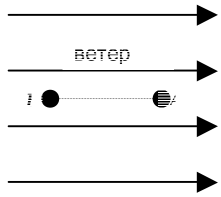
Физика

1. **Условие:** а) *(7 баллов)* На поверхности озера в точке A расположен виндсерфинг, который представляет собой доску с швертом (плавник внизу) и парусом, присоединённым к доске шарниром (см. рис.).



Может ли серфингист добраться из точки A в точку B, расположенную выше по ветру (см. рис.)? Ответ обосновать.
(Считайте, что сила, действующая на парус, перпендикулярна плоскости паруса, а за счёт сопротивления шверта доска может двигаться только вдоль своей оси. Также можно считать, что скорость виндсерфинга много меньше скорости ветра.).
б) *(5 баллов)* При движении в каком направлении виндсерфинг может развить максимальную скорость?
в) *(5 баллов)* По какой траектории должен двигаться виндсерфинг чтобы добраться из точки A в точку B за наименьшее время?

Ответ: а) да; б) перпендикулярно вектору скорости ветра; в) серфинг должен двигаться по боковым сторонам равнобедренного треугольника ABC, где $\angle CAB = \angle CBA = \frac{\pi}{3}$ (см. рис. 2).

Решение: Пусть $\vec{v}$ — скорость серфинга относительно воды. Рассмотрим систему отсчёта, связанную с серфингом. Пусть V — скорость ветра в этой системе. По условию задачи $v << V$, поэтому можно считать, что V приблизительно равна скорости ветра относительно воды (т.е. не зависит от $\vec{v}$).
Сила F, с которой воздух действует на парус, имеет проекции (см. рис. 1)

$$F_x = F(\alpha)\cdot\cos\alpha \text{ и } F_y = F(\alpha)\cdot\sin\alpha .$$

Поскольку сила F пропорциональна потоку воздуха через парус, можно считать, что

$$F(\alpha) \approx F_0 \sin\alpha .$$

Кроме того, на серфинг действует сила сопротивления воды, которую можно оценить следующим образом: $F_{water} \approx kv$, где k – коэффициент сопротивления воды.
Тогда условие движения с постоянной скоростью имеет вид:

$$F_y \sin\beta - F_x \cos\beta = kv .$$

Отсюда $v = \frac{F_0}{k}\sin\alpha\sin(\beta-\alpha) = \frac{F_0}{2k}\left(\cos(\beta-2\alpha)-\cos\beta\right)$.

Значение скорости максимально при $\alpha = \frac{\beta}{2}$ и равно

$$v_{\max} = \frac{F_0}{2k}(1-\cos\beta).$$

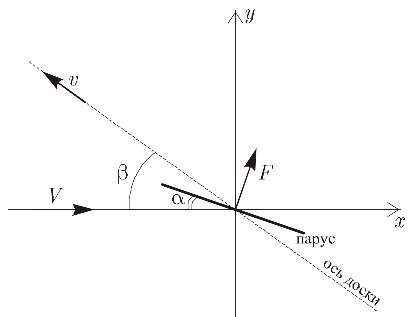


Рисунок.1

Чтобы добраться до точки назначения за кратчайшее время, нужно максимизировать проекцию скорости на оси X, т.е. $v\cos\beta$:

$$v_x = v_{\max}\cos\beta = \frac{F_0}{2k}(1-\cos\beta)\cos\beta = \frac{F_0}{2k}(1-\xi)\xi$$

Нетрудно показать, что v_x максимальна при $\xi = \frac{1}{2}$, т.е.

$$\cos\beta = \frac{1}{2}.$$

Двигаясь под заданным углом β к отрезку AB невозможно попасть в точку B, так что когда полвина пути будет пройдена, серфингисту следует сделать поворот (в точке C), после чего продолжить движение под углом β.
Таким образом, «оптимальная траектория» имеет следующий вид:

Примечание.

1) Вообще-то в случае реальной жизни виндсерфинг может развивать скорость больше скорости ветра. Рассмотрим такой случай. Из рисунка 2б и теоремы синусов видно, что $\frac{v}{\sin\theta}=\frac{V_0}{\sin(\psi-\theta)}$. Кроме того, имеет место неравенство $\theta<\varphi<\psi$ (первое неравенство означает, что сила тяги превосходит силу сопротивления воздуха; второе следует из того, что сила тяги перпендикулярна парусу). Тогда $v=\frac{V_0\sin\theta}{\sin(\psi-\theta)}<\frac{V_0\sin\psi}{\sin(\psi-\varphi)}$. Заметим, что разность $\psi-\varphi$ не может быть сколь угодно малой, т.к. иначе проекция силы тяги ветра на ось, параллельную шверту, будет недостаточно большой для разгона виндсерфинга. Поэтому можно считать, что $\psi-\varphi>\chi$, где $\chi=const>0$. Тогда неравенство для скорости принимает вид $v<\frac{V_0\sin\psi}{\sin\chi}$. Ясно, что правая часть максимальна при $\psi=\frac{\pi}{2}$, т.е. при движении перпендикулярно к ветру ограничение скорости — самое слабое. Более строгое решение требует учёта конкретного вида силы сопротивления (тяги) ветра.

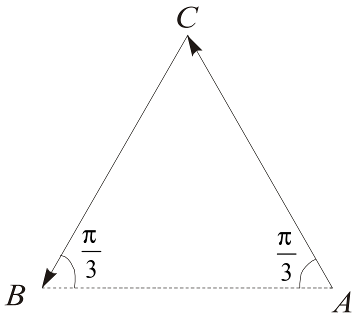


Рисунок.2

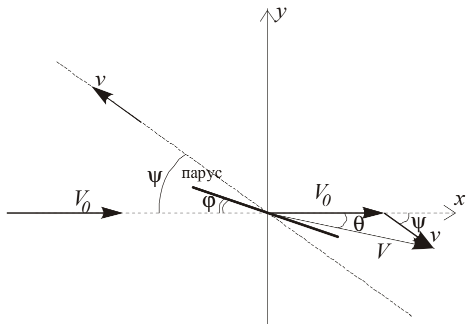


Рисунок.2б

2) В данном решении использовалось предположение о том, что $F(\alpha)=F_0\sin\alpha$. Однако, можно использовать и другие формулы, например, $F(\alpha)=F_0\sin^2\alpha$, особенно, если этому найдется какое-либо физическое обоснование.

2. Условие: *(4 балла)* Капле ртути радиусом $R=1\text{мм}$, находящейся в вакууме, сообщили заряд $Q=1\text{нКл}$. Найдите давление P внутри капли. Коэффициент поверхностного натяжения ртути $\sigma=510\,{}^{\text{мН}}\!/_{\text{м}}$.

Ответ: $P=\frac{2\sigma}{R}-\frac{kQ^2}{8\pi R^4}$

Решение: *вариант 1* Потенциал оболочки равен $\varphi=k\frac{Q}{R}$, потенциальная энергия кулоновского взаимодействия равна $W_p=\frac{\varphi Q}{2}$. Пусть под действием электростатического давления p_e радиус оболочки увеличился на малую величину ΔR. Тогда совершённая работа равна

$$A=p_e\cdot4\pi R^2\Delta R=-\Delta W_p.$$

$$\Delta W_p=\Delta\left(k\frac{Q^2}{2R}\right)=\left(k\frac{Q^2}{2R}\right)'\Delta R=-k\frac{Q^2\Delta R}{2R^2}.$$

Отсюда $p_e=k\frac{Q^2}{8\pi R^4}$.

В нашем случае есть ещё давление, создаваемое силами поверхностного натяжения.

Оно равно $p_2=\frac{2\sigma}{R}$. Полное давление равно $p=p_2-p_e=\frac{2\sigma}{R}-\frac{kQ^2}{8\pi R^2}$.

вариант 2

Так как ртуть проводящий материал весь помещенный на капельку заряд распределиться равномерно по поверхности. Возьмем элементарную единицу поверхности ΔS, на ней будет сконцентрирован заряд $\Delta Q=\frac{Q}{4\pi R^2}*\Delta S$, так как весь заряд равномерно заряженной сферы можно считать сконцентрированным в её центре получим, что сила действующая на элементарный объем равна $\Delta F = \frac{kQ^2}{4\pi R^4} * \Delta S$, значит давление, создаваемое электростатическими силами будет

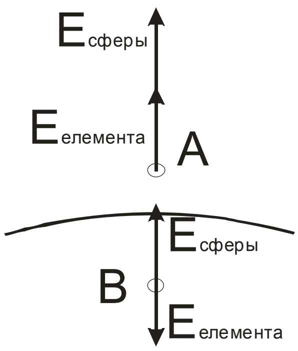
$$P_{эл} = \frac{kQ^2}{4\pi R^4}$$

Давление, связанное с поверхностным натяжением, выводиться из формулы Лапласа и равно:

$$P_{пов} = \frac{2\sigma}{R}$$

Тогда давление в нутрии капли: $P = P_{пов} - P_{эл} = \frac{2\sigma}{R} - \frac{kQ^2}{4\pi R^4}$

Ошибка в данных рассуждениях заключается в следующем. Мы берем бесконечно малый участок сферы и считаем, что создаваемое им поле очень мало, так как его создает бесконечно малый заряд, но ведь мы рассматриваем поле бесконечно близко к этому бесконечно малому заряду, а это снимает гарантию малости поля.



Правильное решение такой задачи:

Выберем элемент поверхности, возьмем точку A над поверхностью и току B под поверхностью, в данных точках суммарное поле складывается из поля всей сферы и поля этого элемента сферы (направления указанны на рисунке). Но в точке B, так как она находиться в нутрии сферы, поле равно нулю $\Rightarrow E_{сферы} = E_{елемента}$, а в точке A поле равно $\frac{kQ}{R^2} = E_{сферы} + E_{елемента} \Rightarrow E_{сферы} = \frac{kQ}{2R^2}$, на основании этого сила действующая на элементарный объем равна $\Delta F = \frac{kQ^2}{8\pi R^4} * \Delta S$, значит давление, создаваемое электростатическими силами будет

$$P_{эл} = \frac{kQ^2}{8\pi R^4}$$

Давление, связанное с поверхностным натяжением, выводиться из формулы Лапласа и равно:

$$P_{пов} = \frac{2\sigma}{R}$$

Тогда давление в нутрии капли: $P = \frac{2\sigma}{R} - \frac{kQ^2}{8\pi R^4}$

3. **Условие:** *(14 баллов)* В фильме «Армагеддон» на Землю летел метеорит (это грозило наступлением конца света), герои фильма решили его взорвать. Размером метеорит был со штат Техас и двигался со скоростью 40000 км/ч. Точка, в которой его надо было взорвать находилась на расстоянии 4 часа 53 минуты от земли. После взрыва метеорит распался на две равные части, получившиеся осколки пролетели мимо Земли. Какой энергии должен быть взрыв, чтобы обломки могли облететь землю? Оценить высоту приливной волны, которую они вызвали, если по фильму они пролетели на расстоянии 720 км от поверхности земли. Метеорит считать сделанным из железа.

Ответ: $Q = 1.1 \cdot 10^{26}$ *Дж*

Решение: Эта задача была творческой. Поэтому здесь приветствовались разные подходы, которые мог использовать решающий задачу. В данном варианте так же представлены ее возможные решения.

Определим численные значения, параметров, входящих в задачу:

Площадь Техаса $S_T = 695622\,км^2$.

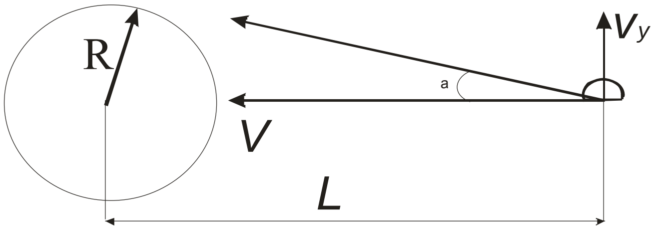
Метеорит виден пятном (для простоты будем считать его круглым) такого размера, тогда $\pi R_M{}^2 = S_T$,

тогда $R_M = 4.71 \cdot 10^5\,м$ => $M_M = \frac{4\pi}{3} R_M \rho_Ж = 3.43 \cdot 10^{21}\,кг$, где $\rho_Ж$ - это плотность железа.

Тогда для осколков $M_O = 1.72 \cdot 10^{21}\,кг$, $R_O \approx \frac{R_M}{\sqrt[3]{2}} = 3.73 \cdot 10^5\,м$

Минимальное расстояние от осколка до Земли $L = 7.2 \cdot 10^5\,м$ (считаем, что это расстояние от поверхности Земли до поверхности осколка).
Для Земли: $R_З = 6.4 \cdot 10^6\,м$, $M_З = 6 \cdot 10^{24}\,кг$

Первая часть: скорость метеорита $V = \dfrac{40000 \cdot 1000}{3600} = 1.1 \cdot 10^4\,м/с$, расстояние от Земли до точки взрыва $L = 2 \cdot 10^8\,м$. Оценим минимальную необходимую энергию взрыва, будем считать, что метеорит летит в центр Земли, вся энергия взрыва пойдет на добавление осколкам скорости (идеальный вариант, который и планировался в фильме), перпендикулярной по направлению к первоначальному движению, не будем учитывать гравитационного взаимодействия с Землей, то есть будем считать, что осколки полетят по прямолинейным траекториям. По закону сохранения импульса у осколков сохраниться скорость вдоль первоначального направления.



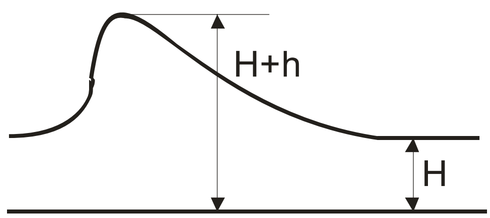
Чтобы обломки могли облететь Землю нужно чтобы: $\dfrac{V_y}{V} \geq \dfrac{R}{L} = tg\alpha$, значит минимальная энергия

$$Q = \frac{M\left(V^2 + V_y^2\right)}{2} - \frac{MV^2}{2} = \frac{MV_y^2}{2} = \frac{MV^2R^2}{2L^2} = 1.1 \cdot 10^{26}\,Дж$$

Оценим полученную величину в тротиловом эквиваленте, 1 килограмм тротилового эквивалента равен $4,6 \cdot 10^9\,Дж$, значит минимальная необходимая энергия $Q = 24000$ гигатонн тротилового эквивалента, для сравнения самый мощный термоядерный заряд испытанный на Земле имел энергию взрыва 0.1 гигатонн тротилового эквивалента. То есть в таких условиях взорвать метеорит не возможно.

Вторая часть: Определение высоты приливной волны. Приведем различные оценки.

1) Можно оценить из аналогии с приливными волнами, вызываемыми Луной.
   Расстояние до Луны: $l = 3.844 \cdot 10^8\,м$
   Масса Луны: $m = 7.2 \cdot 10^{22}\,кг$
   Для высоты приливной волны справедливо соотношение:
   $$h \propto \frac{m}{r^2}$$



   Тогда, $h = \dfrac{M_O}{(L+R_O)^2}\dfrac{l^2}{m}h_л \cong 6459м$, где $h_л = 2м$ - приливная волна, вызываемая Луной. Следует учесть, что осколок метеорита пролетит со скоростью, большей скорости Луны, и 6459м следует рассматривать как максимальную высоту.
2) Есть вариант оценки через уровень равного потенциала, то есть на поверхности воды под метеоритом и в точке максимально удаленной от метеорита гравитационный потенциал должен совпадать, расстояние от поверхности Земли до центра метеорита $l = L + R_O \approx 10^6\,м$ тогда:.

$$\frac{GM_З}{(R_З + h)} + \frac{GM_o}{(l-h)} = \frac{GM_З}{R_З}$$

$$\frac{M_З(l-h) + M_O(R_З + h)}{R_З l + h(l-R) - h^2} = \frac{M_З}{R_З}$$

$$h^2 M_З + h\left(-M_З R_З + M_O R_З + M_З R_З - M_З l\right) + M_З l R_З - M_З R_З l + M_O R_З^2 = 0$$

$$h^2 + h\left(\frac{R_З M_O}{M_З} - l\right) + \frac{R_З^2 M_O}{M_З} = 0$$

Подставим числовые значения:

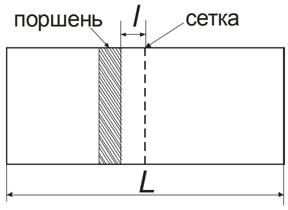
$$h^2 - h \cdot 10^6 + 1.2 \cdot 10^{10} = 0$$

$$h_1 \approx 1.2 \cdot 10^4 \, м = 12 км$$
$$h_2 \approx 9.8 \cdot 10^5 \, м \approx 100 км$$

Из двух вариантов реализуется первый, второй является решением для приливной волны, которая возникла бы на метеорите.

Замечания. Конец света все-таки наступил бы, вне зависимости от усилий героев фильма.

4. **Условие:** *(7 баллов)* В сосуде длины L, сечением S при давлении P и температуре T находиться газ. Сосуд разделен пополам легко проницаемой для газа сеткой и массивным, подвижным поршнем (массы m), занимающим нулевой объем. Поршень отводят в сторону на малое расстояние l и затем отпускают. Найти, сколько энергии выделится при абсолютно неупругом ударе поршня о сетку. Процесс движения поршня считать изотермическим.



Ответ: $Q = \dfrac{mV^2}{2} = \dfrac{2Pl^2S}{L}$

Решение: Рассмотрим произвольный момент движения поршня. Пусть поршень находиться на расстоянии x от сетки тогда по закону Менделеева-Клайперона получим, что разница давления на поршень со стороны двух частей сосуда равна:

$$\Delta P = P_1 - P_2 = \frac{\upsilon RT}{\left(\frac{L}{2} - x\right) * S} - \frac{\upsilon RT}{\left(\frac{L}{2} + x\right) * S} = \frac{2\upsilon RT}{S}\left(\frac{L + 2x - L + 2x}{(L - 2x) * (L + 2x)}\right)$$

$$\Delta P = \frac{2\upsilon RT}{S} * \frac{4x}{L^2 - 4x^2}$$

где υ - количество молей газа содержащихся в одной половине сосуда. В ввиду малости параметра l, членом $x^2 < l^2$ в знаменателе можно пренебречь, тогда по второму закону ньютона.

$$ma = \Delta PS = -\frac{8\upsilon RTx}{L^2}$$

Учтя, что $P = \dfrac{2\upsilon RT}{LS}$ и $a = x''$ получим уравнение гармонических колебаний

$$x'' + \frac{4PS}{Lm} x = 0$$

Решением гармонического уравнения является функция времени следующего вида

$$x(t) = A \sin\sqrt{\frac{4PS}{Lm}} t + B \cos\sqrt{\frac{4PS}{Lm}} t$$

так как в начальный момент времени $t = 0$ и $x = -l$, то тогда $-l = A * 0 + B * 1 = B$, значит

$$x(t) = A \sin\sqrt{\frac{4PS}{Lm}} t - l \cos\sqrt{\frac{4PS}{Lm}} t$$

Пусть $V(t)$ - функция зависимости скорости поршня от времени.

$$V(t) = x'(t) = A\sqrt{\frac{4PS}{Lm}} * \cos\sqrt{\frac{4PS}{Lm}} t + l\sqrt{\frac{4PS}{Lm}} * \sin\sqrt{\frac{4PS}{Lm}} t$$

В начальный момент времени скорость также нулевая значит:

$$0 = A * \sqrt{\frac{4PS}{Lm}} * 1 + l\sqrt{\frac{4PS}{Lm}} * 0 \Rightarrow A = 0 \Rightarrow V(t) = l\sqrt{\frac{4PS}{Lm}} \sin\sqrt{\frac{4PS}{Lm}} t$$

Так как сетка стоит по середине сосуда (положение равновесия для поршня), то скорость поршня в момент удара будет максимальной, значит

$$V_{удар} = l\sqrt{\frac{4PS}{Lm}}$$

Значит выделившаяся энергия

$$Q = \frac{mV^2}{2} = \frac{2l^2PS}{L}$$

вариант 2

Как и в первом варианте рассмотрим произвольный момент движения поршня. Пусть поршень находиться на расстоянии x от сетки тогда по закону Менделеева-Клайперона получим, что разница давления на поршень со стороны двух частей сосуда равна:

$$\Delta P = P_1 - P_2 = \frac{\upsilon RT}{\left(\frac{L}{2} - x\right) * S} - \frac{\upsilon RT}{\left(\frac{L}{2} + x\right) * S} = \frac{2\upsilon RT}{S}\left(\frac{L + 2x - L + 2x}{(L - 2x) * (L + 2x)}\right)$$

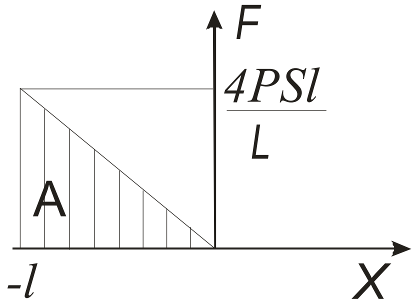
$$\Delta P = \frac{2\upsilon RT}{S} * \frac{4x}{L^2 - 4x^2}$$

где υ - количество молей газа содержащихся в одной половине сосуда. В ввиду малости параметра l, членом x^2 в знаменателе можно пренебречь, тогда:

$$F = \Delta PS = -\frac{8\upsilon RTx}{L^2}$$

Учтя, что $P = \frac{2\upsilon RT}{LS}$ получим:

$$F = -\frac{4PxS}{L} \quad F_{\max} = \frac{4PlS}{L}$$



Мы видим, что сила прямо пропорциональна расстоянию до сетки, представим эту зависимость графически:

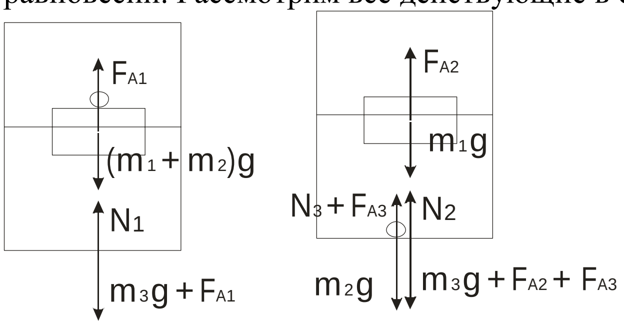
Площадь под графиком будет равна совершенной над поршнем работе, и, следовательно, равна выделившейся при ударе энергии, значит:

$$Q = \frac{4PlS}{L} * l * \frac{1}{2} = \frac{2Pl^2S}{L}$$

5. **Условие:** *(7 баллов)* На небольшом астероиде находятся равноплечные весы. На них стоят 2 сосуда с водой одинаковой массы. В каждом плавает по одному одинаковому деревянному бруску. Система уравновешена. В первый сосуд на брусок кладут свинцовый шарик массы m. Во второй сосуд такой же свинцовый шарик кладут на дно. В какую сторону перевесят весы и почему.

Ответ: -

Решение: Массы, находящиеся в чашках равны, значит реакции опоры со стороны дна обоих чашек равны (для системы вода, брусок, шарик сила Архимеда является внутренней и не может влиять на суммарный вес системы), то есть при равных плечах система должна была бы сохраниться в равновесии. Рассмотрим все действующие в системе силы подробней:



Помним про третий закон Ньютона о том, что в покоящихся системах любая сила имеет противодействующую силу равную по величине и противоположную по направлению.

m_1, m_2, m_3 – массы бруска, шарика и воды.

Рассмотрим случай, когда шарик положили на брусок:

Силы, действующие на шарик и брусок:

$F_{A1} = (m_1 + m_2)g$. Силы, действующие на воду, с учетом того, что брусок и шарик действуют на воду с силой равной F_{A1}:

$N_1 = m_3 g + F_{A1} = (m_1 + m_2 + m_3)g$, где N_1 - сила реакции дна чаши.

Рассмотрим случай когда шарик положили на дно:

Силы, действующие на брусок: $F_{A2} = m_1 g$

Силы действующие на шарик $N_3 + F_{A3} = m_2 g$, где N_2 -сила реакции чаши на шарик.

Силы, действующие на воду, с учетом того, что брусок и шарик действуют на воду с силами F_{A1} и F_{A3}: $N_2 = m_3 g + F_{A2} + F_{A3}$, где N_2 -сила реакции чаши на воду.
Суммарная реакция чаши равна:
$N_2 + N_3 = m_{3g} + F_{A2} + F_{A3} + m_2 g - F_{A3} = (m_1 + m_2 + m_3) g = N_1$.
Значит, вес обоих чашек совпадает.
Но в той чашке, где шарик лежит на дне, центр масс окажется ближе к центру астероида и гравитационное притяжение шарика в этой чашки окажется больше чем в той чашке, где шарик положили на брусок.
Решение засчитывалось и в случаи расчета равенства сил, и в случаи, когда указывали на разницу гравитационного притяжения.
Оценим, какой чувствительностью должны обладать весы, чтобы заметить разницу:

$$\Delta P = \frac{GMm_ш}{R^2} - \frac{GMm_ш}{R^2 + 2Rh + h^2}$$

где ΔP - разница веса чашек, G - гравитационная постоянная, M - масса астероида, $m_ш$ - масса свинцового шарика, R - радиус астероида, h - разница по высоте между шариками, будем считать, что $R >> h$.
Пренебрегая h^2, получим:

$$\Delta F = GMm_ш \left(\frac{2h}{R^3 + 2R^2 h} \right)$$

В то время как вес одной чашки с шариком на дне будет:

$$P = \frac{GM(m_в + m_ш)}{R^2}$$

где $m_в$ - масса воды, массу бруска для простоты не учитываем, тогда:

$$\frac{\Delta F}{P} = \frac{2m_ш h}{(m_в + m_ш)(R + 2h)}$$

Если посчитать, что радиус астероида 100 м, масса воды 1 кг, масса шарика 0.1 кг, а разница по высоте у шариков 0.1 м, то получим:

$$\frac{\Delta F}{P} \approx 1.8 * 10^{-4}$$

Значит, чтобы в поставленных нами условиях выявить разницу необходимы весы, измеряющие с точностью до сотых долей процента от измеряемой величины.

6. Условие: *(10 баллов)* Целесообразно ли делать ручной секундомер с точностью 0.01с? (Следует экспериментально определить время реакции человека).

Ответ: делать ручной секундомер целесообразно

Решение: Проведем опыт по определению реакции 2-х людей с помощью линейки, описанный в условии задачи.

	h_1	t_1	h_2	t_2
1	7,50	0,12	11,50	0,15
2	7,50	0,12	13,00	0,16
3	~~3,00~~	0,08	~~5,50~~	0,10
4	7,00	0,12	14,00	0,16
5	6,50	0,12	9,50	0,14
6	~~13,00~~	0,16	10,00	0,14
7	9,00	0,14	7,00	0,12
8	7,50	0,12	7,00	0,12
9	11,00	0,15	~~18,00~~	0,19
10	12,00	0,16	12,00	0,16
Сред		0,13		0,15

1) проводим 10 измерений, результаты которых представим в виде таблицы.
2) Вычеркнем самое большое и самое маленькое значение в обоих случаях.
3) Считаем средний результат для обоих случаев
4) Теперь рассчитаем погрешность измерений как среднеквадратичное отклонение:

$$\Delta t_1 = \sqrt{\frac{\sum_i (t_{сред} - t_i)^2}{8}} = 0.015 \quad \Delta t_2 = \sqrt{\frac{\sum_i (t_{сред} - t_i)^2}{8}} = 0.017$$

5) Получаем следующий результат
$t_1 = 0.13 \pm 0.015 \quad t_2 = 0.15 \pm 0.017$
6) Вывод: человеческая реакция на ожидаемое событие измеряется десятыми долями секунды. Следовательно ручной секундомер должен измерять время с точностью не вносящей

дополнительной погрешности на ряду с погрешностью реакции человека, значит погрешность секундомера должна быть примерно в 10 раз меньше погрешности реакции, следовательно делать секундомер с точностью 0.01с целесообразно.

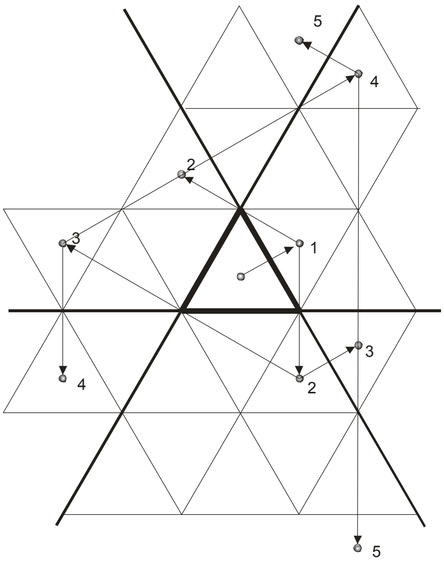
7. **Условие:** *(8 баллов)* Дан равносторонний треугольник из зеркал, в его центре находится камешек. Сколько изображений увидит наблюдатель, находящийся перпендикулярно плоскости рисунка. Как изменятся расстояния между изображениями, если камень переместить на сторону треугольника. Если считать, что камень и его изображение, которого он касается, являются одной группкой, вычислить, какое максимальное количество камней в одной группке можно увидеть с помощью такой системы.

Ответ: 1) Наблюдатель увидит бесконечно много изображений.

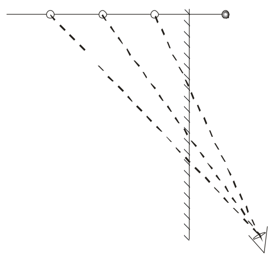
2) $l = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, **(где *a* – это сторона треугольника).**

Если начать двигать камень в одну из сторон, то расстояние будет уменьшаться, и в при постановке камня в угол получится группка из 1 камня и 5 изображений

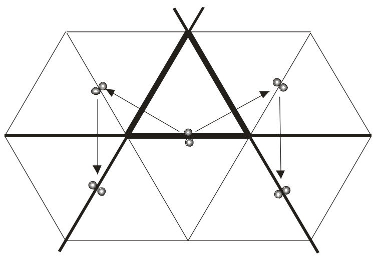
3) 6



Решение: 1) Рассмотрим механизм отражения от такой системы зеркал. Для наглядности будем рассматривать только 1 переотражение. На рисунке сначала рассматривается первое зеркало, камень отражается от него, потом изображение камня (1) отражается от 2-х оставшихся зеркал. Затем изображение (2) отражается от двух оставшихся зеркал. Далее по тому же механизму будут происходить повторные переотражения.(По такому принципу работает калейдоскоп. Однако, в реальной жизни при каждом отражении от зеркала часть света отражается, а часть поглощается, поэтому, вследствие затухания отражений получается не бесконечно много). При этом изображения не будут совпадать, т.к. если посмотреть на зеркало в плоскости рисунка, то видно, что каждое изображение будет видно на зеркале в своем месте.

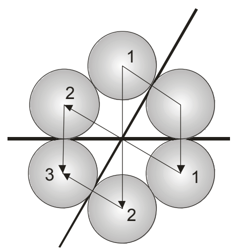


2) Если поместить камень на середину грани, то расстояние между ним и самым ближним изображением будет равно 2-м толщинам зеркал (в нашем случае зеркала идеальные и расстояние равно 0), расстояние между получившейся группкой и ближайшей к ней будет равно высоте треугольника:



$$l = \frac{a\sqrt{3}}{2},$$ (где a – это сторона треугольника).

Если начать двигать камень в одну из сторон, то расстояние будет уменьшаться, и в при постановке камня в угол получится группка из 1 камня и 5 изображений. Расстояния между двумя такими группками будут равны 2-м высотам треугольника.



1) Если поместить камень в угол то получится следующее. Сперва он просто отразится от зеркал и появятся изображения (1). Потом эти изображения отразятся от второго для них зеркала и появятся изображения (2), эти изображения снова переотразятся от второго для них зеркала и совпадут.

8. **Условие:** *(5 баллов)* Канат перекинут через блок. Перепад высот между канатными бухтами равен H. Чему равна скорость каната? Канат считать бесконечно длинным.

Ответ: $V = \sqrt{2gH}$

Решение:

вариант 1 правильное решение.

если рассмотреть ситуацию когда весь канат проделал путь из верхней бухты в нижнею, то изменение его энергии равно изменению его потенциальной энергии MgH , которая перешла в кинетическую значит:

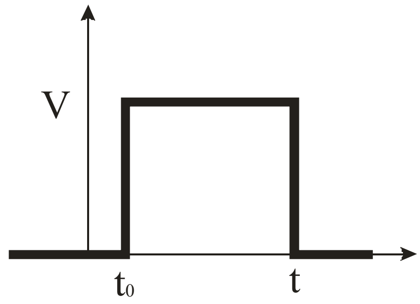
$$\frac{MV^2}{2} = MgH \Rightarrow V = \sqrt{2gH}$$

вариант 2 не правильное решение.

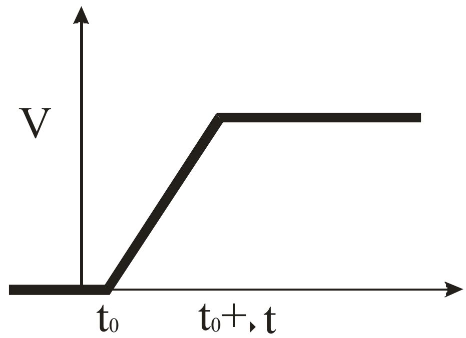
избыточная сила которая действует на канат равна $F = \rho Hg$, где ρ - линейная плотность каната, возьмем время Δt за это время новая масса $\Delta m = \rho V * \Delta t$ прейдет в движение, значит запишем закон сохранения импульса:

$$F\Delta t = \Delta mV \Rightarrow \rho Hg\Delta t = \rho V^2 \Delta t \Rightarrow V = \sqrt{Hg}$$

Где же ошибка в этих рассуждениях? Рассмотрим график зависимости скорости рассматриваемой массы Δm от времени:



То есть у рассматриваемой массы в момент времени t_0 скорость очень быстро достигает значения V , а потом в момент t , скорость очень быстро падает до нуля, на фоне времени $t - t_0$, бесконечно малым временем разгона и торможения можно пренебречь. Но в нашем случаи рассматривается бесконечно малый промежуток Δt , причем именно в момент разгона. То есть мы получаем бесконечно большое ускорение, бесконечно малый отрезок времени и бесконечно малую массу приведенную в движение. Рассмотрим еще один график зависимости массы Δm от времени. Считаем, что сила, действующая на Δm постоянна, а значит и ускорение Δm постоянно.



Значит масса ,Δm которая приходит в движение за момент времени Δt , равна

$$\Delta m = \frac{a * \Delta t^2 * \rho}{2} = \frac{V\rho * \Delta t}{2},$$

И по закону сохранения импульса получим:

$$F\Delta t = \Delta mV \Rightarrow \rho Hg\Delta t = \frac{\rho V^2 \Delta t}{2} \Rightarrow V = \sqrt{2Hg}$$

Матаматика

1. **Условие:** *(7 баллов)* Приведите пример многочлена $P(x)$ степени 2007, для которого выполняется тождество $P(x) + P(1–x) = 1$.

Ответ: В качестве такого многочлена можно взять, например, P(x) =a (x-0.5)^{2007} +0.5 (1), a – любой отличный от 0 коэффициент

Решение: Из условия следует, что график функции, заданной многочленом P(x), обладает центральной симметрией относительно точки с координатами (0.5,0.5). После этого легко догадаться, что многочлен может иметь вид (1).

2. **Условие:** *(7 баллов)* Какой множитель в произведении $100!\cdot 99!\cdot 98!\cdot\ldots\cdot 3!\cdot 2!\cdot 1!$ нужно вычеркнуть, чтобы получить точный квадрат (т.е. квадрат некоторого натурального числа)?

Ответ: Вычеркнуть нужно 50!

Решение:
$$100!\cdot 99!\cdot\ldots\cdot 2!\cdot 1! = (100\cdot 99!)\cdot 99!\cdot(98\cdot 97!)\cdot 97!\cdot(96\cdot 95!)\cdot 95!\cdot\ldots\cdot(4\cdot 3!)\cdot 3!\cdot 2 =$$
$$100\cdot(99!)^2\cdot 98\cdot(97!)^2\cdot 96\cdot(95!)^2\cdot\ldots\cdot 4\cdot(3!)^2\cdot 2 = a^2\cdot 100\cdot 98\cdot 96\cdot\ldots\cdot 2 = a^2\cdot 2^{50}\cdot 50!,$$ где

$a = 99!\cdot 97!\cdot 95!\cdot\ldots 3!$. Из последнего выражения следует, что вычеркнуть нужно 50!, тогда исходное выражение будет квадратом числа ($a\cdot 2^{25}$)

3. **Условие:** *5 баллов)* Из шахматной доски убрали две угловых чёрных клетки. Можно ли покрыть оставшиеся клетки доски костями для домино? Считать, что одной костью для домино можно покрыть любые две соседних клетки.

Ответ: нет

Решение: Если каждую кость домино раскрасить в 2 цвета, то получится, что одного из цветов на доске не хватит, для того, чтобы кость лежала и на белом и на черном.

4. **Условие:** *(5 баллов)* Два хулигана бегут по эскалатору метро, причем скорость второго в k раз больше, чем первого. Пробежав эскалатор, первый насчитал N ступенек, а второй M ступенек. Найти количество ступенек на эскалаторе и скорость его движения, если скорость первого хулигана V.

Ответ: $K = \dfrac{L}{l} = \dfrac{NM(1-k)}{Nk-M}$ $\quad V_э = \dfrac{Vk(M-N)}{Nk-M}$

Решение: Будем находиться в неподвижной системе координат тогда время, потраченное на пробег эскалатора, будет:

$$T_1 = \frac{L}{V+V_э} \text{ - для первого хулигана}$$

$$T_2 = \frac{L}{kV+V_э} \text{ - для второго хулигана}$$

где $V_э$ - скорость эскалатора.

Теперь в системе отсчета хулиганов им кажется, что они пробежали расстояния:

$$L_1 = T_1\cdot V = \frac{LV}{V+V_3} \text{ - первый хулиган}$$

$$L_2 = T_2\cdot V = \frac{LkV}{kV+V_3} \text{ - второй хулиган}$$

пусть l - длина одной ступеньки тогда $L_1 = l\cdot N$, а $L_2 = l\cdot M$, следовательно:

$$Nl = \frac{LV}{V+V_э}$$

$$Ml = \frac{LkV}{Vk+V_э}$$

Решаем данную систему уравнений.

$$\frac{N}{M} = \frac{Vk+V_э}{k(V+V_э)} \Rightarrow NkV + NkV_э = MkV + MV_э \Rightarrow V_э = \frac{Vk(M-N)}{Nk-M}$$

$$l = \frac{L}{N\left(1+\frac{k(M-N)}{Nk-M}\right)} = \frac{L(Nk-M)}{NM(1-k)}$$

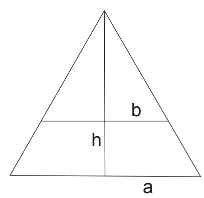
Пусть K - количество ступеней в эскалаторе: $K = \frac{L}{l} = \frac{NM(1-k)}{Nk-M}$

5. **Условие:** *(12 баллов)* Доказать, что для любых 2-х непересекающихся выпуклых многоугольников на плоскости можно провести прямую, разбивающую каждый из них на две равновеликие части.

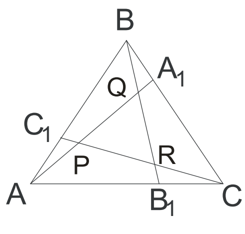
Ответ: -

Решение: 1) Лемма. Сначала докажем, что из любой точки плоскости можно провести хотя бы 1 прямую, которая будет делить данный выпуклый многоугольник (пока рассмотрим 1 многоугольник вместо двух) на 2 равновеликие части. Зафиксируем точку на плоскости вне данного многоугольника. Будем проводить прямые из этой точки, меняя угол между этими прямыми и некоторой фиксированной прямой, проходящей через данную точку. Рассмотрим отношение площадей частей многоугольника, на которые делит его прямая, в зависимости от угла. Легко доказать, что эта функция непрерывна и равна 0 до некоторого значения угла, когда прямые начнут пересекать многоугольник. После этого (мы непрерывно изменяем угол) функция монотонно возрастает вплоть до значения 1. Т.к. эта функция непрерывна, то по теореме о промежуточном значении она принимает все действительные значения между 0 и 1, а, следовательно, и значение 0.5, ч.т.д. (для леммы)

2) Теперь для 2-х многоугольников. Так как они по условию не пересекаются и оба выпуклы, то можно провести прямую так, чтобы она не пересекала ни один из многоугольников, но при этом многоугольники лежали бы в разных полуплоскостях относительно этой прямой (тут, пожалуй, необязательно брать именно такую прямую - можно ограничиться любой прямой, не пересекающей ни один из этих многоугольников), обозначим эту прямую L. Для любой точки этой прямой L верна Лемма (см. 1)) Проводя из каждой точки этой прямой прямые, делящие 1-й многоугольник пополам (а они существуют согласно лемме), будем смотреть отношение частей, на которые каждая из этих прямых делит 2-й многоугольник, как функцию, например, точки на прямой L. Эта функция непрерывна (причем если точка на прямой L пробегает по всей прямой, то проводимые нами прямые заметут всю плоскость) => принимает все значения от 0 до 1. Поэтому существует точка, для которой эта функция равна 0.5, ч.т.д.



Замечание: Очень часто приходили ответы, связанные с поиском центра масс у многоугольника. Прямая, проходящая через центр масс прямоугольника не делит его на 2 равные по площади части. Яркий пример тому – рассмотрим правильный треугольник. Центр масс у него находится на пересечении медиан. Рассмотрим прямую, проходящую через центр масс и параллельную одной из сторон. Тогда площадь получившегося треугольника $S_{треугольника} = \frac{1}{3}h \cdot b$, а площадь трапеции $S_{трапеции} = \frac{a+b}{2} \cdot \frac{h}{3}$. Без каких-либо вычислений видно, что для треугольника $\frac{a+b}{2} \neq b$.



6. **Условие:** *(10 баллов)* Дан треугольник ABC. На каждой его стороне отметили по 2 точки так, чтобы они делили сторону на 3 равные части. Обозначим эти точки A1, A2, B1,B2,C1,C2, например, так: (по часовой стрелке) A,C1,C2,B,A1,A2,C,B1,B2. После этого провели отрезки AA1, BB1, CC1. Точки пересечения этих отрезков внутри треугольника обозначим P,Q,R. Найти, во сколько раз площадь треугольника PQR меньше площади треугольника ABC.

Ответ: В 7 раз меньше.

Решение:

$S_{\Delta ABA_1} = S_{\Delta BCB_1} = S_{\Delta ACC_1} = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC}$, так как у каждого из треугольников одна сторона в три раза меньше чем у треугольника ABC, а высота, опущенная на эту сторону, общая.

$$S_{\Delta PQR}=S_{\Delta ABC}-S_{\Delta BRC}-S_{\Delta CPA}-S_{\Delta BQB}=S_{\Delta ABC}-\left(\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}-S_{\Delta RBC}\right)-\left(\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}-S_{\Delta AQB}\right)-\left(\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}-S_{\Delta CPA}\right)=$$

$$=S_{\Delta RBC}+S_{\Delta AQB}+S_{\Delta PAC}$$

Рассмотрим треугольник CC_1A: проведем в нем прямую $C_1H||BB_1$, тогда по теореме Фалеса

$\frac{AH}{HB_1}=\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{1}{2}\Rightarrow HB_1=\frac{2}{3}AB_1=\frac{4}{9}AC$, по той же теореме $\frac{C_1R}{RC}=\frac{HB_1}{B_1C}=\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{1}=\frac{4}{3}\Rightarrow CR=\frac{3}{7}CC_1$

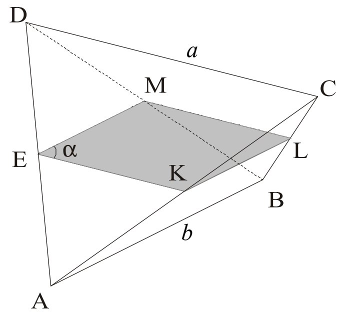
значит $\frac{S_{\Delta B_1CR}}{S_{\Delta ACC_1}}=\frac{CR\cdot CB_1\cdot\sin\angle ACB}{CC_1\cdot CB\cdot\sin\angle ACB}=\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{7}\Rightarrow S_{\Delta B_1CR}=\frac{1}{21}S_{\Delta ABC}$, аналогично получаем

$S_{\Delta A_1QB}=S_{\Delta C_1PA}=\frac{1}{21}S_{\Delta ABC}$, значит $S_{\Delta PQR}=\frac{1}{7}S_{\Delta ABC}$

7. **Условие:** *(10 баллов)* Длины противоположных рёбер тетраэдра равны a и b , угол между ними равен α . Найти максимальную площадь сечения этого тетраэдра плоскостью, параллельной этим рёбрам. Противоположными считать непересекающиеся ребра тетраэдра.

Ответ: $\frac{1}{4}ab\sin\alpha$

Решение: Пусть $AB=a$ и $CD=b$ — заданные рёбра тетраэдра. Построим $EKLM$ — сечение тетраэдра плоскостью, параллельной этим рёбрам (при этом $K\in AC$, $L\in BC$ и $M\in BD$; $EK\parallel CD$, $KL\parallel AB$, $LM\parallel CD$ и $EM\parallel AB$). Тогда $EKLM$ — параллелограмм, причём $\angle MEK=\alpha$.



Пусть $\frac{ED}{AD}=x$. Тогда из подобия треугольников ΔEDM и ΔADB получим

$EM=xb$, $\frac{BM}{BD}=1-\frac{DM}{BD}=1-x$. Из подобия треугольников ΔMBL и ΔDBC получаем $ML=(1-x)a$.

Тогда площадь сечения равна $S=S_{EKLM}=EM\cdot EK\cdot\sin\alpha=x(1-x)ab\sin\alpha$.

Нетрудно проверить, что эта площадь максимальна при $x=\frac{1}{2}$ и равна

$S_{\max}=\frac{1}{4}ab\sin\alpha$.

8. **Условие:** *(8 баллов)* Дана геометрическая прогрессия. Известно, что ее первый, десятый и тридцатый члены являются натуральными числами. Верно ли, что ее двадцатый член также является натуральным числом?

Ответ: Да, верно.

Решение: Пусть $b_n=b_1\cdot q^{n-1}$.Дано, что b_1, $b_{10}=b_1\cdot q^9$, $b_{30}=b_1\cdot q^{29}$ – натуральные числа. Докажем, что $b_{20}=b_1\cdot q^{19}$ – тоже натуральное число.

- Докажем сначала, что b_{20} – рациональное число. Очевидно, что q^{29}, q^9 – рациональные числа ($q^{29}=b_{30}/b_1$, $q9=b_{10}/b_1$). Поэтому $q^{20}=q^{29}/q^9$, $q^{11}=q^{20}/q^9$, $q^2=q^{11}/q^9$ – тоже рациональные числа. Т.к. q^2 – рациональное, то $(q^2)^4=q^8$ – тоже рациональное. Поэтому $q^{19}=q^{11}\cdot q^8$ – тоже рациональное. Т.к. $b_{20}=b_1\cdot q^{19}$, то b_{20} – тоже рациональное.
- Заметим, что $b_{20}=\sqrt{b_{30}\cdot b_{10}}$. Т.к. корень из натурального числа – либо натуральное число (если под корнем полный квадрат), либо иррациональное число, а у нас b_{20} – рациональное, значит b_{20} – натуральное число, а под корнем полный квадрат, ч.т.д.