2000–2001 учебный год

Задачи для I курса

1. Дана возрастающая функция $f : [0,1] \to [0,1]$. Доказать, что найдется $x \in [0,1]$ такое, что $f(x) = x$.

2. Пусть $\{x_i\}_{i=1}^n$ — конечная убывающая последовательность положительных чисел. Доказать, что
$$\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2} \leqslant \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\sqrt{i}}\,.$$

3. Пусть $f \in C(\mathbb{R})$ и ни на одном интервале функция f не является монотонной. Доказать, что на любом интервале имеются точки минимума функции f.

4. Найти все функции $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ (здесь $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \ \mid x > 0\}$), удовлетворяющие уравнению
$$f(x)f(yf(x)) = f(x+y) \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{R}_+.$$

5. Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены степени n, $G(x,y) = \sum_{k=0}^n P^{(n-k)}(x)Q^{(k)}(y)$. Доказать, что $G(x,y) = G(y,x)$.

6. Доказать, что единичный квадрат можно разрезать на N квадратов меньшего размера, если N достаточно велико.

Задачи для II–VI курсов

1. Дана возрастающая функция $f : [0,1] \to [0,1]$. Доказать, что найдется $x \in [0,1]$ такое, что $f(x) = x$.

2. Пусть $\{x_i\}_{i=1}^n$ — конечная убывающая последовательность положительных чисел. Доказать, что
$$\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2} \leqslant \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\sqrt{i}}\,.$$

3. Пусть $f \in C(\mathbb{R})$ и ни на одном интервале функция f не является монотонной. Доказать, что на любом интервале имеются точки минимума функции f.

4. Найти все функции $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ (здесь $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \ \mid x > 0\}$), удовлетворяющие уравнению
$$f(x)f(yf(x)) = f(x+y) \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{R}_+.$$

5. Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены степени n, $G(x,y) = \sum_{k=0}^n P^{(n-k)}(x)Q^{(k)}(y)$. Доказать, что $G(x,y) = G(y,x)$.

6. Доказать, что единичный квадрат можно разрезать на N квадратов меньшего размера, если N достаточно велико.

Решения задач

1. Пусть $A = \{x \in [0,1] \mid f(x) > x\}$, $a = \sup A$, $b = f(a)$. Покажем, что $a = b$. Предположим противное: $a < b$ или $a > b$.

   (a) Если $a < b$, то $b = f(a) \leqslant f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \frac{a+b}{2} < b$. Противоречие.

   (b) Если $a > b$, то $b = f(a) \geqslant f\left(\frac{a+b}{2}\right) > \frac{a+b}{2} > b$. Противоречие.

2.
$$\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sqrt{i}}\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sqrt{i}}\right)\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{\sqrt{j}}\right) \geqslant$$
$$\geqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sqrt{i}} \cdot \left(\sum_{j=1}^{i} \frac{x_j}{\sqrt{j}}\right) \geqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sqrt{i}} \cdot i \cdot \frac{x_i}{\sqrt{i}} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

3. Возьмем произвольный интервал $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset [0,1]$. ’ак как функция f не является монотонно возрастающей на $[x_0 - \delta, x_0]$, то найдутся точки $p, q \in [x_0 - \delta, x_0]$ такие, что $p < q$, $f(p) > f(q)$. Аналогично, найдутся точки $r, s \in [x_0, x_0 + \delta] : r < s$, $f(r) < f(s)$ (т.к. f не является монотонно убывающей на $[x_0, x_0 + \delta]$). По теореме Вейерштрасса на отрезке $[p, s]$ функция f достигает своей нижней грани, и этой точкой глобального минимума не могут быть точки p и s. ’ледовательно, на интервале $(p, s) \subset (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ имеется точка минимума функции f.

4. Заметим, что если $\exists\, x \in \mathbb{R}_+ : f(x) > 1$, то при $y = \dfrac{x}{f(x) - 1}$ из функционального уравнения следует, что $f(x) = 1$ — противоречие.

   ’ледовательно, $f(x) \leqslant 1 \ \ \forall\, x \in \mathbb{R}_+$, а отсюда вытекает, что f монотонно убывает:
$$x < x + y, \quad \frac{f(x+y)}{f(x)} = f(yf(x)) \leqslant 1.$$

   Если $\exists\, x \in \mathbb{R}_+ : f(x) = 1$, то $f(y) = f(x + y)\ \forall\, y \in \mathbb{R}_+$, а в силу установленной монотонности функции f отсюда следует, что $f(x) \equiv 1$. Это — «тривиальное» решение уравнения.

   Если $f(x) < 1\ \forall\, x \in \mathbb{R}_+$, то f — строго убывающая функция. В этом случае имеем:
$$f(x)f(yf(x)) = f(x+y) = f(yf(x) + x + y(1 - f(x))) =$$
$$= f(yf(x))f((x + y(1 - f(x)))f(yf(x))).$$

   В силу строгой монотонности f отсюда следует, что $x = (x + y(1 - f(x)))f(yf(x))$. В частности, полагая $x = 1$, $z = yf(1)$, получим $f(z) = \dfrac{1}{1 + az}$, где $a = \dfrac{1 - f(1)}{f(1)} > 0$.

   Проверка показывает, что функция $f(x) = \dfrac{1}{1 + ax}$, где $a \geqslant 0$, удовлетворяет функциональному уравнению (при $a = 0$ получается найденное выше «тривиальное» решение).

5. Достаточно проверить, что

$$\frac{\partial}{\partial x}G(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}G(x,y) = P^{(n)}(x)Q^{(1)}(y) + \ldots + P^{(1)}(x)Q^{(n)}(y).$$

6. Очевидно, что квадрат можно разрезать на k^2 одинаковых квадратиков ($k \geqslant 2$).

   Это число можно увеличить до $k^2 + p(m^2 - 1) + q(n^2 - 1)$, где m, n, p, q — любые натуральные.

   Хорошо известно, что если a и b — взаимно простые натуральные, то любое целое число c можно представить в виде $c = ax + by$ ($x, y \in \mathbb{Z}$). Причем, если натуральное число c достаточно велико, то найдутся неотрицательные решения x, y (схема доказательства этой леммы: $\{0, a, \ldots, (b-1)a\}$ — полная система вычетов по модулю b; следовательно, $ax \equiv c \pmod b$ при некотором $x \in \mathbb{Z} \cap [0, b-1]$, а если $c \geqslant (b-1)a$, то число $y = \dfrac{c - ax}{b}$ — неотрицательное целое).

   Например, взяв $m = 2$ и $n = 3$, получим пару взаимно простых чисел $a = m^2 - 1 = 3$, $b = n^2 - 1 = 8$. ’уществование разбиения вида

$$N = k^2 + p \cdot 3 + q \cdot 8$$

   для достаточно большого N следует теперь из приведенной выше леммы.