Московский физико-технический институт
(государственный университет)
Факультет молекулярной и биологической физики

Яворский В.А.

Планирование научного эксперимента и обработка экспериментальных данных

Методические указания к лабораторным работам

Москва 2011

1. Введение

Предлагаемые методические указания предназначены для студентов 1–4 курсов МФТИ, выполняющих работы в лабораторном практикуме. Изложены основы планирования эксперимента, анализа экспериментальных данных, правила ведения лабораторного журнала и оформления результатов эксперимента.

2. Измерение физических величин

Типы величин

Предметом исследования в науке являются самые разные объекты. При всем разнообразии их характеристик они делятся на качественные (цвет, наличие признака) и количественные (вес, длина, площадь, объем, скорость изменения). В этой работе рассматриваются только количественные величины.

Для определения абсолютного значения некоторой физической величины ее сравнивают с эталоном, который считается единицей величины. Например, единицей длины является метр, времени – секунда и т.д. При этом нужно понимать, что в процессе эксперимента экспериментатор сравнивает измеряемую величину не с основным эталоном, а с показаниями некоторого прибора – вторичным эталоном, который через иерархию других эталонов может быть приведен к первичному эталону.

Различают прямое и косвенное измерения. Наиболее простым является **прямое измерение**, при котором искомое значение величины находят непосредственно с помощью измерительного прибора. Например, длина измеряется линейкой, напряжение – вольтметром, температура – термометром и т.п. Если прямые измерения невозможны, используют **косвенные измерения**. В них искомое значение величины находят на основании известной зависимости этой величины от других, допускающих прямое измерение. Например, среднюю плотность тела можно измерить по его массе и геометрическим размерам, электрическое сопротивление резистора – по падению напряжения на нем и току через него и т.п.

Измерения могут быть выполнены как однократные и многократные. Однократное измерение дает единственный результат, который принимают за окончательный результат измерения значения искомой величины. Многократное измерение проводят путем повторения однократных измерений одной и той же постоянной физической величины, оно приводит к получению набора данных. Окончательный результат многократного измерения, как правило, находят из набора данных в виде среднего арифметического результатов всех отдельных измерений.

Физические величины, встречающиеся в эксперименте, относят к следующим основным типам.

Случайная величина. Такая физическая величина связана со случайными процессами, поэтому результат отдельного измерения не может быть однозначно предсказан заранее. Вместе с тем проведение достаточно большого количества измерений случайной величины позволяет установить, что результаты измерений отвечают определенным статистическим закономерностям. Их выявление, изучение и учет составляют неотъемлемую часть любого эксперимента. В качестве случайных величин можно рассматривать, например, скорость молекулы газа в фиксированный момент времени, отклонение значения амплитуды сетевого напряжения от номинальной величины, время, необходимое для распада ядра радиоактивного атома, и т.п.

Постоянная величина. К таким величинам должны быть отнесены физические постоянные, например, скорость света в вакууме, заряд электрона, постоянная Больцмана и т.п. Можно считать постоянными величинами также некоторые характеристики конкретного объекта, находящегося при фиксированных условиях. Этот тип физических величин чаще всего встречается в экспериментах, например, при определении длины образца, его массы, теплоемкости и т.п. Однако многократные измерения постоянной величины могут дать неодинаковые результаты. Дело в том, что результаты измерений подвержены неконтролируемым, а значит, неучтенным, влияниям многочисленных воздействий внешней среды, включая неконтролируемые процессы в исследуемых объектах и используемых измерительных приборах. Вследствие этого постоянная величина зачастую проявляет себя как случайная величина, а результаты ее измерений отражают случайную природу воздействий и отвечают определенным статистическим закономерностям. Именно поэтому для обработки результатов измерения постоянной величины естественно использовать методы, характерные для обработки результатов измерения случайной величины.

Изменяющаяся (переменная) **величина**. Такая величина закономерно меняется с течением времени вследствие процессов, проходящих в исследуемом объекте. Примерами могут служить: скорость сложной химической реакции, затухание амплитуды колебаний свободного маятника и т.п. Измерения, проводимые в различные моменты времени, фиксируют величину в новых условиях. Набор результатов однократных измерений представляет собой результаты принципиально неповторимых измерений, так как время нельзя повернуть вспять, а измерение в целом не может расцениваться как многократное.

Особого внимания заслуживает **нестабильная величина**. Она меняется с течением времени без каких бы то ни было статистических закономерностей. К основной характеристике нестабильной величины следует отнести отсутствие у экспериментатора информации о ее зависимости от времени. Измерения такой величины дают набор данных, не несущих сколько-нибудь полезных сведений. Вместе с тем нестабильная величина может быть переведена в разряд изменяющихся величин, если экспериментально или теоретически установлена закономерность в зависимости ее от времени.

Типы погрешностей измерений

Погрешность – количественная характеристика неоднозначности результата измерения. Ее оценивают исходя из всей информации, накопленной при подготовке и выполнении измерений. Эту информацию обрабатывают для совместного определения окончательного результата измерения и его погрешности. Окончательный результат нельзя расценивать как “истинное значение” измеряемой физической величины, так как в этом нет смысла из-за наличия погрешности.

Погрешность может быть выражена в единицах измеряемой величины x, в таком случае она обозначается Δx и носит название **абсолютной погрешности**. Однако абсолютная погрешность не отражает качества измерений: например, абсолютная погрешность 1 мм при измерении размеров помещения свидетельствует о высоком качестве измерения, та же погрешность совершенно неприемлема при измерении диаметра тонкой проволоки.

Критерием качества измерения является отношение абсолютной погрешности к окончательному результату измерения:

$$\delta x = \frac{\Delta x}{x}. \qquad (2.1)$$

Это отношение безразмерно. Величину δx называют **относительной погрешностью** и используют как в абсолютном, так и в процентном выражении. Высокой точности измерения соответствует малое значение относительной погрешности.

Основные типы погрешностей:

Промахи или грубые погрешности – возникают вследствие неисправности измерительных приборов или ошибок в эксперименте, сделанных по невнимательности. Естественно стремление избегать промахи, но если стало понятно, что они все-таки допущены, соответствующие им результаты измерений необходимо отбросить и при возможности повторить эксперимент в этой области значений.

Приборная погрешность – систематическая погрешность, присутствующая в результатах измерений, выполненных с помощью любого измерительного прибора. Приборная погрешность, как правило, неизвестна и не может быть учтена. Ее можно оценить только путем сравнения показаний прибора с показаниями другого, более точного. Иногда результаты специально проведенного сравнения приводят в паспорте прибора, однако чаще указывают максимально возможную погрешность для приборов данного типа.

Модельная погрешность. В основу любого экспериментального исследования, сопряженного с измерениями, заложена модель. Модель содержит физическое описание исследуемого объекта или процесса, которое позволяет составить его математическое описание, а именно, набор функциональных соотношений, включающих физические величины. Неверно построенная модель, в которой не нашли отражения какие-то важные процессы или факторы, влияющие на результат измерений, также приводит к несоответствиям. Как следствие, измеряемые в эксперименте величины, вычисляемые по полученным из модели рабочим формулам, содержат погрешности, которые носят название модельных погрешностей. К разряду модельных может быть отнесена погрешность взвешивания на рычажных весах. Согласно закону Архимеда вес тела и гирь уменьшается из-за действия выталкивающей силы воздуха. Напомним, что вес 1 м^3 воздуха равен примерно 10 ньютонов. Для того чтобы правильно найти массу взвешиваемого тела, нужно ввести поправки на потерю веса гирями и самим телом. Вместе с тем, как и при любых измерениях, здесь необходим разумный подход. Например, при работе с грубыми техническими весами бессмысленно вводить поправку на Архимедову силу, так как она окажется много меньше погрешностей, вносимых в результат измерения гирями и самими весами.

Случайные погрешности – при повторных измерениях погрешности этого типа показывают свою случайную природу. Возникают они вследствие множества причин, совместное воздействие которых на каждое отдельное измерение невозможно учесть или заранее установить. Такими причинами могут оказаться, к примеру, незначительные колебания температуры различных деталей и узлов установки, скачки напряжения, вибрации, турбулентные движения воздуха, трение в механизмах, ошибки считывания показаний приборов и т.п. Единственно возможный способ объективного учета случайных погрешностей состоит в определении их статистических закономерностей, проявляющихся в результатах многократных измерений. Рассчитанные статистические оценки вносят в окончательный результат измерения.

Одной из грубейших ошибок, которые допускают школьники и студенты, является нахождение погрешности измерения как

$$\Delta x = x_e - x_t ,$$

где x_e – полученное в процессе эксперимента среднее значение величины, x_t – значение, взятое из справочника или рассчитанное исходя из теоретических представлений. Целью эксперимента является именно проверка существующих теорий и уточнение табличных значений (смотрите раздел 10 о статистической проверке гипотез).

С другой стороны, при выполнении учебных лабораторных работ полезно сравнить полученные результаты со справочными табличными величинами и в случае значительного их расхождения проанализировать, какие экспериментальные факторы и модельные погрешности могли привести к этому.

3. Случайные величины и их характеристики

Основным типом погрешностей, изучению которых посвящено последующее изложение, являются случайные погрешности. Они поддаются строгому математическому описанию, что позволяет делать выводы о качестве измерений, в которых они присутствуют.

Случайная величина x полностью задается **плотностью вероятности** $\rho(x)$ (другие названия – распределение вероятности, распределение величины x).

Среднее значение $\langle x\rangle$ измеряемой величины x указывает центр распределения, около которого группируются результаты отдельных измерений:

$$\langle x\rangle=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\ . \qquad (3.1)$$

Дисперсию вводят как средний квадрат отклонения отдельных результатов от среднего значения случайной величины:

$$\sigma^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\langle x\rangle\right)^2=\frac{n}{n-1}\left(\left\langle x^2\right\rangle-\langle x\rangle^2\right). \qquad (3.2)$$

Коэффициент $n-1$ появляется, поскольку в связи с конечным количеством экспериментов вычисленное среднее значение $\langle x\rangle$ отличается от предельного (получаемого при $n\to\infty$), и такая поправка дает возможность получить несмещенную оценку для дисперсии.

Среднее квадратичное отклонение, называемое также **стандартным**, определяют как квадратный корень из дисперсии:

$$\sigma=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\langle x\rangle\right)^2}=\sqrt{\frac{n}{n-1}\left(\left\langle x^2\right\rangle-\langle x\rangle^2\right)} \qquad (3.3)$$

Эта величина характеризует разброс результатов отдельных измерений вокруг среднего значения, получаемого после обработки всех данных многократного измерения. Конечно, точные значения σ и $\langle x\rangle$ являются предельными величинами, так как могут быть получены лишь тогда, когда полное количество проведенных измерений достаточно велико, в пределе при $n \to \infty$. При конечных n правильнее использовать термин **экспериментальная оценка**, который в равной мере относится и к среднему значению, и к дисперсии.

4. Нормальное распределение и его свойства

Нормальное распределение

При обработке данных измерений в науке и технике обычно предполагают нормальный закон распределения случайных погрешностей измерений. Оно всегда проявляется тогда, когда суммарная погрешность есть результат неучтенного совместного воздействия множества причин, каждая из которых дает **малый** вклад в погрешность. Причем совершенно неважно, по какому закону распределен каждый из вкладов в отдельности.

Свойства нормально распределенной случайной величины x:

1. $x \in (-\infty;+\infty)$;
2. плотность вероятности $\rho(x)$ является непрерывной функцией;
3. центр распределения случайной величины одновременно является центром симметрии;
4. малые отклонения встречаются чаще больших, другими словами, реализуются с большей вероятностью.

Соответствующее функциональное выражение для распределения задает формула Гаусса:

$$\rho(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x - \langle x \rangle)^2}{2\sigma^2} \right], \qquad (4.1)$$

где σ^2 и $\langle x \rangle$ – дисперсия и среднее значение распределения.

Вероятность того, что результат измерения попадет в интервал $\left[x_1;\ x_2\right]$, равна

$$P\left(x_1 \le x \le x_2\right) = \int_{x_1}^{x_2} \rho\left(x\right) dx\,. \qquad (4.2)$$

В скобках после *P* указано событие, для которого вычислена вероятность. При увеличении границ промежутка в обе стороны до бесконечности интеграл от функции распределения $\int_{-\infty}^{+\infty} \rho\left(x\right) dx = 1$, т.е. попадание результата измерения в диапазон $x \in \left(-\infty; +\infty\right)$ является достоверным событием.

Пусть Δx – произвольное отклонение от средней величины $\left\langle x \right\rangle$. Введем ε – величину отношения полуширины интервала Δ*x* к среднему квадратичному отклонению σ:

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{\sigma} \qquad (4.3)$$

В таблице 1 указана вероятность α:

$$\alpha = P\left(\left\langle x \right\rangle - \varepsilon\sigma \le x \le \left\langle x \right\rangle + \varepsilon\sigma\right) \qquad (4.4)$$

Таблица 1

Нормальное распределение: доверительные интервалы $\left(\left\langle x \right\rangle - \Delta x; \left\langle x \right\rangle + \Delta x\right)$ для доверительной вероятности α (в долях ε)

α	0,68	0,90	0,95	0,990	0,997	0,999
ε	1,0	1,65	2,0	2,6	3,0	3,3

Ее также можно рассчитать по приближенному выражению:

$$\alpha \approx \sqrt{1-\exp\left(-\frac{2\varepsilon^2}{\pi}\right)} \qquad (4.5)$$

Правило «3 стандартов»

Видно, что результат измерения с вероятностью около 68% попадет в интервал $(\langle x\rangle-\sigma;\langle x\rangle+\sigma)$, т.е. примерно каждое третье измерение даст результат за пределами этого интервала. За пределами интервала $(\langle x\rangle-2\sigma;\langle x\rangle+2\sigma)$ окажется 5% результатов, а для интервала $(\langle x\rangle-3\sigma;\langle x\rangle+3\sigma)$ – только один из трехсот. Значит, интервал $(\langle x\rangle-3\sigma;\langle x\rangle+3\sigma)$ является почти достоверным, так как подавляющее большинство отдельных результатов многократного измерения случайной величины окажется сосредоточенным именно в нем.

При обработке результатов эксперимента часто используется «правило 3σ», или правило «трех стандартов», которое основано на указанном свойстве нормального распределения. С учетом проведенного выше анализа можно установить наличие промаха в результате отдельного измерения, а значит, **отбросить его**, если результат измерения более чем на 3σ отличается от измеренного среднего значения случайной величины.

В то же время стоит более тщательно повторить измерения в этой области параметров – возможно, данный результат измерения не является промахом, а свидетельствует о наличии необычного поведения изучаемой системы, которое не укладывается в рамки существующей модели, т.е. речь идет об открытии нового качественного состояния (например, линии резонансного поглощения в спектре).

Коэффициент Стьюдента

Случайные погрешности, как уже отмечено, проявляются в разбросе результатов отдельных измерений постоянной величины. С увеличением количества измерений n оценка значения величины σ практически перестает зависеть от n, то есть уменьшается неточность при оценивании погрешности отдельного измерения. С ростом n также стабилизируется оценка $\langle x \rangle$. Следовательно, должна уменьшаться погрешность окончательного результата многократного измерения, за который принимают среднее значение $\langle x \rangle$.

Связь среднего квадратичного отклонения $\sigma_{\langle x \rangle}$ окончательного результата (другими словами, погрешности определения среднего значения) и среднего квадратичного отклонения σ отдельного измерения задает соотношение

$$\sigma_{\langle x \rangle} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \langle x \rangle\right)^2}\,. \tag{4.6}$$

Видно, что с увеличением числа измерений погрешность окончательного результата уменьшается. Однако повышение точности никогда не дается бесплатно. Так, чтобы узнать дополнительную цифру в $\langle x \rangle$, т.е. повысить точность в 10 раз, количество измерений необходимо увеличить в 100 раз! Следует также учесть, что в конечную погрешность вносит свой вклад приборная (систематическая) погрешность, и с какого-то момента увеличение числа измерений становится неэффективным.

Пусть как результаты отдельных измерений x_i, так и среднее значение $\langle x \rangle$ распределены нормально. По аналогии с отдельным измерением, для оценки погрешности окончательного результата многократного измерения примем величину Δx, задающую симметричный относительно среднего значения $\langle x\rangle$ интервал от $-\Delta x$ до $+\Delta x$, называемый **доверительным интервалом**.

Вероятность найти значение измеряемой величины в указанном интервале носит название **доверительной вероятности**:

$$\alpha = P\left(\langle x\rangle - \varepsilon\sigma \le x \le \langle x\rangle + \varepsilon\sigma\right). \tag{4.7}$$

В табл. 1 приведены доверительные вероятности для доверительных интервалов, размеры которых выражены в долях среднего квадратичного отклонения:

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{\sigma_{table}} \tag{4.8}$$

Если понятие доверительного интервала использовать применительно к отдельному измерению, то под σ_{table} следует понимать среднее квадратичное отклонение σ результата этого отдельного измерения. Если же отнести доверительный интервал к многократному измерению, то под σ_{table} необходимо подразумевать среднее квадратичное отклонение окончательного результата $\langle x\rangle$ многократного измерения, т.е. $\sigma_{\langle x\rangle}$. С помощью указанной таблицы случайную погрешность окончательного результата можно найти, воспользовавшись записью:

$$(\Delta x)_{case} = \varepsilon\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \varepsilon\cdot\sigma_{\langle x\rangle}, \tag{4.9}$$

где величину ε берут из таблицы для заданного значения доверительной вероятности.

При обработке результатов лабораторных работ рекомендуется применять доверительную вероятность α = 0,68, поэтому нет нужды использовать ее в записи $\langle x\rangle \pm \Delta x$.

В эксперименте значение $\sigma_{\langle x\rangle}$ оценивают исходя из конечного числа результатов отдельных измерений, количество которых обычно не превышает 5–10. Поэтому точность оценивания $\sigma_{\langle x\rangle}$ невелика. Это вносит дополнительную неопределенность в окончательный результат многократного измерения. Чтобы ее учесть, следует расширить границы доверительного интервала, заданного выше для точно известной величины $\sigma_{\langle x\rangle}$. Понятно, что меньшему количеству отдельных измерений должен сопоставляться более широкий доверительный интервал. Поэтому для $(\Delta x)_{case}$ необходимо использовать другое выражение:

$$(\Delta x)_{case} = t(\alpha, n)\cdot\sigma_{\langle x\rangle}, \tag{4.10}$$

где $t(\alpha, n)$ – коэффициенты, зависящие от полного количества измерений n и заданного значения доверительной вероятности α. Величины $t(\alpha, n)$ носят название коэффициентов Стьюдента. Значения коэффициентов Стьюдента для различных α и n можно найти в табл. 2.

Таблица 2

Коэффициенты Стьюдента $t(\alpha, n)$ для доверительной вероятности α (n – количество измерений)

n	α			
	0,68	0,95	0,99	0,999
2	2,0	12,7	63,7	636,6
3	1,4	4,3	9,9	31,6
4	1,3	3,2	5,8	12,9
5	1,2	2,8	4,6	8,6
6	1,2	2,6	4,0	6,9
7	1,1	2,4	3,7	6,0
8	1,1	2,4	3,5	5,4
9	1,1	2,3	3,4	5,0
10	1,1	2,3	3,3	4,8

15	1,1	2,1	3,0	4,1
20	1,1	2,1	2,9	3,9
30	1,1	2,0	2,8	3,7
50	1,1	2,0	2,7	3,5
100	1,0	2,0	2,6	3,4

В таблице значение коэффициента расположено на пересечении строки с количеством отдельных измерений n и столбца с выбранным значением доверительной вероятности α. Изучив таблицу, несложно заметить, что при увеличении количества измерений коэффициенты практически совпадают с использованными выше величинами ε для того же значения доверительной вероятности α. Это есть следствие перехода от оценок параметров нормального распределения к их точному заданию, что реализуется только при очень большом количестве выполненных измерений.

5. Суммарная погрешность измерений

Помимо случайной погрешности, при использовании в эксперименте каких-либо измерительных приборов необходимо учитывать **приборную погрешность**. В паспорте прибора принято указывать предел допустимой погрешности θ, означающий максимально возможную погрешность при рекомендованных условиях работы прибора. Если бы приборная погрешность была распределена по нормальному закону, то из такого определения θ следовало бы, что распределение характеризуется средним квадратичным отклонением $\sigma_{device} = \theta/3$.

Для электроизмерительных стрелочных приборов принято указывать **класс точности**, записываемый в виде числа, например, 0,05 или 4,0. Это число дает максимально возможную погрешность прибора, выраженную в **процентах** от наибольшего значения величины, измеряемой в данном диапазоне работы прибора. Так, для вольтметра, работающего в диапазоне измерений 0–30 В, класс точности 1,0 определяет, что указанная погрешность при положении стрелки в любом месте шкалы не превышает 0,3 В. Соответственно среднее квадратичное отклонение σ_{device} составляет 0,1 В.

Реальная погрешность прибора существенно зависит от условий окружающей среды, где установлен прибор. Например, погрешность электроизмерительных приборов зависит от температуры помещения и отличается от паспортной погрешности, которая обычно приводится для 20 $^{\text{o}}$С. Другой причиной погрешностей может быть электромагнитное излучение другого лабораторного оборудования, вибрация установки и т.д. При планировании эксперимента для повышения точности измерений может возникнуть необходимость в учете этих факторов.

Обычно цена наименьшего деления шкалы стрелочного прибора согласована с погрешностью самого прибора. Если класс точности используемого прибора неизвестен, за погрешность σ_{device} всегда принимают **половину** цены его наименьшего деления. Понятно, что при считывании показаний со шкалы нецелесообразно стараться определить доли деления, так как результат измерения от этого не станет точнее.

Предел допустимой погрешности цифрового измерительного прибора рассчитывают по паспортным данным, содержащим формулу для расчета погрешности именно данного прибора. При отсутствии паспорта за оценку погрешности σ_{device} принимают единицу наименьшего разряда цифрового индикатора.

Окончательный результат многократного измерения содержит в себе как случайную, так и приборную (систематическую) погрешности. Поскольку случайная погрешность уменьшается с увеличением количества измерений, целесообразно **сделать такое количество измерений**, чтобы

$$\left(\Delta x\right)_{case} << \theta, \tag{5.1}$$

т.е. чтобы случайной погрешностью можно было пренебречь по сравнению с приборной погрешностью. На практике достаточно, чтобы случайная погрешность была в 2–3 раза меньше систематической. В любом случае надо сделать 2–3 измерения, чтобы убедиться в том, что случайная погрешность действительно мала.

Если приборная и случайная погрешности близки по значению, то суммарная погрешность равна

$$\Delta x = \sqrt{\left(\Delta x_{case}\right)^2 + \left(\sigma_{device}\right)^2}\ . \qquad (5.2)$$

Поскольку случайную погрешность обычно оценивают с доверительной вероятностью 0,68, а θ – оценка максимальной погрешности прибора, то можно считать, что выражение задает доверительный интервал также с вероятностью не меньшей 0,68.

При выполнении однократного измерения оценкой погрешности результата служит $\Delta x = \theta/3$, учитывающая только предельно допустимую приборную погрешность.

6. Погрешности косвенных измерений

Пусть исследуемую величину *s* определяют по результатам прямых измерений других независимых физических величин, например, *x*, *y*, *z*, с которыми она связана заранее установленным функциональным математическим соотношением

$$s = f\left(x, y, z\right). \qquad (6.1)$$

Также известны окончательные результаты прямых измерений $\langle x\rangle \pm \Delta x$, $\langle y\rangle \pm \Delta y$, $\langle z\rangle \pm \Delta z$. Предполагается, что величины *x, y, z* являются случайными и к ним применимо нормальное распределение.

Тогда для среднего значения

$$\langle s\rangle = f\left(\langle x\rangle, \langle y\rangle, \langle z\rangle\right). \qquad (6.2)$$

Для погрешности

$$\Delta s = \sqrt{\left(f'_x\right)^2 \Delta x^2 + \left(f'_y\right)^2 \Delta y^2 + \left(f'_z\right)^2 \Delta z^2}\ , \qquad (6.3)$$

где f'_x, f'_y, f'_z – частные производные в точке $\left(\langle x\rangle, \langle y\rangle, \langle z\rangle\right)$.

Следует помнить, что при непосредственных расчетах в формулу необходимо подставлять погрешности Δx, Δy, Δz, найденные для одного и того же значения доверительной вероятности. Погрешность косвенного измерения $\langle s\rangle$ также будет соответствовать этому значению доверительной вероятности. Рекомендуется использовать значение вероятности $\alpha = 0{,}68$.

Сравнение между собой величин $f'_x\Delta x$, $f'_y\Delta y$, $f'_z\Delta z$ позволяет выделить «критический» фактор, процесс измерения которого дает наибольший вклад в погрешность Δs. Если, например, величина $f'_x\Delta x$ больше остальных более чем в 2–3 раза, то их вкладом в погрешность Δs можно пренебречь. Для повышения точности измерения величины s в первую очередь надо повышать точность измерения «критического» фактора.

Для наиболее распространенных зависимостей в табл. 3 приведены формулы для расчета погрешности.

Таблица 3

Связь погрешностей прямых и косвенных измерений

Рабочая зависимость	Формула погрешности
$s = A\cdot x \pm B\cdot y \pm C\cdot z$	$\Delta s = \sqrt{\left(A\cdot\Delta x\right)^2 + \left(B\cdot\Delta y\right)^2 + \left(C\cdot\Delta z\right)^2}$
$s = Ax^{\pm\alpha}y^{\pm\beta}z^{\pm\gamma}$	$\delta s = \sqrt{\left(\alpha\cdot\delta x\right)^2 + \left(\beta\cdot\delta y\right)^2 + \left(\gamma\cdot\delta z\right)^2}$
$s = \ln x$	$\Delta s = \Delta x / x$

$s = e^x$	$\delta s = \Delta x$
$s = A \cdot \sin\varphi$	$\Delta s = A \cdot \cos\varphi \cdot \Delta\varphi$

В таблице приняты следующие обозначения: Δ – для абсолютной погрешности, δ – для относительной погрешности, A, B, C, α, β, γ – постоянные, x, y, z, φ – результаты прямых измерений, s – результат косвенного измерения.

Одной из типичных ошибок планирования эксперимента является косвенное измерение величины s через разность измеряемых напрямую величин A и B, если их абсолютные значения много больше значения величины s (например, поиск толщины стенки трубы через измерение ее внешнего и внутреннего радиусов). При этом погрешность Δs будет того же порядка или может даже превосходить значение искомой величины s. Аналогично деление друг на друга больших величин или степень с маленьким основанием и большим показателем. Во всех этих случаях необходимо искать альтернативные пути.

7. Учет погрешности в записи окончательного результата измерения

Завершением обработки данных многократного прямого измерения при заданной доверительной вероятности являются два числа: среднее значение измеренной величины и его погрешность (полуширина доверительного интервала). Оба числа есть окончательный результат многократного измерения и должны быть совместно записаны в **стандартной форме**

$$x = \langle x \rangle \pm \Delta x, \tag{7.1}$$

которая содержит только **достоверные**, т.е. надежно измеренные, цифры этих чисел.

Порядок выполнения округления

Выполнить предварительную запись окончательного результата измерения в виде $x = \langle x \rangle \pm \Delta x$ и вынести за общую скобку одинаковые порядки среднего и погрешности, т.е. множитель вида 10^k, где k – целое число. Числа в скобках переписать в десятичном виде с использованием запятой, убрав тем самым оставшиеся порядковые множители.

Округлить в скобках число, соответствующее погрешности, до одной значащей (ненулевой) цифры слева, если эта цифра больше 2, или до двух первых цифр в противном случае. При округлении используют правило: если цифра, расположенная за оставляемой, меньше 5, то ее просто отбрасывают, иначе оставляемую цифру увеличивают на единицу. Если же отбрасываемая цифра равна 5, то наименьшая ошибка достигается при округлении по правилу Гаусса до ближайшего четного числа. К примеру, 4,5 округляют до 4, в то время как 3,5 также округляют до 4.

Округлить в скобках число, соответствующее среднему значению: последними справа оставляют цифры тех разрядов, которые сохранились в погрешности после ее округления.

Окончательно записать $x = \langle x \rangle \pm \Delta x$ с учетом выполненных округлений. Общий порядок и единицы измерения величины приводят за скобками – получена стандартная форма записи.

8. Линеаризация данных

Физические величины, определяющие результаты эксперимента, выступают в роли переменных и параметров некоторой функциональной зависимости, теоретически получаемой в рамках модели. После экспериментальной регистрации зависимости ее сравнивают с теоретической. Методом сравнения можно не только численно определить, т.е. измерить, значения физических величин, не измеряемых другим способом, но и вывести заключение об адекватности применения модели к эксперименту.

Проще всего проверить линейную зависимость:

$$y = ax + b, \tag{8.1}$$

где x, y – измеряемые величины, a, b – параметры зависимости. Если зависимость нелинейная, в некоторых случаях ее можно преобразовать в линейную (табл. 4).

Таблица №4

Способы линеаризации зависимостей

Вид нелинейной зависимости	Получаемая линейная зависимость	y	x	a	b
$v = k \cdot u^z$	$\ln v = z \ln u + \ln k$	$\ln v$	$\ln u$	z	$\ln k$
$v = k \cdot e^{zu}$	$\ln v = zu + \ln k$	$\ln v$	u	z	$\ln k$
$v = k \cdot e^{z/u}$	$\ln v = zu^{-1} + \ln k$	$\ln v$	u^{-1}	z	$\ln k$
$v = \dfrac{u}{k + zu}$	$v^{-1} = ku^{-1} + z$	v^{-1}	u^{-1}	k	z

Обращаем внимание на то, что после вычисления погрешностей величин a и b переход к погрешностям реальных физических величин k и z осуществляется по формулам для погрешностей косвенных измерений.

9. Метод наименьших квадратов

Этот метод является одним из наиболее распространенных приемов статистической обработки экспериментальных данных, относящихся к различным функциональным зависимостям физических величин друг от друга. В том числе он применим к линейной зависимости и позволяет получить достоверные оценки ее параметров a и b, а также оценить их погрешности.

Рассмотрим статистическую модель эксперимента, в котором исследуют линейную зависимость. Пусть проведено $n > 2$ парных измерений величин x и y: x_i, y_i, где $i = 1, ..., n$. По экспериментальным данным необходимо найти оценки параметров a и b, а также оценки их дисперсий σ_a^2 и σ_b^2. О природе экспериментальных погрешностей сделаем следующие предположения:

1. Значения x_i известны точно, т.е. без погрешностей.

2. Распределения величин y_i взаимно независимы, имеют одну и ту же дисперсию σ^2 и отвечают нормальному закону. Распределения y_i имеют средние значения $\bar{y}_i$, которые совпадают с точным значением функции $ax_i + b$.

3. Систематические погрешности отсутствуют. В частности, все промахи, т.е. точки, выходящие за интервал 3σ, отброшены.

Запишем функцию правдоподобия как вероятность реализации набора полученных экспериментальных данных:

$$L = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{\left(y_1 - (ax_1 + b)\right)^2}{2\sigma^2}\right\} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{\left(y_n - (ax_n + b)\right)^2}{2\sigma^2}\right\} =$$

$$= \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - (ax_i + b)\right)^2\right\}. \qquad (9.1)$$

Логарифмируем обе части:

$$\ln L = -\frac{n}{2}\ln 2\pi - \frac{n}{2}\ln \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - (ax_i + b)\right)^2.$$

Оценками a, b, σ^2 будет правильным считать значения, при которых L и $\ln L$ **максимальны**, т.е. реализуется наибольшая вероятность получения набора экспериментальных данных. Экстремум функции $\ln L$ находят дифференцированием:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial a}=0\,,\ \frac{\partial \ln L}{\partial b}=0\,,\ \frac{\partial \ln L}{\partial \sigma^2}=0. \qquad (9.2)$$

После дифференцирования система уравнений относительно искомых параметров примет вид

$$\sum_{i=1}^{n}\left[x_i\left(y_i-ax_i-b\right)\right]=0\,,$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-ax_i-b\right)=0\,, \qquad (9.3)$$

$$n\sigma^2=\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-ax_i-b\right)^2\,.$$

Вводя средние величины $\langle z\rangle=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}z_i$, получаем

$$a=\frac{\langle xy\rangle-\langle x\rangle\langle y\rangle}{\left\langle x^2\right\rangle-\langle x\rangle^2}\,,$$

$$b=\langle y\rangle-a\langle x\rangle=\frac{\left\langle x^2\right\rangle\langle y\rangle-\langle x\rangle\langle xy\rangle}{\left\langle x^2\right\rangle-\langle x\rangle^2}\,, \qquad (9.4)$$

$$\sigma^2=\left\langle y^2\right\rangle-\langle y\rangle^2-a^2\left(\left\langle x^2\right\rangle-\langle x\rangle^2\right).$$

Для получения несмещенной относительно точного значения оценки дисперсии (вследствие конечного числа измерений полученные значения параметров a и b отличаются от предельных) последнее выражение надо умножить на $n/(n-2)$:

$$\sigma^2=\frac{n}{n-2}\left[\left\langle y^2\right\rangle-\langle y\rangle^2-a^2\left(\left\langle x^2\right\rangle-\langle x\rangle^2\right)\right]. \qquad (9.5)$$

Оценим теперь дисперсии параметров. Преобразуем выражение для a:

$$a = \sum_{j=1}^{n} k_j y_j \text{, где } k_j = \frac{x_j - \langle x \rangle}{\sum_{j=1}^{n} \left(x_j - \langle x \rangle \right)^2} . \qquad (9.6)$$

После преобразования видно, что a получается как линейная комбинация взаимно независимых величин y_j, так как коэффициенты k_j заданы точно – согласно пункту 1 предположений о статистике изучаемых величин. Следовательно, параметр a распределен нормально, а его дисперсия $\sigma_a{}^2$ представляет собой линейную комбинацию дисперсий величин y_j с коэффициентами k_j^2 – это свойство сложения нормальных распределений уже встречалось при рассмотрении погрешностей косвенных измерений:

$$\sigma_a^2 = \sum_{j=1}^{n} k_j^2 \sigma^2 = \frac{n\sigma^2}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2} = \frac{\sigma^2}{n\left(\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 \right)} \qquad (9.7)$$

Подставляя выражение для дисперсии из формулы (9.5), получаем оценку для стандартного отклонения параметра a:

$$\sigma_a = \frac{1}{\sqrt{n-2}} \sqrt{\frac{\langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} - a^2} . \qquad (9.8)$$

Преобразуем выражение для b:

$$b = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i - a \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i . \qquad (9.9)$$

Параметр b также нормально распределен. Его стандартное отклонение:

$$\sigma_b = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n} + \langle x \rangle^2 \sigma_a^2} = \sigma_a \sqrt{\langle x^2 \rangle} . \qquad (9.10)$$

Обращаем внимание, что для перехода от величин σ_a и σ_b к **погрешностям** Δa и Δb их следует умножить на коэффициент Стьюдента:

$$\Delta a = t(\alpha, n-1)\sigma_a, \tag{9.11}$$
$$\Delta b = t(\alpha, n-1)\sigma_b,$$

где α – уровень значимости, n – количество парных измерений (см. табл. 2). Значение n – 1 берется в связи с тем, что в методе наименьших квадратов из экспериментальных данных находят не одну величину, а две – ***a*** и ***b***. Связь между ними уменьшает количество независимых случайных переменных, складывающихся в распределение Стьюдента.

Если линейная зависимость была получена из модельной путем линеаризации, переход к погрешностям реальных физических величин осуществляется по формулам для погрешностей косвенных измерений, после чего идет окончательная запись результата.

Описанный выше способ определения наилучшей линейной аппроксимации данных носит название **метода наименьших квадратов**, поскольку при данных значениях параметров достигается минимум величины «отклонения» прямой от экспериментальных данных:

$$S = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - (ax_i + b)\right)^2 . \tag{9.12}$$

Частным является случай, когда предполагается, что теоретическая линейная зависимость **проходит через начало координат**, т.е. имеет функциональный вид $y = kx$. Для определения величины параметра k и его погрешности используют формулы:

$$k = \frac{\langle xy \rangle}{\langle x^2 \rangle},$$

$$\sigma^2 = \frac{n}{n-2}\left(\langle y^2 \rangle - k^2 \langle x^2 \rangle\right), \tag{9.13}$$

$$\sigma_k = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n\left(\left\langle x^2\right\rangle - \left\langle x\right\rangle^2\right)}} = \frac{1}{\sqrt{n-2}}\sqrt{\frac{\left\langle y^2\right\rangle}{\left\langle x^2\right\rangle} - k^2}\ .$$

Одной из типичных ошибок является поиск значения параметра k через усреднение коэффициентов наклонов для разных точек, полученных в эксперименте:

$$k_{average} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{x_i}\ . \qquad (9.14)$$

Данное значение не является оптимальным, поскольку точки, расположенные ближе к началу координат, вносят больший вклад в конечное значение, чем точки на другом конце графика, тем самым искажая результат.

Иногда при обработке линейной зависимости необходимо найти **координату точки пересечения** графиком оси x:

$$c = -b/a\,. \qquad (9.15)$$

Соответствующая дисперсия

$$\sigma_c^2 = c^2\left(\frac{\sigma_a^2}{a^2} + \frac{\sigma_b^2}{b^2}\right). \qquad (9.16)$$

10. Статистическая проверка гипотез

Анализ результатов эксперимента с помощью математической статистики часто сводится к проверке справедливости предположений, или **гипотез**, относительно изучаемого физического явления и полученных в эксперименте данных. Насколько результат эксперимента соответствует известному табличному значению? Совпадают ли результаты на двух разных установках? Является ли данная модельная зависимость соответствующей изучаемому явлению? О том, как ответить на эти вопросы, рассказывается в этом разделе.

Общие положения

Правило, по которому принимается или отклоняется данная гипотеза, называется статистическим критерием. Построение критерия определяется выбором подходящей функции T от результатов наблюдений, которая служит мерой расхождения между опытными и гипотетическими значениями. Эта функция, являющаяся случайной величиной, называется статистикой критерия, при этом предполагается, что распределение вероятностей T может быть вычислено при допущении, что проверяемая гипотеза верна. По распределению статистики T находится значение T_0, такое, что если гипотеза верна, то вероятность неравенства $T > T_0$ равна α, где α – заранее заданный уровень значимости.

Если в конкретном случае обнаружится, что $T > T_0$, то гипотеза отвергается, тогда как появление значения $T \le T_0$ не противоречит гипотезе.

Гипотеза совпадения экспериментального среднего и известного значения

Рассмотрим набор результатов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ многократного измерения нормально распределенной величины x. Из этих данных получаем оценки $\langle x \rangle$ и $\sigma_{\langle x \rangle}$. Проверяется гипотеза о том, что $\langle x \rangle = x_0$, где x_0 – заданное значение измеряемой величины, точно известное, например, из расчетов или справочных таблиц.

Введем новую величину, содержащую как экспериментальное среднее, так и заданное значение:

$$t = \frac{\langle x \rangle - x_0}{\sigma_{\langle x \rangle}}. \qquad (10.1)$$

Если равенство $\langle x \rangle = x_0$ справедливо для $n \to \infty$, то распределение величины *t* при **конечном** количестве измерений *n* будет распределением Стьюдента.

Плотность вероятности распределения Стьюдента описывает выражение

$$\rho(t,n) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}}}{\sqrt{\pi(n-1)} \cdot \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}, \qquad (10.2)$$

где $\Gamma(m) = \int\limits_0^\infty y^{m-1} e^{-y} dy$.

Здесь *n* – количество проведенных измерений, *m* > 0.

Зная распределение $\rho(t,\ n)$, можно вычислить интервал $\left[-t(\alpha,\ n);\ +t(\alpha,\ n)\right]$, в который величина *t* попадет с заданной вероятностью α. Для этого необходимо решить уравнение

$$\int\limits_{-t(\alpha,n)}^{+t(\alpha,n)} \rho(t,\ n) dt = \alpha. \qquad (10.3)$$

Вероятность α определяет так называемый **уровень значимости**. Если значение $t = \dfrac{\langle x \rangle - x_0}{\sigma_{\langle x \rangle}}$ попадает в указанный интервал, то гипотеза о совпадении $\langle x \rangle$ и x_0 **справедлива** при уровне значимости α. Чем больше α, тем шире интервал, тем больше вероятность обнаружить в нем величину *t*, относящуюся к эксперименту при $\langle x \rangle = x_0$.

Найдем интервал возможного изменения величины $\langle x \rangle$. Воспользуемся неравенством

$$-t(\alpha,n) \le \frac{\langle x \rangle - x_0}{\sigma_{\langle x \rangle}} \le +t(\alpha,n),$$

$$\langle x \rangle - t(\alpha,n)\sigma_{\langle x \rangle} \le x_0 \le \langle x \rangle + t(\alpha,n)\sigma_{\langle x \rangle}. \qquad (10.4)$$

При попадании заданного значения x_0 в найденный интервал гипотезу о совпадении $\langle x \rangle$ и x_0 нужно расценивать как справедливую для уровня значимости α.

В измерениях принято использовать доверительную вероятность $\alpha = 0,68$, при которой в пределе при больших n задается интервал $\pm\sigma_{\langle x \rangle}$ вокруг $\langle x \rangle$. Для повышения достоверности сравнения используют доверительную вероятность $\alpha = 0,997$, которая задает более широкий интервал, в пределе стремящийся к $\pm 3\sigma_{\langle x \rangle}$.

Для малых n за погрешность прямого многократного измерения величины x естественно принимать $\Delta x = t(\alpha,n)\sigma_{\langle x \rangle}$, как и предлагалось при обсуждении погрешностей прямых измерений. Именно в интервале, задаваемом Δx, могут оказаться точные величины x_0, совпадающие с результатом измерения $\langle x \rangle$. В случае косвенного измерения результаты прямых измерений определяют погрешность результата косвенного измерения. При этом необходимо выбрать равный уровень значимости для результатов всех прямых измерений, который переносится на уровень значимости результата косвенного измерения.

Гипотеза совпадения двух независимых средних величин

Из двух независимых экспериментов получены две группы результатов многократных измерений $x_1, x_2, \ldots, x_{n1}$ и $y_1, y_2, \ldots, y_{n2}$ нормально распределенных величин x и y. После обработки найдены оценки $\langle x \rangle$, $\sigma^2_{\langle x \rangle}$ и $\langle y \rangle$, $\sigma^2_{\langle y \rangle}$. Проверяется гипотеза о том, что $\langle x \rangle = \langle y \rangle$.

Введем новую величину

$$t = \frac{\langle x \rangle - \langle y \rangle}{\sqrt{\sigma^2_{\langle x \rangle} + \sigma^2_{\langle y \rangle}}}. \tag{10.5}$$

Если равенство $\langle x \rangle = \langle y \rangle$ справедливо для $n_1 \to \infty$ и $n_2 \to \infty$, то при конечных значениях количеств измерений n_1 и n_2 распределение величины t близко к распределению Стьюдента, у которого

$$n = 1 + \frac{\left(\sigma^2_{\langle x \rangle} + \sigma^2_{\langle y \rangle}\right)^2}{\frac{\left(\sigma^2_{\langle x \rangle}\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(\sigma^2_{\langle y \rangle}\right)^2}{n_2 - 1}}. \tag{10.6}$$

При уровне значимости α гипотеза $\langle x \rangle = \langle y \rangle$ **подтверждена**, если $-t(\alpha,\ n) \le\ t\ \le +t(\alpha,\ n)$, чему соответствует доверительная вероятность α.

Гипотеза о линейности данных

После определения значений параметров с помощью метода наименьших квадратов необходимо проверить справедливость гипотезы о том, что экспериментально зарегистрированная зависимость является линейной в некоторых координатах. Фактически речь идет о **верификации** (проверке справедливости) используемого модельного описания. Обратимся к выражению, задающему остаточную сумму квадратов:

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{y_i - a x_i - b}{\sigma_{\text{пр}i}} \right)^2, \tag{10.7}$$

где в качестве a и b использованы их экспериментальные оценки, $\sigma_{\text{пр}i}$ – **приборная** погрешность отдельного измерения. В статистике обосновывается, что величина φ подчиняется распределению χ^2 (читается «хи-квадрат»), плотность вероятности которого

$$\rho_m\left(\chi^2\right)=\frac{1}{2^{\frac{m}{2}}\cdot\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}e^{-\frac{\chi^2}{2}}\left(\chi^2\right)^{\frac{m-2}{2}}, \qquad (10.8)$$

где $0<\chi^2<\infty$, а $m=n-3$ (n – количество парных измерений). Для распределения характерно совпадение среднего значения и индекса m.

Анализ гипотезы о справедливости интерпретации экспериментальной зависимости, как линейной, начинают с введения уровня значимости α, задающего интервал от 0 до $\chi^2(n,\alpha)$, в который величина φ попадает, если гипотеза справедлива. Для вычисления $\chi^2(n,\alpha)$ необходимо решить уравнение

$$\int_0^{\chi^2(n,\alpha)}\rho_m\left(\chi^2\right)d\left(\chi^2\right)=\alpha\,. \qquad (10.9)$$

Величины $\chi^2(n,\alpha)$ приведены в табл. 5.

Таблица №5

Границы интервалов $\chi^2(n,\alpha)$ для уровня значимости α (n – количество парных измерений)

n	α			
	0,75	**0,95**	**0,99**	**0,999**
4	1,3	3,8	6,6	10,8
5	2,8	6,0	9,2	13,8

6	4,1	7,8	11,3	16,3
7	5,4	9,5	13,3	18,5
8	6,6	11,0	15,1	20,5
9	7,8	12,6	16,8	22,5
10	9,0	14,1	18,5	24,3
11	10,2	15,5	20,1	26,1
12	11,4	16,9	21,7	27,9
13	12,6	18,3	23,2	29,6
14	13,7	19,7	24,7	31,3
15	14,9	21,0	26,2	32.9
16	16,0	22,4	27,7	34,6
17	17,1	23,7	29,1	36,1
18	18,3	25,0	30,6	37,7
19	19,4	26,3	32,0	39,3
20	20,5	27,6	33,4	40,8
30	31,5	40,1	47,0	55,5
50	56	68	76	87
100	109	124	136	149

Если неравенство $\varphi < \chi^2\left(n,\alpha\right)$ **не** выполнено, то гипотеза о линейности **отвергается**. Вместе с тем возможны другие причины несоблюдения неравенства – необходимо проверить положения, при которых правомерно применение метода наименьших квадратов.

Иногда возникает ситуация, когда нет сведений о приборной погрешности отдельных измерений. В этом случае для проверки гипотезы линейности можно использовать величину

$$\lambda = \frac{R}{\sqrt{1-R^2}}\sqrt{n-2}\,, \qquad (10.10)$$

где n – число измерений, R – коэффициент корреляции Пирсона, безразмерный индекс в интервале от –1,0 до 1,0 включительно, который отражает степень линейной зависимости между двумя множествами данных:

$$R = \frac{\operatorname{cov} xy}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \langle x\rangle\right)\left(y_i - \langle y\rangle\right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \langle x\rangle\right)^2 \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \langle y\rangle\right)^2}}. \tag{10.11}$$

В статистике обосновывается, что величина λ подчиняется *t*–распределению с *n*–2 степенями свободы. При выполнении условия $\lambda < \chi^2\left(n,\ \alpha\right)$ гипотеза о линейной зависимости **отвергается**.

11. Основы планирования эксперимента

Под планированием эксперимента понимается определение цели каждого эксперимента, число серий и измерений в каждой серии, достижение оптимума соотношения экономии материалов и адекватности проведенных измерений. Однако мало спланировать – необходимо еще так провести эксперимент и оформить его результаты, чтобы они могли быть адекватно восприняты другими исследователями и могли в случае необходимости подтвердить приоритет данного исследователя или лаборатории.

Определение необходимого числа измерений

При планировании эксперимента необходимо помнить, что каждое измерение – это затраты времени и ресурсов (трудовых, материальных, финансовых). В определении числа измерений надо учитывать следующие аспекты:

1. Возможность **пренебрежения коэффициентом Стьюдента** в вычислении погрешностей измерений. Согласно данным таблицы 2, это можно сделать при более чем 7–10 измерениях при уровне доверительной вероятности α = 0,68

(который используется по умолчанию) и при более чем 15–20 измерениях при уровне доверительной вероятности $\alpha = 0{,}95$.

2. Окончательный результат многократного измерения содержит в себе как случайную, так и приборную погрешности. Поскольку случайная погрешность уменьшается с увеличением количества измерений как $1/\sqrt{n}$, а приборная остается постоянной, целесообразно сделать столько измерений, чтобы

$$(\Delta x)_{case} << \theta, \tag{11.1}$$

т.е. чтобы **случайной погрешностью можно было пренебречь** по сравнению с приборной погрешностью θ.

Поскольку $\Delta x = \sqrt{(\Delta x_{case})^2 + (\sigma_{device})^2}$, можно установить, что мы можем пренебречь первым слагаемым, если $\Delta x_{case} < \sigma_{device}/k$ (часто полагают $k = 2$), для чего необходимо провести N измерений. Пусть уже проведено n измерений, и получена погрешность измерений σ_n (число измерений таково, что мы пренебрегли коэффициентом Стьюдента). Погрешность отдельного измерения можно оценить как

$$\sigma = \sigma_n \sqrt{n}\ .$$

Поскольку $\sigma_N = \sigma/\sqrt{N}$, $\sigma_N \le \sigma_{device}/k$, то

$$N \ge 4n \frac{\sigma_n^2}{\sigma_{device}^2}\ . \tag{11.2}$$

Для минимизации числа измерений используется **последовательный анализ**, т.е. такой способ статистической проверки гипотез, при котором необходимое число наблюдений не фиксируется заранее, а определяется в процессе самой проверки. Во многих случаях для получения столь же обоснованных выводов применение надлежащим образом подобранного способа последовательного анализа позволяет ограничиться значительно меньшим числом наблюдений (в среднем, т.к. число наблюдений при последовательном анализе есть величина случайная), чем при способах, в которых число наблюдений фиксировано заранее.

Пусть задача состоит в выборе между гипотезами H_1 и H_2 по результатам независимых наблюдений. Гипотеза H_1 заключается в том, что случайная величина X имеет распределение вероятностей с плотностью $f_1(x)$, гипотеза H_2 — в том, что X имеет плотность $f_2(x)$. Для решения этой задачи поступают следующим образом. Выбирают два числа A и B ($0 < A < B$). После первого наблюдения вычисляют отношение $\lambda_1 = f_2(x_1)/f_1(x_1)$, где x_1 — результат первого наблюдения. Если $\lambda_1 < A$, принимают гипотезу H_1; если $\lambda_1 > B$, принимают H_2, если $A \leq \lambda_1 \leq B$, производят второе наблюдение и так же исследуют величину

$$\lambda_2 = \frac{f_2(x_1) f_2(x_2)}{f_1(x_1) f_1(x_2)},$$

где x_2 — результат второго наблюдения, и т.д. С вероятностью, равной единице, процесс оканчивается либо выбором H_1, либо выбором H_2. Величины A и B определяются из условия, чтобы вероятности **ошибок первого и второго рода** (т. е. вероятность отвергнуть гипотезу H_1, когда она верна, и вероятность принять H_1, когда верна H_2) имели заданные значения α_1 и α_2.

Более подробную информацию можно найти в учебниках по математической статистике.

Ведение лабораторного журнала

Лабораторный журнал – официальный документ, имеющий юридическую силу, в котором в последовательном хронологическом порядке указываются условия проведения экспериментов и результаты измерений. Аккуратное ведение лабораторного журнала позволяет исследователю создать адекватный и поддающийся проверке отчет, защитить свой приоритет относительно сделанного им открытия.

Лабораторный журнал представляет собой тетрадь (журнал) с пронумерованными страницами, прошитыми страницами толстой ниткой, концы которой скреплены на последней странице сургучом с оттиском официальной печати учреждения. Данные следует вписывать ручкой, но не карандашом. Если в процессе занесения в журнал результатов эксперимента были позже обнаружены опечатки или фактические ошибки, они исправляются ручкой другого (красного) цвета, ставится дата и фамилия исправляющего. Конечно, эти требования несколько чрезмерны для выполнения студентами лабораторных работ, но и здесь желательны точность и аккуратность.

Каждый рабочий день в лабораторном журнале выделяется отдельно: дата в начале рабочего дня и заполнение (*Z*) до начала следующего (чтобы нельзя было в дальнейшем сделать записи этой датой). Если журнал общий для всей лаборатории, для каждого эксперимента указывают фамилии его участников. Также для эксперимента необходимо указывать цель, используемые материалы, условия проведения (температура, давление, напряженность магнитного поля, частота вращения и т.д.), продолжительность, описание трудноформализуемых параметров. Это делается как для того, чтобы опыт мог воспроизвести любой другой исследователь, так и для самого экспериментатора – впоследствии можно проанализировать ход эксперимента, наметить пути повышения точности измерений, продумать следующие эксперименты, учесть все факторы при оформлении научных отчетов и статей.

Перед проведением эксперимента исследователь должен заранее продумать роль различных факторов, стоимость используемых в эксперименте ресурсов, учесть возможные риски для экспериментатора и окружающих, принять необходимые меры безопасности. Все это надо заранее записать в лабораторный журнал, подготовить таблицы для записи однотипных данных.

Требования к оформлению научного отчета

Научный отчет о проведенных исследованиях является не менее важным, чем лабораторный журнал – по нему другие исследователи смогут ознакомиться в вашими результатами. Задача отчета – изложить цель, ход и результаты эксперимента в виде, в котором их наиболее удобно понять и проверить другим людям. В частности, это касается и отчетов о выполнении студентами лабораторных работ – их будут проверять преподаватели и использовать другие студенты.

Важным свойством научного (и любого другого) отчета является доверие к нему со стороны читателей. Это значит, что в отчете обязательно следует привести те экспериментальные или статистические данные, на которых основываются ваши выводы – при желании исследователь может повторить расчеты и проверить их достоверность и адекватность полученных вами результатов. Естественно, что они должны быть полностью перепроверены перед представлением отчета на суд научной общественности (или преподавателя).

В отчете нет необходимости рассказывать всю историю получения результатов, а также приводить данные экспериментов, которые соответствуют тупиковым ветвям исследований или не важны для анонсируемых результатов. Однако все актуальные данные должны быть приведены, независимо от того, свидетельствуют они за или против представленной теории.

При оформлении отчета стоит выделять те экспериментальные данные, результаты и идеи, которые получены другими исследователями и лабораториями. Заниматься плагиатом, т.е. присваивать себе авторство, небезопасно – в случае уличения исследователь может считать свою научную карьеру завершенной, а студент – не ждать хорошей оценки (и, возможно, ему придется переделывать отчет).

В отчете должны быть четко выделены следующие разделы.

Название отчета – как правило, приводится на титульной странице.

Данные о группе исследователей, выполнивших эксперимент, и лаборатория (предприятие), в котором он проводился.

Цель исследований – кратко формулируются основные задачи или необходимость достижения определенных результатов.

Экспериментальные данные – по аналогии с лабораторным журналом; необходимо указывать используемые материалы, условия проведения (температура, давление, напряженность магнитного поля, частота вращения и т.д.), продолжительность и другие параметры эксперимента, важные для его воспроизведения.

Теоретические выкладки, позволяющие читателям понять те модельные функциональные зависимости, в рамках которых происходит интерпретация экспериментальных данных.

Обработка экспериментальных данных – представление данных в графическом виде (более наглядном для понимания), оценка параметров функциональных зависимостей, их погрешностей, статистическая проверка гипотез об адекватности используемых моделей. При использовании программных пакетов указывайте их название, версию и значения численных параметров, используемых при обработке данных.

Результаты исследования – приводятся выводы о подтверждении или опровержении рассматриваемых гипотез. Следует использовать глаголы *исследованы*, *проверены*, *измерены* и т.п.

Список литературы – библиографические ссылки на те книги и статьи, из которых были использованы экспериментальные данные, результаты или идеи.

Для записи результатов большого количества однотипных измерений удобно использовать таблицы. С их помощью удается избежать ненужной многократной записи обозначения измеряемой величины, единиц измерения, используемых масштабных коэффициентов и т.п. В таблицы, помимо экспериментальных данных, могут быть сведены промежуточные результаты обработки этих данных. В заголовок таблицы заносятся размерности величин, характерные степени. Таблицы чертятся с помощью линейки и карандаша (если отчет рукописный). В таблице указывается порядковый номер каждого измерения.

Более наглядными, чем таблицы, являются графики зависимостей исследуемых физических величин. Графики дают визуальное представление о связи между величинами, что крайне важно при интерпретации полученных данных, так как графическая информация легко воспринимается, вызывает больше доверия, обладает значительной емкостью. На основе графика легче сделать вывод о соответствии теоретических представлений данным эксперимента.

При построении графика следует учитывать следующие характеристики.

Оси – графики, за редким исключением, строят в прямоугольной системе координат, где по горизонтальной оси (оси абсцисс) откладывают аргумент, независимую величину, а по вертикальной оси (оси ординат) – функцию, зависимую величину.

Масштаб по осям – численное значение физической величины, соответствующее единичному отрезку. Оси необязательно должны содержать начало координат – обычно учитывают минимальное и максимальное значение. При необходимости выбирают логарифмический или двойной логарифмический масштаб.

Подписи осей – название откладываемой величины, масштабный коэффициент.

Шкала – подписи к осям в виде числового масштаба, с учетом масштабного коэффициента. Обычно выбираются некие «круглые» числа с минимумом знаков после запятой.

Масштабная сетка – для удобства определения величин конкретных точек делают тонкие вертикальные и горизонтальные линии, которые являются продолжениями отметок шкалы.

Экспериментальные точки – должны быть отчетливо видны. Если на одном графике показаны несколько зависимостей, их надо выделить точками разного вида (кружочки, ромбики, квадратики и т.д.).

Проведение кривых – экспериментальные точки соединяют плавной кривой, чтобы они в среднем были одинаково расположены по обе стороны от проведенной кривой. Если известно математическое описание наблюдаемой зависимости, то теоретическая кривая проводится точно так же. Правильно построенная кривая должна заполнять все поле графика, что будет свидетельством правильного выбора масштабов по каждой из осей. Если же значительная часть поля оказывается незаполненной, то необходимо заново выбрать масштабы и перестроить зависимость.

Погрешности измерений – вокруг проставленной экспериментальной точки строят два отрезка, параллельные осям абсцисс и ординат. В выбранном масштабе длина каждого отрезка должна равняться удвоенной погрешности величины, откладываемой по параллельной оси. Центр отрезка должен приходиться на экспериментальную точку.

Название – под графиком должно быть приведено его название, поясняющее, к чему относится изображенная зависимость.

Все страницы, таблицы, формулы, схемы и графики должны быть **пронумерованы** (в порядке использования). В начале отчета обычно приводят содержание отчета. Если таблицы или графики имеют значительный размер и мешают связанному восприятию текста, их стоит вынести в **Приложения** и дать на них ссылку в тексте.

12. Контрольные задания и вопросы

1. Что такое абсолютная и относительная погрешности измерения?
2. Что такое приборная (систематическая), модельная и случайная погрешности?
3. Что характеризуют средним значением и стандартным квадратичным отклонением? Как эти величины оценивают исходя из экспериментальных результатов?
4. Почему нормальное распределение чаще других встречается в эксперименте?
5. Какой смысл придают понятиям доверительной вероятности и доверительного интервала?
6. С какой целью в окончательный результат многократного измерения вводят коэффициент Стьюдента?
7. Как количественно оценивают приборную погрешность?
8. Каким образом находят суммарную погрешность окончательного результата измерения, учитывающую приборную погрешность?
9. Перечислите правила округления и записи окончательного результата измерения в стандартной форме.
10. Какую модель использует метод наименьших квадратов и как она связана с его названием? Каков алгоритм метода?
11. С какой целью проводят статистический анализ результатов эксперимента?
12. Какая существует связь между коэффициентами Стьюдента и собственно распределением Стьюдента?
13. Опишите процедуру статистического сравнения двух значений одной и той же постоянной величины, полученных в независимых измерениях.
14. Как проверить гипотезу о совпадении двух независимых средних величин?
15. Как проверить гипотезу о линейности экспериментально полученной зависимости?
16. Перечислите основные требования к ведению лабораторного журнала и оформлению научного отчета.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Измерения в физике

1. *Лабораторные* работы по физике / Под ред. Л.Л. Гольдина. – М.: Наука, 1983.
2. *Лабораторный* практикум по общей физике. Т.3 / Под ред. Ю.М. Ципенюка. – М.: Изд-во МФТИ, 1998.
3. *Лабораторный* практикум по общей физике. Т.1 / Под ред. А.Д. Гладуна. – М.: Изд-во МФТИ, 2004.

Математическая статististika

4. *Агапьев* Б.Д., *Белов* В.Н., *Кесаманлы* Ф.П., *Козловский* В.В., *Марков* С.И. Обработка экспериментальных данных: Учеб. пособие / СПбГТУ. СПб., 2001.
5. *Горелова* Г.В. Теория вероятностей и математическая статистика в примерах и задачах с применением Excel. – М.: Феникс, 2005. – 476 с.
6. *Теория* вероятностей и математическая статистика. Базовый курс с примерами и задачам. – М.: Физматлит, 2002. – 223 с.

Статистическая проверка гипотез

7. *Крамер* Г. Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд. – М: РХД, 1975. – 648 с.
8. *Леман* Э.Л. Проверка статистических гипотез, пер. с англ. Ю. В. Прохорова. – 2-е изд., испр. – М.: Наука, 1979. – 408 с.

Последовательный анализ

9. *Блекуэлл* Д., *Гиршик* М. А. Теория игр и статистических решений, пер. с англ. – М.: Иностранная литература, 1958.
10. *Вальд* А. Последовательный анализ, пер. с англ. / Под ред. Б.А. Севостьянова – М.: Физматгиз, 1960.
11. *Ширяев* А.Н. Статистический последовательный анализ. – М.: Наука, 1969. – 231 с.

Планирование эксперимента

12. *Безарашвили* Г.С. Планирование эксперимента : (Крат. курс лекций для спец. "Катализ и техн. химия") – Тбилиси: Изд-во Тбил. гос. ун-та, 1989. – 108 с.
13. *Прохоров* В.Т. Планирование эксперимента: Учеб. пособие по дисциплине "Основы науч. исслед." / Моск. технол. ин-т. М, 1988. – 64 с.
14. *Джонсон* Н., *Лион* Ф. Статистика и планирование эксперимента в технике и науке: Методы планирования эксперимента. – М.: Мир, 1981. – 520 с.
15. *Красовский* Г.И., *Филаретов* Г.Ф. Планирование эксперимента. – Мн.: Изд-во БГУ, 1982. – 302 с.

Содержание