1997–1998 учебный год

Задачи для I курса

1. Дано взаимно однозначное отображение $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Доказать, что найдутся натуральные числа a, b и c такие, что $a < b < c$ и $f(a) + f(c) = 2f(b)$.

2. Пусть комплексные числа a, b и c такие, что все корни уравнения $z^3 + az^2 + bz + c = 0$ лежат на окружности $|z| = 1$. Доказать, что все корни уравнения $z^3+|a|z^2+|b|z+|c| = 0$ также лежат на окружности $|z| = 1$.

3. ’уществуют ли ортогональное преобразование плоскости $\mathbb{R}^2$ и ограниченное множество $S \subset \mathbb{R}^2$ такие, что $f(S) \subset (S)$, но $f(S) \neq (S)$?

4. Пусть e_1, e_2, e_3 — ортонормированный базис в $\mathbb{R}^3$, а a_1, a_2, a_3 — векторы единичной длины. Доказать, что если

$$(a_1, e_1) + (a_2, e_2) + (a_3, e_3) > \sqrt{6},$$

то векторы a_1, a_2, a_3 линейно независимы.

5. Последовательность $\{x_n\}$ задана рекуррентно: x_1 — некоторое число из интервала $(0, 1)$, а $x_{n+1} = \ln(1 + x_n)$ при $n = 1, 2, \ldots$. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n$.

6. (a) Доказать, что существует многочлен $P(x)$ такой, что для любого натурального числа n

$$\int\limits_{n-1}^{n} P(x)\,dx = n^4.$$

   (b) Найти сумму $\sum\limits_{k=1}^{n} k^4$.

Задачи для II–VI курсов

1. Пусть комплексные числа a, b и c такие, что все корни уравнения $z^3 + az^2 + bz + c = 0$ лежат на окружности $|z| = 1$. Доказать, что все корни уравнения $z^3 + |a|z^2 + |b|z + |c| = 0$ также лежат на окружности $|z| = 1$.

2. ’уществуют ли ортогональное преобразование плоскости $\mathbb{R}^2$ и ограниченное множество $S \subset \mathbb{R}^2$ такие, что $f(S) \subset (S)$, но $f(S) \neq (S)$?

3. Пусть A — невырожденная матрица размера 2×2. Доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся матрица S такая, что
$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1 & \delta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \delta \leqslant \varepsilon.$$

4. (a) Доказать, что существует многочлен $P(x)$ такой, что для любого натурального числа n
$$\int\limits_{n-1}^{n} P(x)\, dx = n^4.$$
   (b) Найти сумму $\sum\limits_{k=1}^{n} k^4$.

5. Последовательность $\{x_n\}$ задана рекуррентно: x_1 — некоторое число из интервала $(0, 1)$, а $x_{n+1} = \ln(1 + x_n)$ при $n = 1, 2, \ldots$. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n$.

6. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$, а $a_1, \ldots, a_n$ — векторы единичной длины. Доказать, что если
$$(a_1, e_1) + \ldots + (a_n, e_n) > \sqrt{n(n-1)},$$
то векторы $a_1, \ldots, a_n$ линейно независимы.

Решения задач, I курс

1. Возьмём $a = 1$ и обозначим через b наименьшее из чисел $n \in \mathbb{N}$ таких, что $f(n) > f(1)$. Пусть $c = f^{-1}(2f(b) - f(1))$. ’ак как $2f(b) - f(1) > f(b) > f(1)$, то $c > b$.

2. Пусть z_1, z_2, z_3 — корни уравнения $z^3 + az^2 + bz + c = 0$. ’огда
$$b = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1 = z_1z_2z_3\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}\right) = -c\bar{a}.$$
’ак как $|c| = |z_1z_2z_3| = 1$, то $|a| = |b|$, и второе уравнение принимает вид
$$z^3 + |a|z^2 + |a|z + 1 = 0.$$
Один из корней этого уравнения равен -1, а два других являются комплексно сопряжёнными числами, произведение которых равно 1. ’ледовательно, они также лежат на окружности $|z| = 1$.

3. Пусть f — поворот плоскости вокруг точки O на угол $\sqrt{2}\pi$, $A_0 \neq O$ — произвольная точка, $A_n = f(A_{n-1})$ при $n = 1, 2, \ldots$. ’огда $A_n \neq A_m$ при $n \neq m$, т.к. число $n\sqrt{2} - m\sqrt{2}$ не является целым. Пусть $S = \{A_0, A_1, \ldots\}$, тогда $f(S) = \{A_1, A_2, \ldots\} \subset S$, но $f(S) \neq S$.

4. Пусть $a_i = (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3})$. Предположим, что векторы a_1, a_2, a_3 линейно зависимы. ’огда в матрице (a_{ij}) линейно зависимы не только строки, но и столбцы. Поэтому существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ (можно считать, что $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1$) такие, что $\sum\limits_{j=1}^{3} \alpha_j a_{ij} = 0$ при $i = 1, 2, 3$. Отсюда следует, что

$$\alpha_i^2 a_{ii}^2 = \left(-\sum_{j\neq i} \alpha_j a_{ij}\right)^2 \leqslant \left(\sum_{j\neq i} \alpha_j^2\right)\left(\sum_{j\neq i} a_{ij}^2\right) = (1-\alpha_i^2)(1-a_{ii}^2),$$

т.е. $a_{ii}^2 + \alpha_i^2 \leqslant 1$. ’ледовательно,

$$\sum_{i=1}^{3} a_{ii} \leqslant \sum_{i=1}^{3} \sqrt{1-\alpha_i^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{3} 1} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{3}(1-\alpha_i^2)} = \sqrt{6}.$$

5. Ясно, что $x_n \downarrow 0$. Имеем

$$\frac{1}{x_{n+1}} = \frac{1}{\ln(1+x_n)} = \frac{1}{x_n\left(1 - \frac{x_n}{2} + o(x_n)\right)} = \frac{1}{x_n} + \frac{1}{2} + o(1),$$

или $\dfrac{1}{x_{n+1}} = \dfrac{1}{x_n} + \dfrac{1}{2} + y_n$, где $y_n \to 0$ при $n \to \infty$. Отсюда следует, что $\dfrac{1}{x_{n+1}} = \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{n}{2} + y_1 + \ldots + y_n$, $\dfrac{1}{nx_{n+1}} = \dfrac{1}{nx_1} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{y_1 + \ldots + y_n}{n}$. ’ак как $y_n \to 0$, то и $\dfrac{y_1 + \ldots + y_n}{n} \to 0$, поэтому $\dfrac{1}{nx_{n+1}} \to \dfrac{1}{2}$.

6. (a) Будем искать полином четвёртой степени, удовлетворяющий условию задачи: $P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$. Вычислив интеграл и приравняв коэффициенты при степенях n в обеих частях, получим линейную систему относительно неизвестных a, b, c, d, e с треугольной матрицей:

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -\frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Отсюда находим полином $P(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 - \dfrac{1}{30}$.

(b)

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = \int_0^n P(x)\,dx = \frac{n}{30}(6n^4 + 15n^3 + 10n^2 - 1) =$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}.$$

Решения задач, II–VI курсы

1. Пусть z_1, z_2, z_3 — корни уравнения $z^3 + az^2 + bz + c = 0$. ’огда
$$b = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1 = z_1z_2z_3\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}\right) = -c\bar{a}.$$
’ак как $|c| = |z_1z_2z_3| = 1$, то $|a| = |b|$, и второе уравнение принимает вид
$$z^3 + |a|z^2 + |a|z + 1 = 0.$$
Один из корней этого уравнения равен -1, а два других являются комплексно сопряжёнными числами, произведение которых равно 1. ’ледовательно, они также лежат на окружности $|z| = 1$.

2. Пусть f — поворот плоскости вокруг точки O на угол $\sqrt{2}\pi$, $A_0 \neq O$ — произвольная точка, $A_n = f(A_{n-1})$ при $n = 1, 2, \ldots$. ’огда $A_n \neq A_m$ при $n \neq m$, т.к. число $n\sqrt{2} - m\sqrt{2}$ не является целым. Пусть $S = \{A_0, A_1, \ldots\}$, тогда $f(S) = \{A_1, A_2, \ldots\} \subset S$, но $f(S) \neq S$.

3. Если матрица не является симметричной, то достаточно рассмотреть случай жордановой клетки: $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\lambda \neq 0$. Возьмём $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{\varepsilon}{\lambda} \end{pmatrix}$, тогда $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. (a) Будем искать полином четвёртой степени, удовлетворяющий условию задачи: $P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$. Вычислив интеграл и приравняв коэффициенты при степенях n в обеих частях, получим линейную систему относительно неизвестных a, b, c, d, e с треугольной матрицей:
$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -\frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \end{array}\right).$$
Отсюда находим полином $P(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}$.

   (b)
$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = \int_0^n P(x)\,dx = \frac{n}{30}(6n^4 + 15n^3 + 10n^2 - 1) =$$
$$= \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}.$$

5. Ясно, что $x_n \downarrow 0$. Имеем
$$\frac{1}{x_{n+1}} = \frac{1}{\ln(1+x_n)} = \frac{1}{x_n\left(1 - \frac{x_n}{2} + o(x_n)\right)} = \frac{1}{x_n} + \frac{1}{2} + o(1),$$

или $\dfrac{1}{x_{n+1}} = \dfrac{1}{x_n} + \dfrac{1}{2} + y_n$, где $y_n \to 0$ при $n \to \infty$. Отсюда следует, что $\dfrac{1}{x_{n+1}} = \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{n}{2} + y_1 + \ldots + y_n$, $\dfrac{1}{nx_{n+1}} = \dfrac{1}{nx_1} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{y_1 + \ldots + y_n}{n}$. ’ак как $y_n \to 0$, то и $\dfrac{y_1 + \ldots + y_n}{n} \to 0$, поэтому $\dfrac{1}{nx_{n+1}} \to \dfrac{1}{2}$.

6. Пусть $a_i = (a_{i1}, \ldots, a_{in})$. Предположим, что векторы $a_1, \ldots, a_n$ линейно зависимы. ’огда в матрице (a_{ij}) линейно зависимы не только строки, но и столбцы. Поэтому существуют числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ (можно считать, что $\alpha_1^2 + \ldots + \alpha_n^2 = 1$) такие, что $\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j a_{ij} = 0$ при $i = 1, 2, \ldots$. Отсюда следует, что

$$\alpha_i^2 a_{ii}^2 = \left(-\sum_{j \neq i} \alpha_j a_{ij} \right)^2 \leqslant \left(\sum_{j \neq i} \alpha_j^2 \right) \left(\sum_{j \neq i} a_{ij}^2 \right) = (1 - \alpha_i^2)(1 - a_{ii}^2),$$

т.е. $a_{ii}^2 + \alpha_i^2 \leqslant 1$. ’ледовательно,

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ii} \leqslant \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot \sqrt{1 - \alpha_i^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} 1} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (1 - \alpha_i^2)} = \sqrt{n(n-1)}.$$