1996–1997 учебный год

Задачи для I курса

1. Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — положительные числа. Доказать, что многочлен
$$x^n - a_1 x^{n-1} - \ldots - a_n$$
имеет ровно один положительный корень.

2. Найти объём сечения четырёхмерного куба
$$\{x \in \mathbb{R}^4 \mid 0 \leqslant x_k \leqslant 1,\ k = \overline{1,4}\}$$
гиперплоскостью $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2$.

3. Доказать, что $\forall \varepsilon > 0$ найдутся натуральное число n и числа $a_1, \ldots, a_n$ такие, что
$$\max_{x \in [0,1]} \left| x - \sum_{k=1}^{n} a_k x^{2k+1} \right| < \varepsilon.$$

4. Касательные к параболе $y^2 = 2px$ в точках A, B, C образуют треугольник KLM. Доказать, что
$$S_{KLM} = \frac{1}{2} S_{ABC}.$$

5. Пусть $f \in C^1[0,1]$. Доказать неравенство
$$\left| f\left(\frac{1}{2}\right) \right| \leqslant \int\limits_0^1 |f(x)|\, dx + \frac{1}{2} \int\limits_0^1 |f'(x)|\, dx.$$

6. Пусть $A(x)$ — квадратная матрица порядка $2n+1$, определённая на интервале $(0,1)$. Известно, что $\det A(x) \equiv 1$ и для любой постоянной матрицы B существует предел
$$\lim_{x \to +0} A(x) B A^{-1}(x).$$
Доказать, что существуют пределы
$$\lim_{x \to +0} A(x) \qquad \lim_{x \to +0} A^{-1}(x).$$

Задачи для II–VI курсов

1. Найти объём сечения четырёхмерного куба

$$\{x \in \mathbb{R}^4 \mid 0 \leqslant x_k \leqslant 1,\ k = \overline{1,4}\}$$

гиперплоскостью $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2$.

2. Доказать, что

$$\lim_{x \to +\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{(n^2 + x)^2} = \frac{1}{2}\,.$$

3. Касательные к параболе $y^2 = 2px$ в точках A, B, C образуют треугольник KLM. Доказать, что

$$S_{KLM} = \frac{1}{2} S_{ABC}.$$

4. Всегда ли будет измеримым по Жордану ограниченное открытое связное множество на плоскости?

5. Пусть $f \in C^1[0,1]$. Доказать, что $\forall x \in [0,1]$ справедливо неравенство

$$|f(x)| \leqslant \int\limits_0^1 |f(t)|\,dt + \int\limits_0^1 |f'(t)|\,dt.$$

6. Пусть $A(x)$ — квадратная матрица порядка $2n+1$, определённая на интервале $(0,1)$. Известно, что $\det A(x) \equiv 1$ и для любой постоянной матрицы B существует предел

$$\lim_{x \to +0} A(x) B A^{-1}(x).$$

Доказать, что существуют пределы

$$\lim_{x \to +0} A(x) \qquad \lim_{x \to +0} A^{-1}(x).$$

Решения задач, I курс

1. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots + \frac{a_n}{x^n}\,.$$

На полуоси $(0,+\infty)$ $f(x)$ строго убывает от $+\infty$ до 0. ’ледовательно, существует единственное положительное число x_0 такое, что
$f(x_0) = 1$, т.е.

$$\frac{a_1}{x_0} + \ldots + \frac{a_n}{x_0^n} = 1.$$

2. ’очки пересечения секущей гиперплоскости с координатными осями образуют правильный тетраэдр с ребром $2\sqrt{2}$. Плоскости $x_k = 1$ отсекают от него четыре правильных тетраэдра с ребром $\sqrt{2}$. ’ак как объём правильного тетраэдра с ребром a равен $\dfrac{\sqrt{2}}{12}a^3$, то объём сечения равен

$$\frac{\sqrt{2}}{12}(2\sqrt{2})^3 - 4\cdot\frac{\sqrt{2}}{12}(\sqrt{2})^3 = \frac{4}{3}\,.$$

3. Рассмотрим функцию $f(x) = x(1-x^2)^n$. На отрезке $[0,1]$

$$f_{\max} = f\left(\frac{1}{\sqrt{1+2n}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2n+1}}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)^n.$$

При $n\to\infty$ $f_{\max}\to 0$, поэтому в качестве искомого многочлена можно взять

$$P(x) = x - x(1-x^2)^n$$

(при достаточно большом n).

4. Касательные к параболе в точках $\left(\dfrac{y_i^2}{2p}\,, y_i\right)$ $(i = 1,2,3)$ задаются уравнениями $yy_i = px + \dfrac{y_i^2}{2}$; они пересекаются в точках $\left(\dfrac{y_iy_j}{2p}\,, \dfrac{y_i+y_j}{2}\right)$. ’ледовательно,

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} y_1^2/2p & y_1 & 1 \\ y_2^2/2p & y_2 & 1 \\ y_3^2/2p & y_3 & 1 \end{vmatrix}\right|,$$

$$S_{KLM} = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} \dfrac{y_1y_2}{2p} & \dfrac{y_1+y_2}{2} & 1 \\ \dfrac{y_2y_3}{2p} & \dfrac{y_2+y_3}{2} & 1 \\ \dfrac{y_3y_1}{2p} & \dfrac{y_3+y_1}{2} & 1 \end{vmatrix}\right|.$$

Отсюда находим, что $S_{KLM} = \dfrac{1}{2}\,S_{ABC}$.

5. Достаточно проверить, что справедливо равенство

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \int\limits_0^1 f(x)\,dx + \int\limits_0^{1/2} xf'(x)\,dx + \int\limits_{1/2}^1 (x-1)f'(x)\,dx,$$

а для этого воспользоваться интегрированием по частям.

6. Пусть $C = AE_{ij}A^{-1}$, где E_{ij} — матрица, в которой на пересечении i-ой строки и j-го столбца стоит 1, а все остальные элементы — нулевые. ’огда

$$c_{kl}(x) = a_{ki}(x)A_{lj}(x), \qquad (*)$$

где A_{lj} — алгебраическое дополнение элемента a_{lj} в $\det A$. Заметим, что выражение $(A_{lj}(x))^{2n+1} \cdot \det A(x)$ является суммой произведений вида (*), поэтому оно имеет предел при $x \to +0$. Но $\det A(x) \equiv 1$, следовательно, существует предел $\lim\limits_{x\to+0} A_{lj}(x)$ $(\forall\, l, j)$.

Решения задач, II–VI курсы

1. ’очки пересечения секущей гиперплоскости с координатными осями образуют правильный тетраэдр с ребром $2\sqrt{2}$. Плоскости $x_k = 1$ отсекают от него четыре правильных тетраэдра с ребром $\sqrt{2}$. ’ак как объём правильного тетраэдра с ребром a равен $\dfrac{\sqrt{2}}{12}a^3$, то объём сечения равен

$$\frac{\sqrt{2}}{12}(2\sqrt{2})^3 - 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{12}(\sqrt{2})^3 = \frac{4}{3}\,.$$

2. Из доказательства интегрального признака сходимости рядов следует, что

$$0 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{(n^2+x)^2} - \int\limits_1^{\infty} \frac{tx}{(t^2+x)^2}\,dt \leqslant \frac{x}{(1+x)^2}\,.$$

Поэтому

$$\lim_{x\to+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{(n^2+x)^2} = \lim_{x\to+\infty} \int\limits_1^{\infty} \frac{tx}{(t^2+x)^2}\,dt = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2} \int\limits_{1+x}^{\infty} \frac{du}{u^2} = \frac{x}{2}\,.$$

3. Касательные к параболе в точках $\left(\dfrac{y_i^2}{2p}\,, y_i\right)$ $(i = 1, 2, 3)$ задаются уравнениями $yy_i = px + \dfrac{y_i^2}{2}$; они пересекаются в точках $\left(\dfrac{y_iy_j}{2p}\,, \dfrac{y_i+y_j}{2}\right)$. ’ледовательно,

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} y_1^2/2p & y_1 & 1 \\ y_2^2/2p & y_2 & 1 \\ y_3^2/2p & y_3 & 1 \end{vmatrix}\right|,$$

$$S_{KLM} = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} \dfrac{y_1y_2}{2p} & \dfrac{y_1+y_2}{2} & 1 \\ \dfrac{y_2y_3}{2p} & \dfrac{y_2+y_3}{2} & 1 \\ \dfrac{y_3y_1}{2p} & \dfrac{y_3+y_1}{2} & 1 \end{vmatrix}\right|.$$

Отсюда находим, что $S_{KLM} = \dfrac{1}{2}\,S_{ABC}$.

4. Нет, не всегда. Пусть $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ — множество всех точек квадрата $[0,1]^2$, у которых обе координаты рациональны. Для данного $\varepsilon > 0$ можно окружить каждую точку s_n таким малым кругом $u_n(s_n)$, что сумма площадей кругов-соседей u_n и u_{n+1} вместе с площадью соединяющего их коридора (можно, например, провести две внешние касательные) будет меньше, чем $\varepsilon/2^n$, $n = 1, 2, \ldots$. Пусть G — объединение всех таких открытых трубочек. ’ак как $\mu_* G \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon$, а G плотно в квадрате $[0,1]^2$, то граница множества G не может иметь нулевую меру.

5. Достаточно проверить, что справедливо равенство

$$f(x) = \int\limits_0^1 f(t)\,dt + \int\limits_0^x t f'(t)\,dt + \int\limits_x^1 (t-1) f'(t)\,dt,$$

а для этого воспользоваться интегрированием по частям.

6. Пусть $C = A E_{ij} A^{-1}$, где E_{ij} — матрица, в которой на пересечении i-ой строки и j-го столбца стоит 1, а все остальные элементы — нулевые. ’огда

$$c_{kl}(x) = a_{ki}(x) A_{lj}(x), \tag{$*$}$$

где A_{lj} — алгебраическое дополнение элемента a_{lj} в $\det A$. Заметим, что выражение $(A_{lj}(x))^{2n+1} \cdot \det A(x)$ является суммой произведений вида (*), поэтому оно имеет предел при $x \to +0$. Но $\det A(x) \equiv 1$, следовательно, существует предел $\lim\limits_{x \to +0} A_{lj}(x)$ $(\forall\, l, j)$.