1998–1999 учебный год

Задачи для I курса

1. Доказать, что всякое непрерывное отображение окружности в прямую переводит некоторую пару диаметрально противоположных точек в одну точку.

2. Пусть $M = \left\{ f \in C[0,\pi] \,\middle|\, \int_0^\pi f(x)\sin x\,dx = \int_0^\pi f(x)\cos x\,dx = 1 \right\}$. Найти $\min\limits_{f\in M} \int_0^\pi f^2(x)\,dx$.

3. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — положительные числа и $a_1 + a_2 + \ldots + a_n < 1$. Доказать, что
$$\frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)(1-a_1)(1-a_2)\ldots(1-a_n)}{a_1 a_2 \ldots a_n (1 - a_1 - a_2 - \ldots - a_n)} \geqslant n^{n+1}.$$

4. Доказать, что при любом n существует сечение n-мерного куба $\left\{x \,\middle|\, |x_k| \leqslant 1, k = 1, \ldots, n\right\}$ двумерной плоскостью, являющееся правильным $2n$-угольником.

5. ’уществует ли функция $f(x)$, непрерывная на полуоси $(1, +\infty)$ и такая, что
$$\int_x^{x^2} f(t)\,dt = 1 \qquad \forall x \in (1, +\infty)\ ?$$

6. Найти матрицу третьего порядка $T(x) = T_0 + \dfrac{1}{x}T_1 + \ldots + \dfrac{1}{x^n}T_n$ (T_k — постоянные матрицы) такую, что при $x \neq 0$ $\det T(x) \equiv 1$, а матрицу
$$A(x) = T(x) \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{\sin x}{x} & e^{2x} & \dfrac{\sin x}{x^2} \\ x^3 & \dfrac{\ln(1+x)}{x} & \dfrac{\cos x}{x^2} \\ 0 & 0 & e^x \end{pmatrix}$$
можно доопределить в нуле так, что после этого она станет невырожденной и непрерывной в некоторой полной окрестности нуля.

Задачи для II–VI курсов

1. Доказать, что всякое непрерывное отображение окружности в прямую переводит некоторую пару диаметрально противоположных точек в одну точку.

2. Дано уравнение $y' = xy + f(x)$, где $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — непрерывная ограниченная функция. Найти необходимое и достаточное условие, которому должна удовлетворять функция $f(x)$, для того, чтобы уравнение имело решение $y(x) \to 0$ при $x \to \pm\infty$.

3. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — положительные числа и $a_1 + a_2 + \ldots + a_n < 1$. Доказать, что
$$\frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)(1 - a_1)(1 - a_2)\ldots(1 - a_n)}{a_1 a_2 \ldots a_n (1 - a_1 - a_2 - \ldots - a_n)} \geqslant n^{n+1}.$$

4. Доказать, что при любом n существует сечение n-мерного куба $\{x \,\big|\, |x_k| \leqslant 1, k = 1, \ldots, n\}$ двумерной плоскостью, являющееся правильным $2n$-угольником.

5. ’уществует ли функция $f(x)$, непрерывная на полуоси $(1, +\infty)$ и такая, что
$$\int_x^{x^2} f(t)\,dt = 1 \qquad \forall x \in (1, +\infty)\ ?$$

6. Найти матрицу третьего порядка $T(x) = T_0 + \dfrac{1}{x} T_1 + \ldots + \dfrac{1}{x^n} T_n$ (T_k — постоянные матрицы) такую, что при $x \neq 0$ $\det T(x) \equiv 1$, а матрицу
$$A(x) = T(x) \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{\sin x}{x} & e^{2x} & \dfrac{\sin x}{x^2} \\ x^3 & \dfrac{\ln(1+x)}{x} & \dfrac{\cos x}{x^2} \\ 0 & 0 & e^x \end{pmatrix}$$
можно доопределить в нуле так, что после этого она станет невырожденной и непрерывной в некоторой полной окрестности нуля.

Решения задач, I курс

1. Пусть отображение $f : S^1 \to \mathbb{R}$ непрерывно на единичной окружности комплексной плоскости. Рассмотрим на отрезке $[0, 1]$ непрерывную функцию $\varphi(t) = f\left(e^{\pi i(t+1)}\right) - f\left(e^{\pi i t}\right)$. ’огда $\varphi(0) = f(-1) - f(1)$, $\varphi(1) = f(1) - f(-1) = -\varphi(0)$, и по теореме Коши найдётся такая точка $t_0 \in [0, 1]$, что $\varphi(t_0) = 0$, т.е. $f\left(e^{\pi i t_0}\right) = f\left(-e^{\pi i t_0}\right)$.

2. Рассмотрим функцию $f_0(x) = \dfrac{2}{\pi}(\cos x + \sin x) \in M$. ’ак как $\forall f \in M$ $\int_0^\pi (f(x) - f_0(x))^2\,dx \geqslant 0$, то $\int_0^\pi f^2(x)\,dx \geqslant 2\int_0^\pi f(x) f_0(x)\,dx - \int_0^\pi f_0^2(x)\,dx = \dfrac{8}{\pi} - \dfrac{4}{\pi} = \dfrac{4}{\pi}$. Максимум достигается при $f(x) = f_0(x)$.

3. Положим $a_{n+1} = 1 - a_1 - a_2 - \ldots - a_n$, тогда $a_{n+1} > 0$, а неравенство, которое надо доказать, примет следующий вид

$$\frac{(1-a_1)(1-a_2)\ldots(1-a_{n+1})}{a_1 a_2 \ldots a_{n+1}} \geqslant n^{n+1}.$$

Применяя неравенство для средних, получим для каждого $i = 1, 2, \ldots, n+1$: $1 - a_i = a_1 + \ldots + a_{i-1} + a_{i+1} + \ldots + a_{n+1} \geqslant n \sqrt[n]{a_1 \ldots a_{i-1} a_{i+1} \ldots a_{n+1}}$. Перемножив эти неравенства, получим, что

$$(1-a_1)(1-a_2)\ldots(1-a_{n+1}) \geqslant n^{n+1} a_1 a_2 \ldots a_{n+1}.$$

4. Проведём через начало координат в $\mathbb{R}^n$ плоскость, порождённую векторами a и b. Она пересекает куб по множеству

$$\{\alpha a + \beta b \Big| \; |\alpha a_k + \beta b_k| \leqslant 1, \quad k = 1, \ldots, n\}.$$

Векторы a и b достаточно выбрать так, чтобы выполнялись следующие свойства:

1) $|a| = |b|$ и $(a, b) = 0$;
2) на плоскости с координатами (α, β) неравенства $|\alpha a_k + \beta b_k| \leqslant 1$, $k = \overline{1, n}$, задают правильный $2n$-угольник.

Оба свойства выполняются, например, при $a_k = \sin \dfrac{k\pi}{n}$, $b_k = \cos \dfrac{k\pi}{n}$:

$$(a, b) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \sin \frac{2k\pi}{n} = 0,$$

$$|a|^2 = \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \cos \frac{2k\pi}{n} = \frac{n}{2}, \qquad |b|^2 = \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \cos \frac{2k\pi}{n} = \frac{n}{2}.$$

5. Задача сводится к решению функционального уравнения $2xf(x^2) = f(x)$. Одно из его решений — $f(x) = \dfrac{A}{x \ln x}$. После подстановки в интеграл находим $A = \dfrac{1}{\ln 2}$.

6. Например (единственности, конечно, нет),

$$T(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{x} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{x} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{x} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{x^2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = T_2 T_1.$$

После умножения на T_1 уничтожается главная особенность в каждой строке и т.д. "актически это способ доказательства общего утверждения (лемма 'оважа из книги Хартмана «Обыкновенные дифференциальные уравнения»)

Решения задач, II–VI курсы

1. Пусть отображение $f : S^1 \to \mathbb{R}$ непрерывно на единичной окружности комплексной плоскости. Рассмотрим на отрезке $[0,1]$ непрерывную функцию $\varphi(t) = f\left(e^{\pi i(t+1)}\right) - f\left(e^{\pi it}\right)$. 'огда $\varphi(0) = f(-1) - f(1)$, $\varphi(1) = f(1) - f(-1) = -\varphi(0)$, и по теореме Коши найдётся такая точка $t_0 \in [0,1]$, что $\varphi(t_0) = 0$, т.е. $f\left(e^{\pi it_0}\right) = f\left(-e^{\pi it_0}\right)$.

2. Имеем $y(x) = e^{x^2/2}\left(\int_{x_0}^{x} e^{-t^2/2} f(t)\,dt + C\right)$. Если $y(x) \to 0$ при $x \to \pm\infty$, то

$$\int_{x_0}^{+\infty} e^{-t^2/2} f(t)\,dt = -C = -\int_{-\infty}^{x_0} e^{-t^2/2} f(t)\,dt,$$

откуда получаем необходимое условие

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} f(t)\,dt = 0.$$

Докажем, что при выполнении этого условия решение $y(x) = e^{x^2/2}\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} f(t)\,dt = -e^{x^2/2}\int_{x}^{+\infty} e^{-t^2/2} f(t)\,dt$ стремится к нулю при $x \to \pm\infty$. При $x \to -\infty$ имеем по правилу Лопиталя

$$|y(x)| \leqslant \frac{\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}|f(t)|\,dt}{e^{-x^2/2}} \sim \frac{e^{-x^2/2}|f(x)|}{-xe^{-x^2/2}} = -\frac{|f(x)|}{x} \to 0.$$

При $x \to +\infty$ используем представление

$$y(x) = -e^{x^2/2}\int_{x}^{+\infty} e^{-t^2/2} f(t)\,dt$$

и действуем аналогично.

3. Положим $a_{n+1} = 1 - a_1 - a_2 - \ldots - a_n$, тогда $a_{n+1} > 0$, а неравенство, которое надо доказать, примет следующий вид

$$\frac{(1-a_1)(1-a_2)\ldots(1-a_{n+1})}{a_1 a_2 \ldots a_{n+1}} \geqslant n^{n+1}.$$

Применяя неравенство для средних, получим для каждого $i = 1, 2, \ldots, n+1$: $1 - a_i = a_1 + \ldots + a_{i-1} + a_{i+1} + \ldots + a_{n+1} \geqslant n\sqrt[n]{a_1 \ldots a_{i-1} a_{i+1} \ldots a_{n+1}}$. Перемножив эти неравенства, получим, что

$$(1-a_1)(1-a_2)\ldots(1-a_{n+1}) \geqslant n^{n+1} a_1 a_2 \ldots a_{n+1}.$$

4. Проведём через начало координат в $\mathbb{R}^n$ плоскость, порождённую векторами a и b. Она пересекает куб по множеству

$$\left\{\alpha a + \beta b \,\middle|\, |\alpha a_k + \beta b_k| \leqslant 1, \quad k = 1, \ldots, n\right\}.$$

Векторы a и b достаточно выбрать так, чтобы выполнялись следующие свойства:

   1) $|a| = |b|$ и $(a, b) = 0$;
   2) на плоскости с координатами (α, β) неравенства $|\alpha a_k + \beta b_k| \leqslant 1$, $k = \overline{1,n}$, задают правильный $2n$-угольник.

Оба свойства выполняются, например, при $a_k = \sin\dfrac{k\pi}{n}$, $b_k = \cos\dfrac{k\pi}{n}$:

$$(a, b) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \sin\frac{2k\pi}{n} = 0,$$

$$|a|^2 = \frac{n}{2} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \cos\frac{2k\pi}{n} = \frac{n}{2}\,, \qquad |b|^2 = \frac{n}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \cos\frac{2k\pi}{n} = \frac{n}{2}\,.$$

5. Задача сводится к решению функционального уравнения $2xf(x^2) = f(x)$. Одно из его решений — $f(x) = \dfrac{A}{x\ln x}$. После подстановки в интеграл находим $A = \dfrac{1}{\ln 2}$.

6. Например (единственности, конечно, нет),

$$T(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\dfrac{1}{x} \\ 0 & 1 & -\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dfrac{1}{x} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\dfrac{1}{x} \\ 0 & 1 & -\dfrac{1}{x^2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = T_2 T_1.$$

После умножения на T_1 уничтожается главная особенность в каждой строке и т.д. "актически это способ доказательства общего утверждения (лемма ’оважа из книги Хартмана «Обыкновенные дифференциальные уравнения»)