотношения:

$$\begin{aligned} & \left[\hat{b}_{\mathbf{p}}, \hat{b}_{\mathbf{p}'} \right] = \hat{b}_{\mathbf{p}} \hat{b}_{\mathbf{p}'} - \hat{b}_{\mathbf{p}'} \hat{b}_{\mathbf{p}} = \left[\hat{b}_{\mathbf{p}}^+, \hat{b}_{\mathbf{p}'}^+ \right] = 0, \\ & \left[\hat{b}_{\mathbf{p}}, \hat{b}_{\mathbf{p}'}^+ \right] = \delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}. \end{aligned}$$

5. Вторичное квантование фермионов со спином $\frac{1}{2}$.

Ненулевые матричные элементы:

$$\begin{aligned} & \left\langle \dots (n_{\sigma\mathbf{p}} = 1) \dots \left| \hat{a}_{\mathbf{p}}^+ \right| \dots (n_{\sigma\mathbf{p}} = 0) \dots \right\rangle = \\ & = \left\langle \dots (n_{\sigma\mathbf{p}} = 0) \dots \left| \hat{a}_{\mathbf{p}} \right| \dots (n_{\sigma\mathbf{p}} = 1) \dots \right\rangle = (-1)^{\nu_{\sigma\mathbf{p}}}. \end{aligned}$$

Здесь $\sigma = \pm 1$, $\nu_{\sigma\mathbf{p}} = \sum_{k=1}^{t-1} n_k$, где t – номер состояния

(σ, \mathbf{p}) , $(t-1)$ – номер состояния, предыдущего по счету.

Перестановочные соотношения:

$$\begin{aligned} & \left\{ \hat{a}_{\sigma\mathbf{p}}, \hat{a}_{\sigma'\mathbf{p}'} \right\} = \hat{a}_{\sigma\mathbf{p}} \hat{a}_{\sigma'\mathbf{p}'} + \hat{a}_{\sigma'\mathbf{p}'} \hat{a}_{\sigma\mathbf{p}} = \left\{ \hat{a}_{\sigma\mathbf{p}}^+, \hat{a}_{\sigma'\mathbf{p}'}^+ \right\} = 0, \\ & \left\{ \hat{a}_{\sigma\mathbf{p}}, \hat{a}_{\sigma'\mathbf{p}'}^+ \right\} = \delta_{\sigma, \sigma'} \delta_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'}. \end{aligned}$$

Операторы квантованного поля (нерелятивистское приближение):

$$\hat{\Psi}_{\sigma}(\vec{\mathbf{r}}) = \sum_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\sigma\mathbf{p}} \varphi_{\sigma}(\mathbf{r}), \quad \hat{\Psi}_{\sigma}^+(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\sigma\mathbf{p}}^+ \varphi_{\sigma}^*(\mathbf{r}).$$

Перестановочные соотношения:

$$\{\widehat{\psi}_\sigma(\mathbf{r}), \widehat{\psi}_{\sigma'}(\mathbf{r}')\} = 0, \quad \left\{ \widehat{\psi}_\sigma^+(\mathbf{r}), \widehat{\psi}_{\sigma'}^+(\mathbf{r}') \right\} = 0,$$

$$\left\{ \widehat{\psi}_\sigma(\mathbf{r}), \widehat{\psi}_{\sigma'}^+(\mathbf{r}') \right\} = \delta_{\sigma\sigma'} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}').$$

6. Взаимодействие электронов во вторичном квантовании

Оператор числа частиц:

$$\widehat{N} = \sum_{\sigma} \int \widehat{\psi}_{\sigma}^+(\mathbf{r}) \widehat{\psi}_{\sigma}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \sum_{\mathbf{p}, \sigma = \pm} \widehat{a}_{\sigma, \mathbf{p}}^+ \widehat{a}_{\sigma, \mathbf{p}}.$$

Гамильтониан невзаимодействующих электронов:

$$\widehat{H}_0 = \frac{1}{2m} \sum_{\sigma, k} \int \left(\widehat{p}_k \widehat{\psi}_{\sigma}(\mathbf{r}) \right)^+ \widehat{p}_k \widehat{\psi}_{\sigma}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} =$$

$$= \sum_{\mathbf{p}, \sigma} \frac{p^2}{2m} \widehat{a}_{\sigma, \mathbf{p}}^+ \widehat{a}_{\sigma, \mathbf{p}}.$$

7. Нерелятивистское взаимодействие с внешним полем $U(\mathbf{r})$:

$$\widehat{U} = \sum_{\sigma} \int \widehat{\psi}_{\sigma}^+(\mathbf{r}) U(\mathbf{r}) \widehat{\psi}_{\sigma}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} =$$

$$= \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'} U_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} \sum_{\sigma} \widehat{a}_{\sigma, \mathbf{p}}^+ \widehat{a}_{\sigma, \mathbf{p}'}.$$

Нерелятивистское электрон-электронное взаимодействие:

$$\widehat{V} = \frac{1}{2} \sum_{\sigma_1, \sigma_2} \iint \widehat{\psi}_{\sigma_1}^+(\mathbf{r}_1) \widehat{\psi}_{\sigma_2}^+(\mathbf{r}_2) \varphi(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \widehat{\psi}_{\sigma_2}(\mathbf{r}_2) \widehat{\psi}_{\sigma_1}(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 =$$

$$= \frac{1}{2V} \sum_{\substack{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4 \\ \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4}} \Phi(\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1) \sum_{\sigma_1, \sigma_2} \widehat{a}_{\sigma_1, \mathbf{p}_1}^+ \widehat{a}_{\sigma_2, \mathbf{p}_2}^+ \widehat{a}_{\sigma_2, \mathbf{p}_4} \widehat{a}_{\sigma_1, \mathbf{p}_3}.$$

8. Гамильтонан БКШ:

$$\hat{V} = -(|g|/V) \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'} \hat{a}_{\mathbf{p}\uparrow}^+ \hat{a}_{\mathbf{p}\downarrow}^+ \hat{a}_{-\mathbf{p}\downarrow} \hat{a}_{\mathbf{p}\uparrow}.$$

9. Взаимодействие электронов с акустическими фононами ($\omega_q = c_l q \leq \tilde{\omega}$):

$$\hat{U} = w \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{q}, \sigma} \sqrt{\hbar \omega_q / 2V} \hat{a}_{\mathbf{p}+\mathbf{q}, \sigma}^+ \hat{a}_{\mathbf{p}, \sigma} (\hat{b}_{\mathbf{q}} + \hat{b}_{-\mathbf{q}}^+).$$

Задачи

1. Для однокомпонентного газа получить в τ -приближении явное выражение для коэффициентов теплопроводности и вязкости. Найти коэффициент Чепмена.
2. Воспользовавшись результатами задачи 1 и уравнениями Навье–Стокса, найти коэффициент затухания звука.
3. Вычислить время релаксации τ при рассеянии электронов на экранированной примеси в полупроводнике.
4. Для электронов в полупроводнике найти коэффициенты, определяющие ток и поток энергии. Записать коэффициент, определяющий поток тепла при отсутствии тока заряда (закон Видемана–Франца). Проверить выполнение соотношений Онсагера. Считать, что справедливы: τ -приближение, модель свободных электронов и бoльцмановская статистика и $\tau = A\nu^k$ ($k = 0, -1$).
5. Определить коэффициент диффузии тяжелой сферической частицы в газе. Рассмотреть случаи: а) $R \gg \lambda$, б) $R \ll \lambda$, где λ – длина свободного пробега молекулы газа.
6. Вычислить коэффициенты в уравнении типа Фоккера–Планка по энергии для легких частиц в тяжелом газе. Убедиться, что стационарное решение этого уравнения соответствует равновесной функции распределения.

7. Вычислить коэффициенты в кулоновском интеграле столкновений Ландау с учётом пространственной и временной дисперсии диэлектрической проницаемости. Выделить особенности, связанные с обменом плазмонами.
8. Определить скорость передачи энергии электронов к ионам двухкомпонентной однозарядной ($z_i = 1$) плазмы, считая разность температур электронов и ионов малой по сравнению с их суммой.
9. Определить закон дисперсии продольных и поперечных колебаний плазмы.
10. Проверить, что равновесные распределения Ферми и Бозе являются стационарными решениями квантового кинетического уравнения с парным взаимодействием.
11. Определить температурную и частотную зависимость времени жизни электронных возбуждений в низкотемпературном пределе.
12. В диффузионном приближении найти $\varepsilon'(\omega, k)$ и $\varepsilon''(\omega, k)$.
13. Используя выражение для диэлектрической проницаемости плазмы, определить явный вид интеграла столкновений Ландау, происходящего за счёт обмена плазмонами.
14. Записать для электрон-фононной системы кинетическое уравнение и убедиться, что равновесные распределения Ферми и Бозе являются стационарными решениями. Сформулировать и доказать H-теорему.
15. Используя электрон-фононный интеграл столкновений, определить явный вид температурной зависимости электро- и теплопроводности при высоких температурах. ($T \gg \Theta$). (Фононы считать равновесными).
16. Используя электрон-фононный интеграл столкновений, определить явный вид температурной зависимости

- сти электро- и теплопроводности при низких температурах $T \ll \Theta$. (Фононы считать равновесными).
17. Используя электрон-электронный интеграл столкновений, определить явный вид температурной зависимости электропроводности при очень низких температурах. ($T \ll \Theta \sqrt{\Theta / \varepsilon_F}$).
 18. Вычислить проводимость и коэффициент диффузии при $T = 0$ для неидеального металла со сферической поверхностью Ферми.
 19. С помощью уравнения Больцмана, записанного в τ приближении, найти комплексную проводимость σ_ω .
 20. С помощью уравнения Больцмана, записанного в τ приближении, найти квадратичный ток-токовый коррелятор. Определить спектральный состав токовых шумов и получить формулу Найквиста.
 21. При заданной диэлектрической проницаемости, с помощью ФДТ и уравнений Максвелла, определить спектральный состав флуктуаций электрического поля.
 22. Вычислить нестационарную поправку к уравнениям электростатики в металлах. Используя результаты предыдущей задачи, записать уравнение непрерывности для плотности электрического заряда. Записать соотношение Эйнштейна для металла.
 23. Используя контактное спин-спиновое взаимодействие, вычислить обратное время релаксации электрона на парамагнитных примесях с заданным спином S . Выделить низкотемпературную логарифмическую особенность (эффект Кондо).
 24. Используя кинетическое уравнение для металла в заданном поперечном электрическом поле ($\operatorname{div} \mathbf{e} = 0$) и при заданном обратном времени релаксации, получить интегральное соотношение между током и полем. Определить глубину проникновения для предельно чистого металла (аномальный скин-эффект).

25. Используя δ -образный вид взаимодействия с примесью, а также u - v -преобразование, определить температурную зависимость коэффициента теплопроводности сверхпроводника.
26. Используя уравнения движения в форме Гейзенберга, определить компоненты Фурье запаздывающей, опережающей и причинной функций Грина для электронов в металле при конечной температуре. В пределе $T \rightarrow 0$ установить связь с фейнмановской теорией позитрона.
27. Используя результаты предыдущей задачи в качестве нулевого приближения, определить все три функции Грина для неидеального металла, содержащего неподвижные примеси. Результаты выразить через обратное время релаксации по импульсу.
28. К контакту между двумя различными металлами приложена разность потенциалов V . Используя туннельный гамильтониан, вычислить величину тока через контакт.
29. Используя u - v -преобразование, а также уравнения движения Гейзенберга, записать нормальные и аномальные функции Грина для идеального сверхпроводника. Установить связь с теорией Л.П. Горькова.
30. Используя обобщённое u - v -преобразование с произвольной фазой, вычислить ток через контакт между двумя сверхпроводниками, между которыми отсутствует разность потенциалов (эффект Джозефсона).

Срок сдачи задания: 06.12–11.12 2005 г.

Подписано в печать 07.06.04. Формат 60×84 ¹/₁₆. Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 1,0. Уч.-изд. л. 1,0. Тираж 60 экз. Заказ N Ф-221

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Московский физико-технический институт (государственный университет)
Отдел автоматизированных издательских систем “ФИЗТЕХ-ПОЛИГРАФ”
141700, Моск. обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9