1996–1997 учебный год

Задачи для I курса

1. Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — положительные числа. Доказать, что многочлен
$$x^n - a_1 x^{n-1} - \ldots - a_n$$
имеет ровно один положительный корень.

2. Найти объём сечения четырёхмерного куба
$$\{x \in \mathbb{R}^4 \mid 0 \leqslant x_k \leqslant 1,\ k = \overline{1,4}\}$$
гиперплоскостью $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2$.

3. Доказать, что $\forall \varepsilon > 0$ найдутся натуральное число n и числа $a_1, \ldots, a_n$ такие, что
$$\max_{x \in [0,1]} \left| x - \sum_{k=1}^{n} a_k x^{2k+1} \right| < \varepsilon.$$

4. Касательные к параболе $y^2 = 2px$ в точках A, B, C образуют треугольник KLM. Доказать, что
$$S_{KLM} = \frac{1}{2} S_{ABC}.$$

5. Пусть $f \in C^1[0,1]$. Доказать неравенство
$$\left| f\left(\frac{1}{2}\right) \right| \leqslant \int\limits_0^1 |f(x)|\, dx + \frac{1}{2} \int\limits_0^1 |f'(x)|\, dx.$$

6. Пусть $A(x)$ — квадратная матрица порядка $2n+1$, определённая на интервале $(0,1)$. Известно, что $\det A(x) \equiv 1$ и для любой постоянной матрицы B существует предел
$$\lim_{x \to +0} A(x) B A^{-1}(x).$$
Доказать, что существуют пределы
$$\lim_{x \to +0} A(x) \qquad \lim_{x \to +0} A^{-1}(x).$$

Задачи для II–VI курсов

1. Найти объём сечения четырёхмерного куба
$$\{x \in \mathbb{R}^4 \mid 0 \leqslant x_k \leqslant 1,\ k = \overline{1,4}\}$$
гиперплоскостью $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2$.

2. Доказать, что
$$\lim_{x\to+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{(n^2+x)^2} = \frac{1}{2}\,.$$

3. Касательные к параболе $y^2 = 2px$ в точках A, B, C образуют треугольник KLM. Доказать, что
$$S_{KLM} = \frac{1}{2} S_{ABC}.$$

4. Всегда ли будет измеримым по Жордану ограниченное открытое связное множество на плоскости?

5. Пусть $f \in C^1[0,1]$. Доказать, что $\forall x \in [0,1]$ справедливо неравенство
$$|f(x)| \leqslant \int\limits_0^1 |f(t)|\,dt + \int\limits_0^1 |f'(t)|\,dt.$$

6. Пусть $A(x)$ — квадратная матрица порядка $2n+1$, определённая на интервале $(0,1)$. Известно, что $\det A(x) \equiv 1$ и для любой постоянной матрицы B существует предел
$$\lim_{x\to+0} A(x)BA^{-1}(x).$$
Доказать, что существуют пределы
$$\lim_{x\to+0} A(x) \qquad \lim_{x\to+0} A^{-1}(x).$$

Решения задач, I курс

1. Рассмотрим функцию
$$f(x) = \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots + \frac{a_n}{x^n}\,.$$
На полуоси $(0,+\infty)$ $f(x)$ строго убывает от $+\infty$ до 0. Следовательно, существует единственное положительное число x_0 такое, что
$f(x_0) = 1$, т.е.
$$\frac{a_1}{x_0} + \ldots + \frac{a_n}{x_0^n} = 1.$$

2. Точки пересечения секущей гиперплоскости с координатными осями образуют правильный тетраэдр с ребром $2\sqrt{2}$. Плоскости $x_k = 1$ отсекают от него четыре правильных тетраэдра с ребром $\sqrt{2}$. Так как объём правильного тетраэдра с ребром a равен $\dfrac{\sqrt{2}}{12}a^3$, то объём сечения равен

$$\frac{\sqrt{2}}{12}(2\sqrt{2})^3 - 4\cdot\frac{\sqrt{2}}{12}(\sqrt{2})^3 = \frac{4}{3}\,.$$

3. Рассмотрим функцию $f(x) = x(1-x^2)^n$. На отрезке $[0,1]$

$$f_{\max} = f\left(\frac{1}{\sqrt{1+2n}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2n+1}}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)^n.$$

При $n\to\infty$ $f_{\max}\to 0$, поэтому в качестве искомого многочлена можно взять

$$P(x) = x - x(1-x^2)^n$$

(при достаточно большом n).

4. Касательные к параболе в точках $\left(\dfrac{y_i^2}{2p}\,, y_i\right)$ $(i = 1,2,3)$ задаются уравнениями $yy_i = px + \dfrac{y_i^2}{2}$; они пересекаются в точках $\left(\dfrac{y_iy_j}{2p}\,, \dfrac{y_i+y_j}{2}\right)$. Следовательно,

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} y_1^2/2p & y_1 & 1 \\ y_2^2/2p & y_2 & 1 \\ y_3^2/2p & y_3 & 1 \end{vmatrix}\right|,$$

$$S_{KLM} = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} \dfrac{y_1y_2}{2p} & \dfrac{y_1+y_2}{2} & 1 \\ \dfrac{y_2y_3}{2p} & \dfrac{y_2+y_3}{2} & 1 \\ \dfrac{y_3y_1}{2p} & \dfrac{y_3+y_1}{2} & 1 \end{vmatrix}\right|.$$

Отсюда находим, что $S_{KLM} = \dfrac{1}{2}\,S_{ABC}$.

5. Достаточно проверить, что справедливо равенство

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \int\limits_0^1 f(x)\,dx + \int\limits_0^{1/2} xf'(x)\,dx + \int\limits_{1/2}^1 (x-1)f'(x)\,dx,$$

а для этого воспользоваться интегрированием по частям.

6. Пусть $C = AE_{ij}A^{-1}$, где E_{ij} — матрица, в которой на пересечении i-ой строки и j-го столбца стоит 1, а все остальные элементы — нулевые. Тогда
$$c_{kl}(x) = a_{ki}(x)A_{lj}(x), \qquad (*)$$
где A_{lj} — алгебраическое дополнение элемента a_{lj} в $\det A$. Заметим, что выражение $(A_{lj}(x))^{2n+1} \cdot \det A(x)$ является суммой произведений вида (*), поэтому оно имеет предел при $x \to +0$. Но $\det A(x) \equiv 1$, следовательно, существует предел $\lim\limits_{x\to+0} A_{lj}(x)$ $(\forall\, l, j)$.

Решения задач, II–VI курсы

1. Точки пересечения секущей гиперплоскости с координатными осями образуют правильный тетраэдр с ребром $2\sqrt{2}$. Плоскости $x_k = 1$ отсекают от него четыре правильных тетраэдра с ребром $\sqrt{2}$. Так как объём правильного тетраэдра с ребром a равен $\dfrac{\sqrt{2}}{12}a^3$, то объём сечения равен
$$\frac{\sqrt{2}}{12}(2\sqrt{2})^3 - 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{12}(\sqrt{2})^3 = \frac{4}{3}\,.$$

2. Из доказательства интегрального признака сходимости рядов следует, что
$$0 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{(n^2+x)^2} - \int\limits_1^{\infty} \frac{tx}{(t^2+x)^2}\,dt \leqslant \frac{x}{(1+x)^2}\,.$$
Поэтому
$$\lim_{x\to+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{(n^2+x)^2} = \lim_{x\to+\infty} \int\limits_1^{\infty} \frac{tx}{(t^2+x)^2}\,dt = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2} \int\limits_{1+x}^{\infty} \frac{du}{u^2} = \frac{x}{2}\,.$$

3. Касательные к параболе в точках $\left(\dfrac{y_i^2}{2p}\,, y_i\right)$ $(i = 1, 2, 3)$ задаются уравнениями $yy_i = px + \dfrac{y_i^2}{2}$; они пересекаются в точках $\left(\dfrac{y_iy_j}{2p}\,, \dfrac{y_i+y_j}{2}\right)$. Следовательно,
$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} y_1^2/2p & y_1 & 1 \\ y_2^2/2p & y_2 & 1 \\ y_3^2/2p & y_3 & 1 \end{vmatrix}\right|,$$
$$S_{KLM} = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} \dfrac{y_1y_2}{2p} & \dfrac{y_1+y_2}{2} & 1 \\ \dfrac{y_2y_3}{2p} & \dfrac{y_2+y_3}{2} & 1 \\ \dfrac{y_3y_1}{2p} & \dfrac{y_3+y_1}{2} & 1 \end{vmatrix}\right|.$$
Отсюда находим, что $S_{KLM} = \dfrac{1}{2}\,S_{ABC}$.

4. Нет, не всегда. Пусть $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ — множество всех точек квадрата $[0,1]^2$, у которых обе координаты рациональны. Для данного $\varepsilon > 0$ можно окружить каждую точку s_n таким малым кругом $u_n(s_n)$, что сумма площадей кругов-соседей u_n и u_{n+1} вместе с площадью соединяющего их коридора (можно, например, провести две внешние касательные) будет меньше, чем $\varepsilon/2^n$, $n = 1, 2, \ldots$. Пусть G — объединение всех таких открытых трубочек. Так как $\mu_* G \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon$, а G плотно в квадрате $[0,1]^2$, то граница множества G не может иметь нулевую меру.

5. Достаточно проверить, что справедливо равенство

$$f(x) = \int\limits_0^1 f(t)\,dt + \int\limits_0^x tf'(t)\,dt + \int\limits_x^1 (t-1)f'(t)\,dt,$$

а для этого воспользоваться интегрированием по частям.

6. Пусть $C = AE_{ij}A^{-1}$, где E_{ij} — матрица, в которой на пересечении i-ой строки и j-го столбца стоит 1, а все остальные элементы — нулевые. Тогда

$$c_{kl}(x) = a_{ki}(x)A_{lj}(x), \tag{$*$}$$

где A_{lj} — алгебраическое дополнение элемента a_{lj} в $\det A$. Заметим, что выражение $(A_{lj}(x))^{2n+1} \cdot \det A(x)$ является суммой произведений вида (*), поэтому оно имеет предел при $x \to +0$. Но $\det A(x) \equiv 1$, следовательно, существует предел $\lim\limits_{x\to+0} A_{lj}(x)$ $(\forall\, l, j)$.

1997–1998 учебный год

Задачи для I курса

1. Дано взаимно однозначное отображение $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Доказать, что найдутся натуральные числа a, b и c такие, что $a < b < c$ и $f(a) + f(c) = 2f(b)$.

2. Пусть комплексные числа a, b и c такие, что все корни уравнения $z^3 + az^2 + bz + c = 0$ лежат на окружности $|z| = 1$. Доказать, что все корни уравнения $z^3+|a|z^2+|b|z+|c| = 0$ также лежат на окружности $|z| = 1$.

3. Существуют ли ортогональное преобразование плоскости $\mathbb{R}^2$ и ограниченное множество $S \subset \mathbb{R}^2$ такие, что $f(S) \subset (S)$, но $f(S) \neq (S)$?

4. Пусть e_1, e_2, e_3 — ортонормированный базис в $\mathbb{R}^3$, а a_1, a_2, a_3 — векторы единичной длины. Доказать, что если
$$(a_1, e_1) + (a_2, e_2) + (a_3, e_3) > \sqrt{6},$$
то векторы a_1, a_2, a_3 линейно независимы.

5. Последовательность $\{x_n\}$ задана рекуррентно: x_1 — некоторое число из интервала $(0, 1)$, а $x_{n+1} = \ln(1 + x_n)$ при $n = 1, 2, \ldots$. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n$.

6. (a) Доказать, что существует многочлен $P(x)$ такой, что для любого натурального числа n
$$\int\limits_{n-1}^{n} P(x)\,dx = n^4.$$

   (b) Найти сумму $\sum\limits_{k=1}^{n} k^4$.

Задачи для II–VI курсов

1. Пусть комплексные числа a, b и c такие, что все корни уравнения $z^3 + az^2 + bz + c = 0$ лежат на окружности $|z| = 1$. Доказать, что все корни уравнения $z^3+|a|z^2+|b|z+|c| = 0$ также лежат на окружности $|z| = 1$.

2. Существуют ли ортогональное преобразование плоскости $\mathbb{R}^2$ и ограниченное множество $S \subset \mathbb{R}^2$ такие, что $f(S) \subset (S)$, но $f(S) \neq (S)$?

3. Пусть A — невырожденная матрица размера 2×2. Доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся матрица S такая, что

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1 & \delta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \delta \leqslant \varepsilon.$$

4. (a) Доказать, что существует многочлен $P(x)$ такой, что для любого натурального числа n

$$\int\limits_{n-1}^{n} P(x)\,dx = n^4.$$

   (b) Найти сумму $\sum\limits_{k=1}^{n} k^4$.

5. Последовательность $\{x_n\}$ задана рекуррентно: x_1 — некоторое число из интервала $(0, 1)$, а $x_{n+1} = \ln(1 + x_n)$ при $n = 1, 2, \ldots$. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n$.

6. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$, а $a_1, \ldots, a_n$ — векторы единичной длины. Доказать, что если

$$(a_1, e_1) + \ldots + (a_n, e_n) > \sqrt{n(n-1)},$$

то векторы $a_1, \ldots, a_n$ линейно независимы.

Решения задач, I курс

1. Возьмём $a = 1$ и обозначим через b наименьшее из чисел $n \in \mathbb{N}$ таких, что $f(n) > f(1)$. Пусть $c = f^{-1}(2f(b) - f(1))$. Так как $2f(b) - f(1) > f(b) > f(1)$, то $c > b$.

2. Пусть z_1, z_2, z_3 — корни уравнения $z^3 + az^2 + bz + c = 0$. Тогда

$$b = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1 = z_1z_2z_3 \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}\right) = -c\bar{a}.$$

Так как $|c| = |z_1z_2z_3| = 1$, то $|a| = |b|$, и второе уравнение принимает вид

$$z^3 + |a|z^2 + |a|z + 1 = 0.$$

Один из корней этого уравнения равен -1, а два других являются комплексно сопряжёнными числами, произведение которых равно 1. Следовательно, они также лежат на окружности $|z| = 1$.

3. Пусть f — поворот плоскости вокруг точки O на угол $\sqrt{2}\pi$, $A_0 \neq O$ — произвольная точка, $A_n = f(A_{n-1})$ при $n = 1, 2, \ldots$. Тогда $A_n \neq A_m$ при $n \neq m$, т.к. число $n\sqrt{2} - m\sqrt{2}$ не является целым. Пусть $S = \{A_0, A_1, \ldots\}$, тогда $f(S) = \{A_1, A_2, \ldots\} \subset S$, но $f(S) \neq S$.

4. Пусть $a_i = (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3})$. Предположим, что векторы a_1, a_2, a_3 линейно зависимы. Тогда в матрице (a_{ij}) линейно зависимы не только строки, но и столбцы. Поэтому существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ (можно считать, что $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1$) такие, что $\sum\limits_{j=1}^{3} \alpha_j a_{ij} = 0$ при $i = 1, 2, 3$. Отсюда следует, что
$$\alpha_i^2 a_{ii}^2 = \left(-\sum_{j \neq i} \alpha_j a_{ij} \right)^2 \leqslant \left(\sum_{j \neq i} \alpha_j^2 \right) \left(\sum_{j \neq i} a_{ij}^2 \right) = (1 - \alpha_i^2)(1 - a_{ii}^2),$$
т.е. $a_{ii}^2 + \alpha_i^2 \leqslant 1$. Следовательно,
$$\sum_{i=1}^{3} a_{ii} \leqslant \sum_{i=1}^{3} \sqrt{1 - \alpha_i^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{3} 1} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{3} (1 - \alpha_i^2)} = \sqrt{6}.$$

5. Ясно, что $x_n \downarrow 0$. Имеем
$$\frac{1}{x_{n+1}} = \frac{1}{\ln(1 + x_n)} = \frac{1}{x_n \left(1 - \frac{x_n}{2} + o(x_n) \right)} = \frac{1}{x_n} + \frac{1}{2} + o(1),$$
или $\dfrac{1}{x_{n+1}} = \dfrac{1}{x_n} + \dfrac{1}{2} + y_n$, где $y_n \to 0$ при $n \to \infty$. Отсюда следует, что $\dfrac{1}{x_{n+1}} = \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{n}{2} + y_1 + \ldots + y_n$, $\dfrac{1}{n x_{n+1}} = \dfrac{1}{n x_1} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{y_1 + \ldots + y_n}{n}$. Так как $y_n \to 0$, то и $\dfrac{y_1 + \ldots + y_n}{n} \to 0$, поэтому $\dfrac{1}{n x_{n+1}} \to \dfrac{1}{2}$.

6. (a) Будем искать полином четвёртой степени, удовлетворяющий условию задачи: $P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$. Вычислив интеграл и приравняв коэффициенты при степенях n в обеих частях, получим линейную систему относительно неизвестных a, b, c, d, e с треугольной матрицей:
$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -\frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \end{array} \right).$$
Отсюда находим полином $P(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 - \dfrac{1}{30}$.

   (b)
$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = \int_0^n P(x)\, dx = \frac{n}{30}(6n^4 + 15n^3 + 10n^2 - 1) =$$
$$= \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2 + 3n - 1)}{30}.$$

Решения задач, II–VI курсы

1. Пусть z_1, z_2, z_3 — корни уравнения $z^3 + az^2 + bz + c = 0$. Тогда
$$b = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1 = z_1z_2z_3\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}\right) = -c\bar{a}.$$
Так как $|c| = |z_1z_2z_3| = 1$, то $|a| = |b|$, и второе уравнение принимает вид
$$z^3 + |a|z^2 + |a|z + 1 = 0.$$
Один из корней этого уравнения равен -1, а два других являются комплексно сопряжёнными числами, произведение которых равно 1. Следовательно, они также лежат на окружности $|z| = 1$.

2. Пусть f — поворот плоскости вокруг точки O на угол $\sqrt{2}\pi$, $A_0 \neq O$ — произвольная точка, $A_n = f(A_{n-1})$ при $n = 1, 2, \ldots$. Тогда $A_n \neq A_m$ при $n \neq m$, т.к. число $n\sqrt{2} - m\sqrt{2}$ не является целым. Пусть $S = \{A_0, A_1, \ldots\}$, тогда $f(S) = \{A_1, A_2, \ldots\} \subset S$, но $f(S) \neq S$.

3. Если матрица не является симметричной, то достаточно рассмотреть случай жордановой клетки: $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\lambda \neq 0$. Возьмём $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{\varepsilon}{\lambda} \end{pmatrix}$, тогда $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. (a) Будем искать полином четвёртой степени, удовлетворяющий условию задачи: $P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$. Вычислив интеграл и приравняв коэффициенты при степенях n в обеих частях, получим линейную систему относительно неизвестных a, b, c, d, e с треугольной матрицей:
$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -\frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \end{array}\right).$$
Отсюда находим полином $P(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}$.

   (b)
$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = \int_0^n P(x)\,dx = \frac{n}{30}(6n^4 + 15n^3 + 10n^2 - 1) =$$
$$= \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}.$$

5. Ясно, что $x_n \downarrow 0$. Имеем
$$\frac{1}{x_{n+1}} = \frac{1}{\ln(1+x_n)} = \frac{1}{x_n\left(1 - \frac{x_n}{2} + o(x_n)\right)} = \frac{1}{x_n} + \frac{1}{2} + o(1),$$

или $\frac{1}{x_{n+1}} = \frac{1}{x_n} + \frac{1}{2} + y_n$, где $y_n \to 0$ при $n \to \infty$. Отсюда следует, что $\frac{1}{x_{n+1}} = \frac{1}{x_1} + \frac{n}{2} + y_1 + \ldots + y_n$, $\frac{1}{nx_{n+1}} = \frac{1}{nx_1} + \frac{1}{2} + \frac{y_1 + \ldots + y_n}{n}$. Так как $y_n \to 0$, то и $\frac{y_1 + \ldots + y_n}{n} \to 0$, поэтому $\frac{1}{nx_{n+1}} \to \frac{1}{2}$.

6. Пусть $a_i = (a_{i1}, \ldots, a_{in})$. Предположим, что векторы $a_1, \ldots, a_n$ линейно зависимы. Тогда в матрице (a_{ij}) линейно зависимы не только строки, но и столбцы. Поэтому существуют числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ (можно считать, что $\alpha_1^2 + \ldots + \alpha_n^2 = 1$) такие, что $\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j a_{ij} = 0$ при $i = 1, 2, \ldots$. Отсюда следует, что

$$\alpha_i^2 a_{ii}^2 = \left(-\sum_{j \neq i} \alpha_j a_{ij}\right)^2 \leqslant \left(\sum_{j \neq i} \alpha_j^2\right)\left(\sum_{j \neq i} a_{ij}^2\right) = (1 - \alpha_i^2)(1 - a_{ii}^2),$$

т.е. $a_{ii}^2 + \alpha_i^2 \leqslant 1$. Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ii} \leqslant \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot \sqrt{1 - \alpha_i^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} 1} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (1 - \alpha_i^2)} = \sqrt{n(n-1)}.$$

1998–1999 учебный год

Задачи для I курса

1. Доказать, что всякое непрерывное отображение окружности в прямую переводит некоторую пару диаметрально противоположных точек в одну точку.
2. Пусть $M = \left\{ f \in C[0,\pi] \,\middle|\, \int_0^\pi f(x)\sin x\,dx = \int_0^\pi f(x)\cos x\,dx = 1 \right\}$. Найти $\min\limits_{f\in M} \int_0^\pi f^2(x)\,dx$.
3. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — положительные числа и $a_1 + a_2 + \ldots + a_n < 1$. Доказать, что
$$\frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)(1-a_1)(1-a_2)\ldots(1-a_n)}{a_1a_2\ldots a_n(1-a_1-a_2-\ldots-a_n)} \geqslant n^{n+1}.$$
4. Доказать, что при любом n существует сечение n-мерного куба $\left\{x \,\middle|\, |x_k| \leqslant 1, k = 1, \ldots, n\right\}$ двумерной плоскостью, являющееся правильным $2n$-угольником.
5. Существует ли функция $f(x)$, непрерывная на полуоси $(1, +\infty)$ и такая, что
$$\int_x^{x^2} f(t)\,dt = 1 \qquad \forall x \in (1, +\infty)\ ?$$
6. Найти матрицу третьего порядка $T(x) = T_0 + \dfrac{1}{x}T_1 + \ldots + \dfrac{1}{x^n}T_n$ (T_k — постоянные матрицы) такую, что при $x \neq 0$ $\det T(x) \equiv 1$, а матрицу
$$A(x) = T(x) \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{\sin x}{x} & e^{2x} & \dfrac{\sin x}{x^2} \\ x^3 & \dfrac{\ln(1+x)}{x} & \dfrac{\cos x}{x^2} \\ 0 & 0 & e^x \end{pmatrix}$$
можно доопределить в нуле так, что после этого она станет невырожденной и непрерывной в некоторой полной окрестности нуля.

Задачи для II–VI курсов

1. Доказать, что всякое непрерывное отображение окружности в прямую переводит некоторую пару диаметрально противоположных точек в одну точку.

2. Дано уравнение $y' = xy + f(x)$, где $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — непрерывная ограниченная функция. Найти необходимое и достаточное условие, которому должна удовлетворять функция $f(x)$, для того, чтобы уравнение имело решение $y(x) \to 0$ при $x \to \pm\infty$.

3. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — положительные числа и $a_1 + a_2 + \ldots + a_n < 1$. Доказать, что
$$\frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)(1 - a_1)(1 - a_2)\ldots(1 - a_n)}{a_1 a_2 \ldots a_n (1 - a_1 - a_2 - \ldots - a_n)} \geqslant n^{n+1}.$$

4. Доказать, что при любом n существует сечение n-мерного куба $\left\{x \,\Big|\, |x_k| \leqslant 1, k = 1, \ldots, n\right\}$ двумерной плоскостью, являющееся правильным $2n$-угольником.

5. Существует ли функция $f(x)$, непрерывная на полуоси $(1, +\infty)$ и такая, что
$$\int_x^{x^2} f(t)\,dt = 1 \qquad \forall x \in (1, +\infty)\ ?$$

6. Найти матрицу третьего порядка $T(x) = T_0 + \dfrac{1}{x} T_1 + \ldots + \dfrac{1}{x^n} T_n$ (T_k — постоянные матрицы) такую, что при $x \neq 0$ $\det T(x) \equiv 1$, а матрицу
$$A(x) = T(x) \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{\sin x}{x} & e^{2x} & \dfrac{\sin x}{x^2} \\ x^3 & \dfrac{\ln(1+x)}{x} & \dfrac{\cos x}{x^2} \\ 0 & 0 & e^x \end{pmatrix}$$
можно доопределить в нуле так, что после этого она станет невырожденной и непрерывной в некоторой полной окрестности нуля.

Решения задач, I курс

1. Пусть отображение $f : S^1 \to \mathbb{R}$ непрерывно на единичной окружности комплексной плоскости. Рассмотрим на отрезке $[0, 1]$ непрерывную функцию $\varphi(t) = f\left(e^{\pi i(t+1)}\right) - f\left(e^{\pi i t}\right)$. Тогда $\varphi(0) = f(-1) - f(1)$, $\varphi(1) = f(1) - f(-1) = -\varphi(0)$, и по теореме Коши найдётся такая точка $t_0 \in [0, 1]$, что $\varphi(t_0) = 0$, т.е. $f\left(e^{\pi i t_0}\right) = f\left(-e^{\pi i t_0}\right)$.

2. Рассмотрим функцию $f_0(x) = \dfrac{2}{\pi}(\cos x + \sin x) \in M$. Так как $\forall f \in M$ $\int_0^\pi (f(x) - f_0(x))^2\,dx \geqslant 0$, то $\int_0^\pi f^2(x)\,dx \geqslant 2\int_0^\pi f(x) f_0(x)\,dx - \int_0^\pi f_0^2(x)\,dx = \dfrac{8}{\pi} - \dfrac{4}{\pi} = \dfrac{4}{\pi}$. Максимум достигается при $f(x) = f_0(x)$.

3. Положим $a_{n+1} = 1 - a_1 - a_2 - \ldots - a_n$, тогда $a_{n+1} > 0$, а неравенство, которое надо доказать, примет следующий вид

$$\frac{(1-a_1)(1-a_2)\ldots(1-a_{n+1})}{a_1 a_2 \ldots a_{n+1}} \geqslant n^{n+1}.$$

Применяя неравенство для средних, получим для каждого $i = 1, 2, \ldots, n+1$: $1 - a_i = a_1 + \ldots + a_{i-1} + a_{i+1} + \ldots + a_{n+1} \geqslant n\sqrt[n]{a_1 \ldots a_{i-1} a_{i+1} \ldots a_{n+1}}$. Перемножив эти неравенства, получим, что

$$(1-a_1)(1-a_2)\ldots(1-a_{n+1}) \geqslant n^{n+1} a_1 a_2 \ldots a_{n+1}.$$

4. Проведём через начало координат в $\mathbb{R}^n$ плоскость, порождённую векторами a и b. Она пересекает куб по множеству

$$\{\alpha a + \beta b \,\big|\, |\alpha a_k + \beta b_k| \leqslant 1, \quad k = 1, \ldots, n\}.$$

Векторы a и b достаточно выбрать так, чтобы выполнялись следующие свойства:

1) $|a| = |b|$ и $(a, b) = 0$;
2) на плоскости с координатами (α, β) неравенства $|\alpha a_k + \beta b_k| \leqslant 1$, $k = \overline{1, n}$, задают правильный $2n$-угольник.

Оба свойства выполняются, например, при $a_k = \sin\dfrac{k\pi}{n}$, $b_k = \cos\dfrac{k\pi}{n}$:

$$(a, b) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \sin\frac{2k\pi}{n} = 0,$$

$$|a|^2 = \frac{n}{2} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{2k\pi}{n} = \frac{n}{2}\,, \qquad |b|^2 = \frac{n}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{2k\pi}{n} = \frac{n}{2}\,.$$

5. Задача сводится к решению функционального уравнения $2xf(x^2) = f(x)$. Одно из его решений — $f(x) = \dfrac{A}{x\ln x}$. После подстановки в интеграл находим $A = \dfrac{1}{\ln 2}$.

6. Например (единственности, конечно, нет),

$$T(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\dfrac{1}{x} \\ 0 & 1 & -\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dfrac{1}{x} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\dfrac{1}{x} \\ 0 & 1 & -\dfrac{1}{x^2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = T_2 T_1.$$

После умножения на T_1 уничтожается главная особенность в каждой строке и т.д. Фактически это способ доказательства общего утверждения (лемма Соважа из книги Хартмана «Обыкновенные дифференциальные уравнения»)

Решения задач, II–VI курсы

1. Пусть отображение $f : S^1 \to \mathbb{R}$ непрерывно на единичной окружности комплексной плоскости. Рассмотрим на отрезке $[0,1]$ непрерывную функцию $\varphi(t) = f\left(e^{\pi i(t+1)}\right) - f\left(e^{\pi i t}\right)$. Тогда $\varphi(0) = f(-1) - f(1)$, $\varphi(1) = f(1) - f(-1) = -\varphi(0)$, и по теореме Коши найдётся такая точка $t_0 \in [0,1]$, что $\varphi(t_0) = 0$, т.е. $f\left(e^{\pi i t_0}\right) = f\left(-e^{\pi i t_0}\right)$.

2. Имеем $y(x) = e^{x^2/2}\left(\int_{x_0}^{x} e^{-t^2/2} f(t)\,dt + C\right)$. Если $y(x) \to 0$ при $x \to \pm\infty$, то

$$\int_{x_0}^{+\infty} e^{-t^2/2} f(t)\,dt = -C = -\int_{-\infty}^{x_0} e^{-t^2/2} f(t)\,dt,$$

откуда получаем необходимое условие

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} f(t)\,dt = 0.$$

Докажем, что при выполнении этого условия решение $y(x) = e^{x^2/2}\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} f(t)\,dt = -e^{x^2/2}\int_{x}^{+\infty} e^{-t^2/2} f(t)\,dt$ стремится к нулю при $x \to \pm\infty$. При $x \to -\infty$ имеем по правилу Лопиталя

$$|y(x)| \leqslant \frac{\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}|f(t)|\,dt}{e^{-x^2/2}} \sim \frac{e^{-x^2/2}|f(x)|}{-xe^{-x^2/2}} = -\frac{|f(x)|}{x} \to 0.$$

При $x \to +\infty$ используем представление

$$y(x) = -e^{x^2/2}\int_{x}^{+\infty} e^{-t^2/2} f(t)\,dt$$

и действуем аналогично.

3. Положим $a_{n+1} = 1 - a_1 - a_2 - \ldots - a_n$, тогда $a_{n+1} > 0$, а неравенство, которое надо доказать, примет следующий вид

$$\frac{(1-a_1)(1-a_2)\ldots(1-a_{n+1})}{a_1 a_2 \ldots a_{n+1}} \geqslant n^{n+1}.$$

Применяя неравенство для средних, получим для каждого $i = 1, 2, \ldots, n+1$: $1 - a_i = a_1 + \ldots + a_{i-1} + a_{i+1} + \ldots + a_{n+1} \geqslant n\sqrt[n]{a_1 \ldots a_{i-1} a_{i+1} \ldots a_{n+1}}$. Перемножив эти неравенства, получим, что

$$(1-a_1)(1-a_2)\ldots(1-a_{n+1}) \geqslant n^{n+1} a_1 a_2 \ldots a_{n+1}.$$

4. Проведём через начало координат в $\mathbb{R}^n$ плоскость, порождённую векторами a и b. Она пересекает куб по множеству

$$\{\alpha a + \beta b \,\big|\, |\alpha a_k + \beta b_k| \leqslant 1, \quad k = 1, \ldots, n\}.$$

Векторы a и b достаточно выбрать так, чтобы выполнялись следующие свойства:

1) $|a| = |b|$ и $(a, b) = 0$;

2) на плоскости с координатами (α, β) неравенства $|\alpha a_k + \beta b_k| \leqslant 1$, $k = \overline{1, n}$, задают правильный $2n$-угольник.

Оба свойства выполняются, например, при $a_k = \sin\dfrac{k\pi}{n}$, $b_k = \cos\dfrac{k\pi}{n}$:

$$(a,b) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \sin\frac{2k\pi}{n} = 0,$$

$$|a|^2 = \frac{n}{2} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{2k\pi}{n} = \frac{n}{2}\,, \qquad |b|^2 = \frac{n}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{2k\pi}{n} = \frac{n}{2}\,.$$

5. Задача сводится к решению функционального уравнения $2xf(x^2) = f(x)$. Одно из его решений — $f(x) = \dfrac{A}{x\ln x}$. После подстановки в интеграл находим $A = \dfrac{1}{\ln 2}$.

6. Например (единственности, конечно, нет),

$$T(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\dfrac{1}{x} \\ 0 & 1 & -\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dfrac{1}{x} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\dfrac{1}{x} \\ 0 & 1 & -\dfrac{1}{x^2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = T_2 T_1.$$

После умножения на T_1 уничтожается главная особенность в каждой строке и т.д. Фактически это способ доказательства общего утверждения (лемма Соважа из книги Хартмана «Обыкновенные дифференциальные уравнения»)

1999–2000 учебный год

Задачи для I курса

1. Дано семейство $F = \{A \subset \mathbb{N} \mid \#A < \infty\}$ такое, что $A \cap B \neq \varnothing$ для любых A и B из F.

   Верно ли, что всегда найдётся такое конечное множество $X \subset \mathbb{N}$, что $A \cap B \cap X \neq \varnothing$ для любых A и B из F?

2. Пусть $f \in C[0,1]$ и $\forall\, x, y \in [0,1]$ выполняется неравенство $xf(y) + yf(x) \leqslant 1$. Доказать, что
$$\int_0^1 f(x)\,dx \leqslant \frac{\pi}{4}\,.$$

3. Существует ли такая биекция $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, что
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi(n)}{n^2} < \infty?$$

4. Пусть невырожденная матрица M порядка $2n$ и обратная матрица M^{-1} разбиты на квадратные блоки:
$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \qquad M^{-1} = \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix}.$$

   Доказать, что $\det M \cdot \det H = \det A$.

5. Пусть L — вещественное линейное пространство, $\dim L = 10$, L_1 и L_2 — подпространства L, $L_1 \subset L_2$, $\dim L_1 = 3$, $\dim L_2 = 6$. Пусть $\mathcal{E}$ — пространство тех линейных преобразований L, для которых L_1 и L_2 являются инвариантными подпространствами. Найти размерность пространства $\mathcal{E}$.

6. Пусть $P(x)$ — многочлен степени n с вещественными коэффициентами, имеющий только вещественные корни. Доказать, что
$$(n-1)(P'(x))^2 \geqslant nP(x)P''(x)$$

   для любого $x \in \mathbb{R}$.

Задачи для II–VI курсов

1. Дано семейство $F = \{A \subset \mathbb{N} \mid \#A < \infty\}$ такое, что $A \cap B \neq \varnothing$ для любых A и B из F. Верно ли, что всегда найдётся такое конечное множество $X \subset \mathbb{N}$, что $A \cap B \cap X \neq \varnothing$ для любых A и B из F?

2. Пусть $f \in C[0,1]$ и $\forall\, x, y \in [0,1]$ выполняется неравенство $xf(y) + yf(x) \leqslant 1$. Доказать, что
$$\int_0^1 f(x)\,dx \leqslant \frac{\pi}{4}\,.$$

3. Существует ли такая биекция $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, что
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi(n)}{n^2} < \infty?$$

4. Пусть невырожденная матрица M порядка $2n$ и обратная матрица M^{-1} разбиты на квадратные блоки:
$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \qquad M^{-1} = \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix}.$$
Доказать, что $\det M \cdot \det H = \det A$.

5. Пусть L — вещественное линейное пространство, $\dim L = 10$, L_1 и L_2 — подпространства L, $L_1 \subset L_2$, $\dim L_1 = 3$, $\dim L_2 = 6$. Пусть $\mathcal{E}$ — пространство тех линейных преобразований L, для которых L_1 и L_2 являются инвариантными подпространствами. Найти размерность пространства $\mathcal{E}$.

6. Пусть $P(x)$ — многочлен степени n с вещественными коэффициентами, имеющий только вещественные корни. Доказать, что
$$(n-1)(P'(x))^2 \geqslant nP(x)P''(x)$$
для любого $x \in \mathbb{R}$.

Решения задач

1. Нет. Пусть $A_n = \{1, 2, \ldots, 2n-3, 2n-1, 2n\}$, $B_n = \{2, 4, \ldots, 2n-2, 2n, 2n+1\}$, $F = \{A_1, B_1, A_2, B_2, \ldots\}$. Тогда $A_k \cap M_m = \begin{cases} \{2k\}, & \text{если } m \geqslant k, \\ \{2m+1\}, & \text{если } m < k. \end{cases}$

2. $I = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^{\pi/2} f(\sin\varphi)\cos\varphi\,d\varphi = \int_0^{\pi/2} f(\cos\varphi)\sin\varphi\,d\varphi$. Отсюда следует, что $2I = \int_0^{\pi/2} (\cos\varphi \cdot f(\sin\varphi) + \sin\varphi \cdot f(\cos\varphi))\,d\varphi \leqslant \int_0^{\pi/2} d\varphi = \dfrac{\pi}{2}$.

3. Покажем, что $\sum_{n=N+1}^{3N} \dfrac{\pi(n)}{n^2} > \dfrac{1}{9}$ при $\forall\, N \geqslant 1$. Среди $2N$ чисел $\pi(N+1), \ldots, \pi(3N)$ по крайней мере N чисел больше, чем N. Следовательно,
$$\sum_{n=N+1}^{3N} \frac{\pi(n)}{n^2} > \frac{1}{(3N)^n} \sum_{n=N+1}^{3N} \pi(n) > \frac{1}{9N^2} \cdot N \cdot N.$$

4. Пусть I — единичная матрица порядка n. Тогда, применяя правила умножения блочных матриц, получаем: $\det M \cdot \det H = \det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \det\begin{pmatrix} I & F \\ 0 & H \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & F \\ 0 & H \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & I \end{pmatrix} = \det A$.

5. Пусть $\{e_1, e_2, \ldots, e_{10}\}$ — такой базис в L_1, что $\{e_1, e_2, e_3\}$ — базис в L_1, $\{e_1, \ldots, e_6\}$ — базис в L_2. В этом базисе матрица преобразования из $\mathcal{E}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix}
* & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\
* & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\
* & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\
0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * & * & * \\
0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * & * & * \\
0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * & * & * \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & *
\end{pmatrix}.$$

Следовательно, $\dim \mathcal{E} = 3 \cdot 3 + 3 \cdot 6 + 4 \cdot 10 = 67$.

6. Достаточно доказать неравенство при $n > 1$ и $x \neq x_i$, где $x_1, \ldots, x_n$ — корни многочлена $P(x)$. Имеем:

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x - x_i}\,, \qquad \frac{P''(x)}{P(x)} = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{2}{(x - x_i)(x - x_j)}\,.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
(n-1)\left(\frac{P'(x)}{P(x)}\right)^2 - n\frac{P''(x)}{P(x)} \quad &= \quad (n-1)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x - x_i}\right)^2 - \\
&\qquad -n \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{2}{(x - x_i)(x - x_j)} = \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{n-1}{(x - x_i)^2} - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{2}{(x - x_i)(x - x_j)} = \\
&= \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \left(\frac{1}{x - x_i} - \frac{1}{x - x_j}\right)^2 \geqslant 0.
\end{aligned}$$

2000–2001 учебный год

Задачи для I курса

1. Дана возрастающая функция $f : [0,1] \to [0,1]$. Доказать, что найдется $x \in [0,1]$ такое, что $f(x) = x$.

2. Пусть $\{x_i\}_{i=1}^n$ — конечная убывающая последовательность положительных чисел. Доказать, что
$$\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2} \leqslant \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\sqrt{i}}\,.$$

3. Пусть $f \in C(\mathbb{R})$ и ни на одном интервале функция f не является монотонной. Доказать, что на любом интервале имеются точки минимума функции f.

4. Найти все функции $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ (здесь $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$), удовлетворяющие уравнению
$$f(x)f(yf(x)) = f(x+y) \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{R}_+.$$

5. Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены степени n, $G(x,y) = \sum_{k=0}^n P^{(n-k)}(x)Q^{(k)}(y)$. Доказать, что $G(x,y) = G(y,x)$.

6. Доказать, что единичный квадрат можно разрезать на N квадратов меньшего размера, если N достаточно велико.

Задачи для II–VI курсов

1. Дана возрастающая функция $f : [0,1] \to [0,1]$. Доказать, что найдется $x \in [0,1]$ такое, что $f(x) = x$.

2. Пусть $\{x_i\}_{i=1}^n$ — конечная убывающая последовательность положительных чисел. Доказать, что
$$\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2} \leqslant \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\sqrt{i}}\,.$$

3. Пусть $f \in C(\mathbb{R})$ и ни на одном интервале функция f не является монотонной. Доказать, что на любом интервале имеются точки минимума функции f.

4. Найти все функции $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ (здесь $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$), удовлетворяющие уравнению
$$f(x)f(yf(x)) = f(x+y) \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{R}_+.$$

5. Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены степени n, $G(x,y) = \sum_{k=0}^n P^{(n-k)}(x)Q^{(k)}(y)$. Доказать, что $G(x,y) = G(y,x)$.

6. Доказать, что единичный квадрат можно разрезать на N квадратов меньшего размера, если N достаточно велико.

Решения задач

1. Пусть $A = \{x \in [0,1] \mid f(x) > x\}$, $a = \sup A$, $b = f(a)$. Покажем, что $a = b$. Предположим противное: $a < b$ или $a > b$.

   (a) Если $a < b$, то $b = f(a) \leqslant f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \frac{a+b}{2} < b$. Противоречие.

   (b) Если $a > b$, то $b = f(a) \geqslant f\left(\frac{a+b}{2}\right) > \frac{a+b}{2} > b$. Противоречие.

2. $$\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sqrt{i}}\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sqrt{i}}\right)\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{\sqrt{j}}\right) \geqslant$$
$$\geqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sqrt{i}} \cdot \left(\sum_{j=1}^{i} \frac{x_j}{\sqrt{j}}\right) \geqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sqrt{i}} \cdot i \cdot \frac{x_i}{\sqrt{i}} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

3. Возьмем произвольный интервал $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset [0,1]$. Так как функция f не является монотонно возрастающей на $[x_0 - \delta, x_0]$, то найдутся точки $p, q \in [x_0 - \delta, x_0]$ такие, что $p < q$, $f(p) > f(q)$. Аналогично, найдутся точки $r, s \in [x_0, x_0 + \delta] : r < s$, $f(r) < f(s)$ (т.к. f не является монотонно убывающей на $[x_0, x_0 + \delta]$). По теореме Вейерштрасса на отрезке $[p, s]$ функция f достигает своей нижней грани, и этой точкой глобального минимума не могут быть точки p и s. Следовательно, на интервале $(p, s) \subset (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ имеется точка минимума функции f.

4. Заметим, что если $\exists\, x \in \mathbb{R}_+ : f(x) > 1$, то при $y = \dfrac{x}{f(x)-1}$ из функционального уравнения следует, что $f(x) = 1$ — противоречие.

   Следовательно, $f(x) \leqslant 1 \;\; \forall\, x \in \mathbb{R}_+$, а отсюда вытекает, что f монотонно убывает:

$$x < x + y, \quad \frac{f(x+y)}{f(x)} = f(yf(x)) \leqslant 1.$$

   Если $\exists\, x \in \mathbb{R}_+ : f(x) = 1$, то $f(y) = f(x+y)\ \forall\, y \in \mathbb{R}_+$, а в силу установленной монотонности функции f отсюда следует, что $f(x) \equiv 1$. Это — «тривиальное» решение уравнения.

   Если $f(x) < 1\ \forall\, x \in \mathbb{R}_+$, то f — строго убывающая функция. В этом случае имеем:

$$f(x)f(yf(x)) = f(x+y) = f(yf(x) + x + y(1 - f(x))) =$$
$$= f(yf(x))f((x + y(1 - f(x)))f(yf(x))).$$

   В силу строгой монотонности f отсюда следует, что $x = (x + y(1 - f(x)))f(yf(x))$. В частности, полагая $x = 1$, $z = yf(1)$, получим $f(z) = \dfrac{1}{1+az}$, где $a = \dfrac{1 - f(1)}{f(1)} > 0$.

   Проверка показывает, что функция $f(x) = \dfrac{1}{1+ax}$, где $a \geqslant 0$, удовлетворяет функциональному уравнению (при $a = 0$ получается найденное выше «тривиальное» решение).

5. Достаточно проверить, что

$$\frac{\partial}{\partial x}G(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}G(x,y) = P^{(n)}(x)Q^{(1)}(y) + \ldots + P^{(1)}(x)Q^{(n)}(y).$$

6. Очевидно, что квадрат можно разрезать на k^2 одинаковых квадратиков ($k \geqslant 2$).

   Это число можно увеличить до $k^2 + p(m^2-1) + q(n^2-1)$, где m, n, p, q — любые натуральные.

   Хорошо известно, что если a и b — взаимно простые натуральные, то любое целое число c можно представить в виде $c = ax + by$ ($x, y \in \mathbb{Z}$). Причем, если натуральное число c достаточно велико, то найдутся неотрицательные решения x, y (схема доказательства этой леммы: $\{0, a, \ldots, (b-1)a\}$ — полная система вычетов по модулю b; следовательно, $ax \equiv c \pmod{b}$ при некотором $x \in \mathbb{Z} \cap [0, b-1]$, а если $c \geqslant (b-1)a$, то число $y = \dfrac{c-ax}{b}$ — неотрицательное целое).

   Например, взяв $m = 2$ и $n = 3$, получим пару взаимно простых чисел $a = m^2 - 1 = 3$, $b = n^2 - 1 = 8$. Существование разбиения вида

$$N = k^2 + p \cdot 3 + q \cdot 8$$

   для достаточно большого N следует теперь из приведенной выше леммы.