

**МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)**

www.mipt.ru

ФАКУЛЬТЕТ АЭРОФИЗИКИ И КОСМИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ

faki.fizteh.ru



ЗАОЧНАЯ ОЛИМПИАДА ФАКИ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ

Долгопрудный 2007

Дорогой участник олимпиады!

Вашему вниманию предлагается заочная олимпиада, которая проводится Факультетом аэрофизики и космических исследований МФТИ. Московский физико-технический институт (или, как его часто называют, Физтех), более 60 лет готовит специалистов высшей квалификации, работающих в разнообразных интеллектуальных сферах – на передовом крае современной науки, техники и бизнеса. В частности, ФАКИ имеет более 15 специальностей, связанных с науками о Земле, механикой, космонавтикой, математическим моделированием, информационными технологиями.

Эта олимпиада представляет собой набор разнообразных задач: классических и нетривиальных, теоретических и экспериментальных, точных и оценочных. Все они отражают разнообразие деятельности и множество возможностей на ФАКИ. Решение каждой задачи индивидуально и требует немалых умственных затрат, так что просим вас сосредоточиться и подойти к этому процессу творчески. Если не успеваете решить все задачи, то не отчаивайтесь и присылайте то, что есть.

Олимпиада тематически разделена на три раздела: физика, математика и информатика. Участник может выполнить задание по одному, двум или трем предметам. По результатам проверки будут выдаваться 4 типа дипломов: отдельные для каждого предмета и общий. 20% участников, набравших максимальное количество баллов, получают почетные дипломы победителей олимпиады в соответствующих категориях.

Всем участникам будут высланы подробные решения задач, дипломы участника олимпиады и информация о факультете. Наличие диплома не дает каких-либо официальных льгот при поступлении в МФТИ, однако оно будет учитываться приемной комиссией при поступлении на наш факультет.

Решения всех задач, кроме задач по информатике (которые присылаются по email, см. ниже), просьба присылать в тонкой тетради простой бандеролью по адресу:

***141700, Московская обл., г. Долгопрудный,
Институтский пер., 9, МФТИ
Деканат ФАКИ, Заочная олимпиада ФАКИ (2007-2008)***

На тетрадь следует приклеить прилагающийся листок с полной информацией об участнике (заполнять поля: имя, фамилия, отчество, почтовый адрес, номер школы, класс, номер в ЗФТШ (если есть)). Также просим присылать большой конверт формата А4 с вложенными марками.

Можно также присылать решения в электронном виде (в виде документа формата PDF или Word, версия Word не выше 2003), по e-mail: **olympiad_2008@mail.ru**. Тема электронного письма – «Фамилия Имя», размер не более 5 Мб, в письме и на первом листе присоединенного документа – полная информация об участнике: имя, фамилия, отчество, почтовый адрес, номер школы, класс, номер в ЗФТШ (если есть). Вопросы можно задавать по этому же адресу, тема письма «Вопрос по олимпиаде».

КРАЙНИЙ СРОК ОТПРАВКИ РЕШЕНИЙ: 15 февраля 2008 г.

Олимпиаду составляли: Баранов Г., Билоус А., Гусев Н., Евдокимов А., Завьялова Н., Завьялов И., Казачек И, Козленко С., Корчак А., Мирзов И., Мурышев К., Сафронов В., Терехов А., Ткаченко Б.

Физика

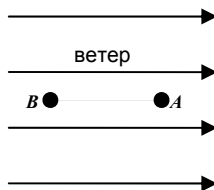
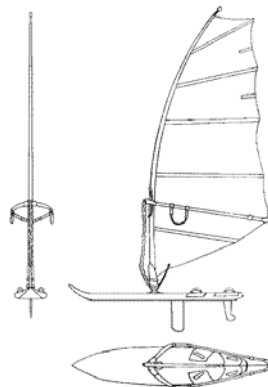
1. а) (7 баллов) На поверхности озера в точке А расположен виндсерфинг, который представляет собой доску с швертом (плавник внизу) и парусом, присоединённым к доске шарниром (см. рис.).

Может ли серфингист добраться из точки А в точку В, расположенную выше по ветру (см. рис.)? Ответ обосновать.

(Считайте, что сила, действующая на парус, перпендикулярна плоскости паруса, а за счёт сопротивления шверта доска может двигаться только вдоль своей оси. Также можно считать, что скорость виндсерфинга много меньше скорости ветра.)

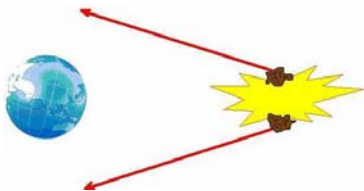
б) (5 баллов) При движении в каком направлении виндсерфинг может развить максимальную скорость?

в) (5 баллов) По какой траектории должен двигаться виндсерфинг чтобы добраться из точки А в точку В за наименьшее время?



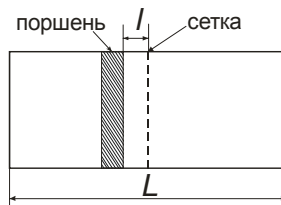
2. (4 балла) Капле ртути радиусом $R = 1 \text{ мм}$, находящейся в вакууме, сообщили заряд $Q = 1 \text{ нКл}$. Найдите давление P внутри капли. Коэффициент поверхностного натяжения ртути $\sigma = 510 \text{ мН/м}$.

3. (14 баллов) В фильме «Армагеддон» на Землю летел метеорит (это грозило наступлением конца света), герои фильма решили его взорвать. Размером метеорит был со штат Техас и двигался со скоростью 40000 км/ч. Точка, в которой его надо было взорвать находилась на расстоянии 4 часа 53 минуты от земли. После взрыва метеорит распался на две равные части, получившиеся осколки пролетели мимо Земли. Какой

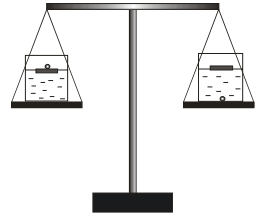


энергии должен быть взрыв, чтобы обломки могли облететь землю? Оценить высоту приливной волны, которую они вызвали, если по фильму они пролетели на расстоянии 720 км от поверхности земли. Метеорит считать сделанным из железа.

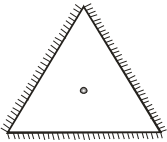
4. (7 баллов) В сосуде длины L , сечением S при давлении P и температуре T находится газ. Сосуд разделен пополам легко проницаемой для газа сеткой и массивным, подвижным поршнем (массы m), занимающим нулевой объем. Поршень отводят в сторону на малое расстояние l и затем отпускают. Найти, сколько энергии выделится при абсолютно неупругом ударе поршня о сетку. Процесс движения поршня считать изотермическим.



5. (7 баллов) На небольшом астероиде находятся равноплечные весы. На них стоят 2 сосуда с водой одинаковой массы. В каждом плавает по одному одинаковому деревянному бруску. Система уравновешена. В первый сосуд на брусок кладут свинцовый шарик массы m . Во второй сосуд такой же свинцовый шарик кладут на дно. В какую сторону перевесят весы и почему?

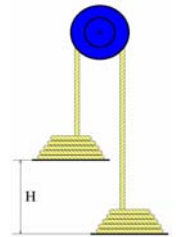


6. (10 баллов) Целесообразно ли делать ручной секундомер с точностью 0.01с ? (Следует экспериментально определить время реакции человека¹).
7. (8 баллов) Дан равносторонний треугольник из зеркал, в его центре находится камешек. Сколько изображений увидит наблюдатель, находящийся перпендикулярно плоскости рисунка. Как изменятся расстояния между изображениями, если камень переместить на сторону треугольника. Если считать, что камень и



его изображение, которого он касается, являются одной группой, вычислить, какое максимальное количество камней в одной группе можно увидеть с помощью такой системы.

8. (5 баллов) Канат перекинут через блок. Перепад высот между канатными бухтами равен H . Чему равна скорость каната? Канат считать бесконечно длинным.



Математика

- (7 баллов) Приведите пример многочлена $P(x)$ степени 2007, для которого выполняется тождество $P(x) + P(1-x) = 1$.
- (7 баллов) Какой множитель в произведении $100! \cdot 99! \cdot 98! \cdot \dots \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1!$ нужно вычеркнуть, чтобы получить точный квадрат (т.е. квадрат некоторого натурального числа)?
- (5 баллов) Из шахматной доски убрали две угловых чёрных клетки. Можно ли покрыть оставшиеся клетки доски костями для домино? Считать, что одной костью для домино можно покрыть любые две соседних клетки.
- (5 баллов) Два хулигана бегут по эскалатору метро, причем скорость второго в k раз больше, чем первого. Пробежав эскалатор, первый насчитал N ступенек, а второй M ступенек. Найти количество ступенек на эскалаторе и скорость его движения, если скорость первого хулигана V .
- (12 баллов) Доказать, что для любых 2-х непересекающихся выпуклых многоугольников на плоскости можно провести прямую, разбивающую каждый из них на две равновеликие части.
- (10 баллов) Дан треугольник ABC . На каждой его стороне отметили по 2 точки так, чтобы они делили сторону на 3 равные части. Обозначим эти точки A_1, A_2 ,

¹ Один из возможных методов измерения человеческой реакции требует участия 2-х человек и линейки. Первый должен держать линейку вертикально, второй располагает кисть руки у нижнего конца линейки так, чтобы линейка была между большим и указательным пальцами руки. Первый отпускает линейку, а второй ловит. По полученной высоте можно определить время реакции.

B_1, B_2, C_1, C_2 , например, так: (по часовой стрелке) $A, C_1, C_2, B, A_1, A_2, C, B_1, B_2$. После этого провели отрезки AA_1, BB_1, CC_1 . Точки пересечения этих отрезков внутри треугольника обозначим P, Q, R . Найти, во сколько раз площадь треугольника PQR меньше площади треугольника ABC .

7. (10 баллов) Длины противоположных рёбер тетраэдра равны a и b , угол между ними равен α . Найти максимальную площадь сечения этого тетраэдра плоскостью, параллельной этим рёбрам. Противоположными считать непересекающиеся рёбра тетраэдра.
8. (8 баллов) Дана геометрическая прогрессия. Известно, что ее первый, десятый и тридцатый члены являются натуральными числами. Верно ли, что ее двадцатый член также является натуральным числом?

Информатика

Факультет аэрофизики и космических исследований известен тем, что имеет много предметов, посвященных прикладной информатике. Тематика данного задания тоже связана именно с прикладной информатикой (а не с «чистыми алгоритмами»): требуется программная реализация математических методов решения прикладных задач. Задание, как и многие кафедры факультета, связано с компьютерным моделированием разнообразных процессов (см. задачу 2) и с обработкой данных (см. задачу 1).

Общие требования к решениям задач по информатике

Решение должно быть прислано на e-mail olympiad_2008@mail.ru, должно включать данные об авторе (указаны выше для всех разделов олимпиады) и следующие вещи:

- **Текстовый файл programs.txt** (кодировка – Windows-1251 или UTF) с информацией о программах-решениях и о другом программном обеспечении. Структура файла:

Фамилия и имя автора: *Петров Сергей*

E-mail автора: *petrov.sergey@gmail.com*

Номера задач (1 или 2 или 1,2): *2*

Язык программирования: *C++*

Среда разработки: *Microsoft Visual C++ 6.0*

Операционная система: *Windows XP Professional*

Другое программное обеспечение (если использовалось): *нет*

- **Выполняемый код программ** для платформы Win32 (см. также ниже).
- **Исходный код программ.** За небрежное оформление исходного кода (затрудняющего его просмотр) и за отсутствие комментариев (к процедурам или классам), жюри оставляет себе право снимать до 25% от набранной суммы баллов.
- **Пояснение к программам** в свободной форме (для задачи 1 – описание алгоритмов и их сравнение; для задачи 2 – описание результатов программы при разных параметрах).
- Для задачи 1 – исходные данные – **тестовые файлы**. Жюри будет проверять работоспособность программы, используя как присланные тесты, так и собственные.

Рекомендации к структуре файлов (необязательные, но желательные):

Все файлы, за исключением program.txt, должны быть заархивированы в файл Фамилия_Имя_1.zip (для задачи 1) и Фамилия_Имя_2.zip (для задачи 2), где фамилия и имя автора пишутся кириллицей.

- В корне zip-архива должны быть все тестовые файлы для программы (*.txt, если есть), сама программа и командный файл (*.bat или ярлык *.lnk), с помощью которого она запускается (в нем указываются типовые аргументы командной строки).
- Файл с описанием программы тоже должен находиться в корне архива, иметь имя **info** и расширение **.txt**, **.rtf** или **.doc** (в последних двух случаях допускается использование форматов редакторов MS Word 97, 2000, XP или 2003).
- Файл(ы) с исходными кодами должен(ы) находиться в директории **src** (у которой допускаются поддиректории, если это необходимо).
- Файлов с выходными данными в архиве быть не должно.

Требования к выполняемому коду программы:

- В случае обнаружения **вирусов** программа не рассматривается (как правило, автор получает уведомление об этом с возможностью рассмотреть присланный комплект файлов второй раз, однако эта возможность не гарантируется).
- Для написания программ можно пользоваться любыми языками программирования (Pascal, Си, ...) и любыми средствами разработки (FreePascal, Delphi, Visual C++, ...).
- Из «интерпретируемых» языков (языков, требующих среду выполнения) можно использовать только Java (Java-программы будут проверяться в среде JRE 1.5).
- Программы на других языках должны быть скомпилированы для платформы Win32 (DOS/Windows), то есть иметь расширение **.exe**. Они будут проверяться под ОС Windows XP Professional (возможна также проверка под Windows XP Home, если под Windows XP Professional программа не работает, но в файле programs.txt указана ОС Windows XP Home, 2000 или 98). При этом программы не должны требовать каких-либо библиотек (DLL), входящих в состав среды разработки, но не ОС. Это в некоторых случаях означает, что следует правильно настроить среду разработки, – чтобы она собирала *весь* нужный код в exe-файл.

1. Задача на числовые алгоритмы: «Функция из таблицы» (15 баллов)

Краткое описание: Дана таблица, каждая строка которой содержит аргумент и соответствующее ему значение некой функции (возможно, это значение известно с некоторой погрешностью – например, оно может быть измерено в эксперименте). Всего таблица содержит M строк («экспериментальных точек»). Требуется с помощью нескольких алгоритмов вычислить N значений функции, которая описывала бы исходную таблицу «наилучшим образом» (см. ниже).

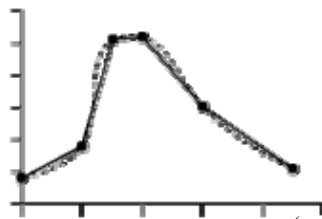
Исходные данные программы:

1) Параметры командной строки программы: «имя_файла k N » или просто «имя_файла k » (во втором случае используется $N = 5M$). Здесь k – номер алгоритма.

2) Таблица, состоящая из двух столбцов и M строк и записанная в текстовый файл с разделителем «табуляция» между столбцами (имя файла задается через командную строку программы, см. выше). Второй столбец содержит значения некой функции (далее «значения y »), а первый столбец – соответствующие значения ее аргумента (далее «значения x »), причем значения x упорядочены по возрастанию, а разности между соседними значениями x могут различаться. Все значения являются вещественными числами (символ отделения целой и дробной части – точка – ‘.’).

Всего должно быть не менее 4 вариантов таблиц (тестовых файлов), одна из таблиц приведена ниже (ее файл должен называться **input0.txt**):

| | |
|-----|------|
| 1 | -6 |
| 2 | -1 |
| 2.5 | 15.6 |
| 3 | 16 |
| 4 | 5.1 |
| 5.5 | -4.5 |



Остальные 3 (или более) тестовых файла должны быть созданы самостоятельно (написаны «вручную», сохранены из программного пакета или собственной программы, скачаны из Интернет и т.п.); эти файлы можно называть по аналогии с первым – input1.txt, input2.txt. Хотя бы один файл должен содержать не менее $M = 50$ строк.

Выходные данные программы:

Нужно записать значения функции в текстовый файл **output.txt**, представляющий собой таблицу из двух столбцов и из N строк с любыми разделителями из набора {табуляция, запятая с пробелом, “;” с пробелом, просто пробелы}. В остальном, выходные данные имеют тот же смысл, что и исходные данные (x в первом столбце и y во втором, см. выше), однако значения x должны подчиняться формуле $x_n = x_0 + (x_N - x_0)n/N$, где $n = 0, 1, 2, \dots, N$; x_0 равно первому значению x в исходной таблице, а x_N равно последнему значению x в исходной таблице.

Алгоритм вычисления y :

Требуется реализовать K различных алгоритмов (минимальное число $K = 2$, максимальное – 4, за *третий и четвертый алгоритм* – по 3 дополнительных балла). Номера алгоритмов в командной строке программы и в файле описания (info.*) должны соответствовать друг другу. Все алгоритмы должны давать различные результаты. При этом результаты каждого алгоритма должны удовлетворять одному или нескольким требованиям из следующего набора:

- 1) Если какое-либо значение x в выходных данных совпадает с каким-либо x в исходных данных, то совпадают и соответствующие им значения y .
- 2) Все M исходных точек влияют на каждое вычисленное значение y .
- 3) Функция $y(x)$ «достаточно плавно изменяется», то есть, у нее нет «острых углов» (такой угол есть, например, у функции $y = |x|$ при $x = 0$).
- 4) Алгоритм вычисляет значение y , используя многочлен(ы), степень которого(ых) не ниже 2 (например, $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ – многочлен степени 3).
- 5) Значения y «близки» к значениям из таблицы в том смысле, что если для $2x$ соседних точек таблицы (x_1, y_1) и (x_2, y_2) справедливы неравенства $x_1 < x < x_2$ и $y_1 \leq y_2$, то $y_1 - 5(y_2 - y_1) \leq y \leq y_2 + 5(y_2 - y_1)$ (и аналогично для случая $y_1 > y_2$). Вместо этого возможно применение другого неравенства, но оно должно быть сформулировано и обосновано в файле описания (info.*).

Необязательное требование (1 балл): Для каждого алгоритма выдать значение функции в $(N + 1)$ -ой точке (то есть, в точке, находящейся за пределами отрезка x в исходных данных). Считать, что $x_{N+1} - x_N = x_N - x_{N-1}$.

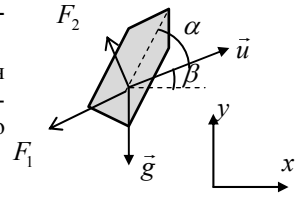
В пояснении к программе следует кратко описать и сравнить предложенные алгоритмы (в т.ч. сформулировать, в каких случаях алгоритм дает хороший результат). Это дает по 1 баллу за каждый алгоритм.

Выполнение минимальных требований (выдача таблицы 2мя алгоритмами) – 4 балла.

2. Задача на реализацию, отладку и анализ физико-математических программ: «Численное моделирование» (20 баллов)

Краткое описание: с помощью заданного алгоритма найти и записать в таблицу приближенное решение задачи по физике (механике) – зависимости 3х переменных от времени.

Примечание: в математической формулировке задачи имеются производные (например, ускорение – вторая производная координаты), однако задача может быть решена и теми участниками, кто не знаком с производными.



Физическая задача и ее математическая формулировка:

Найти траекторию тела («снаряда»), запущенного со скоростью $u_0 = 1000$ под углом к горизонту $\beta_0 = 60^\circ$, с учётом следующих факторов: 1) сопротивление воздуха; 2) подъёмная сила; 3) сила тяжести; 4) вращение вокруг оси, перпендикулярной плоскости движения. (Примечание: настоящие снаряды вокруг этой оси не вращаются ☺ – благодаря своему вращению вокруг продольной оси.)

Уравнения: $d^2x/dt^2 = F_x/m$, $d^2y/dt^2 = F_y/m$, $d^2\alpha/dt^2 = C_M \rho u^2 (L-a)^3 / mL^2$, где $m = 30$, $a = 0.1$ и $L = 0.4$ – масса, радиус и длина тела (в системе единиц СИ), $\rho = 1.3$ – плотность воздуха; α – «угол атаки» (см. рис.), $u_\alpha = d\alpha/dt$ – скорость изменения этого

угла; x и y – координаты тела, u – модуль скорости тела ($u^2 = u_x^2 + u_y^2$), F_x и F_y – компоненты вектора силы: $F_x = -F_1 \cos(\alpha) - F_2 \sin(\alpha)$, $F_y = -F_1 \sin(\alpha) + F_2 \cos(\alpha) - mg$,

$F_1 = C_1 \rho u^2 L^2$, $F_2 = C_2 \rho u^2 (L-a)^2$, $g = 9.8$ – ускорение свободного падения. Предполагается, что справедливы следующие приближенные выражения для безразмерных коэффициентов C , зависящих от формы тела (они определяют сопротивление, подъёмную силу и вращающий момент): $C_1 = 0.01 \cdot (\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) a^2 / L^2)$,

$C_2 = 0.005 \cdot \sin(2\alpha)$, $C_M = 10^{-5} \sin(\alpha + \beta_0 - \beta)$, где $\beta = \arctan(u_y / u_x)$ – угол между вектором скорости и осью x . Значения переменных в начальный момент: $x_0 = y_0 = \alpha_0 = u_{\alpha 0} = 0$; $u_{x0} = u_0 \cos(\beta_0)$, $u_{y0} = u_0 \sin(\beta_0)$. *К сведению:* при данных значениях параметров тело достигает земли ($y = 0$) через время $T \approx 150$.

Исходные данные программы (необязательны, дают 1 балл за п.1, 2 балла за п.2):

1) Параметры командной строки программы: $T N$ (где T и N – числа, см. ниже) или просто T (тогда используется $N = 1000$).

2) Текстовый файл **input.txt** с произвольной структурой, содержащий все числовые параметры задачи (кроме T и N) с их названиями. Допускается, чтобы программа читала этот файл в качестве ввода с консоли (тогда запуск программы – строкой вида “программа.exe $T N$ <input.txt”).

Выходные данные программы:

Нужно записать в текстовый файл **output.txt** таблицу из 4х столбцов (в следующем порядке: t , x , y , α) и из $N+1$ строк с любыми разделителями из набора {табуляция, запятая с пробелом, “,” с пробелом, просто пробелы}. Первая строка соответствует моменту времени $t = 0$, последняя строка – $t = T$.

Все значения в файле (кроме разделителей) являются вещественными числами (символ отделения целой и дробной части – точка – ‘.’). Допускается, чтобы программа записывала output.txt в качестве вывода на консоль (тогда запуск программы – строкой вида “программа.exe TN>output.txt”)

Алгоритм:

Приведем систему уравнений задачи к виду $dz_i/dt = f_i(z_1, z_2, \dots, z_I)$, где $i = 1, 2, \dots, I$, а z_i – это одна из $I = 6$ переменных $x_0, y_0, \alpha_0, u_x, u_y, u_{\alpha 0}$. Разделим отрезок времени $[0, T]$ на N равных отрезков («шагов») длины $\tau = T/N$. Зная значение переменных в начальный момент $(z_{i,0})$, найдем их значения на каждом шаге с номером n ($n = 1, 2, \dots, N$) по формуле: $z_{i,n} = z_{i,n-1} + \tau \cdot f_i(z_{1,n-1}, \dots, z_{I,n-1})$. (Примечание: эта формула называется явным методом Эйлера и является самым простым, но самым неточным методом приближенного – «численно-го» – решения подобных уравнений).

Подсказка: функции f_i , соответствующие переменным x_0, y_0, α_0 , равны $u_x, u_y, u_{\alpha 0}$, а функции f_i , соответствующие переменным $u_x, u_y, u_{\alpha 0}$, равны вышеуказанным выражениям для $d^2x/dt^2, d^2y/dt^2, d^2\alpha/dt^2$ (эти выражения есть ускорения).

Необязательное требование (3 балла): уменьшать или увеличивать заданное (в командной строке или в исходном коде) время расчета T таким образом, чтобы расчет заканчивался в тот момент (плюс/минус один шаг), когда тело достигает $y = 0$ (но при этом в выходном файле должно быть именно заданное число строк $N!$).

В пояснении (4 балла) желательно отразить ответы на следующие вопросы:

- 1) При каком угле стрельбы β_0 максимальна дальность полета?
- 2) При каких значениях параметров вращательное движение тела не влияет на его траекторию?
- 3) При каком числе шагов N его дальнейшее увеличение не приводит к «заметному на глаз» отличию результатов? (*к сведению:* чем больше N , тем результат более точен).

Рекомендация: при анализе результатов программы использовать какой-либо программный пакет (например, Excel) для построения графиков (например, графика $u(x)$)

Выполнение минимальных требований (расчет и выдача таблицы) дает 10 баллов. Если результаты неверны, жюри может снять от 3 до 8 баллов.

ЗАОЧНАЯ ОЛИМПИАДА ФАКИ

Фамилия: _____

Имя: _____

Отчество: _____

Почтовый адрес (с индексом): _____

Номер школы: _____

Класс: _____

Номер в ЗФТШ (если есть): _____

Проверяющие (заполняется оргкомитетом):

Физика: _____

Математика: _____

| Физика | |
|--------|--|
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |
| 4 | |
| 5 | |
| 6 | |
| 7 | |
| 8 | |
| Итог: | |

| Математика | |
|------------|--|
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |
| 4 | |
| 5 | |
| 6 | |
| 7 | |
| 8 | |
| Итог: | |