ГЛАВА 3.

Сравнительная статика спроса.

В предыдущей главе мы вывели функции некомпенсированного (маршаллианского) спроса потребителя:

$$x_i^* = d_i(p_1,...,p_n,I), \text{ где } i = 1,...,n.$$

Легко видеть, что количество спрашиваемого на рынке товара – это функция, по крайней мере, от следующих переменных:

- цены данного товара;
- цен других товаров из потребительского набора;
- дохода потребителя.

В наших моделях мы везде предполагаем, что другие факторы спроса (вкусы потребителя, ожидания относительно цен и дохода в будущем) остаются неизменными (постоянными), не влияют на наш анализ и могут быть проигнорированы нами. Это – **предпосылка «Ceteris Paribus»** - при прочих равных условиях.

В этой теме мы будем рассматривать, как изменяется спрос потребителя в результате изменения цен и дохода. Это – основная задача данной главы.

§1. Графический анализ спроса.

Кривые «доход-потребление» и кривые Энгеля. Мы начнём наш анализ с рассмотрения того, как изменяется спрос потребителя на первое благо в результате изменения дохода потребителя. При этом цены (и другие факторы спроса) остаются неизменными.

На рис. **3.1**(а) три бюджетные линии показывают три различных уровня дохода потребителя. Первоначально индивид получает доход I_1 (первая бюджетная линия) и максимизирует полезность в точке **1**, покупая x_1' единиц первого блага. Затем доход потребителя возрастает до уровня I_2, что отражено на графике в параллельном сдвиге бюджетной линии вверх. В новой точке оптимального выбора – в точке **2** – индивид потребляет x_1'' единиц первого блага. Наконец, доход нашего потребителя возрастает ещё раз (теперь он составляет I_3), бюджетная линия снова сдвигается вверх параллельно себе самой и, максимизируя полезность в точке **3**, потребитель покупает x_1''' единиц первого блага. Соединив все точки оптимального выбора – 1, 2 и 3 – линией, получаем кривую «доход-потребление».

Кривая «доход-потребление» показывает траекторию расширения потребления за счёт роста дохода потребителя. На кривой «доход-потребление» расположены все товарные наборы (x_1, x_2), максимизирующие полезность при различной величине дохода потребителя и при неизменных ценах благ.

На рис. **3.1**(б) изображена **кривая** Энгеля – графическое представление спроса на одно из благ как функции от дохода при неизменности цен всех благ из потребительского набора и при прочих равных условиях. Кривая Энгеля строится путём перенесения оптимальных значений x_1', x_1'' и x_1''' с верхнего графика на нижний, поскольку на осях абсцисс и в том, и в другом случае откладывается количество первого блага. На оси ординат на рис. **3.1**(б) показывается величина дохода потребителя. Отметив здесь значения I_1, I_2 и I_3, мы можем построить кривую, отражающую зависимость между величиной дохода потребителя и количеством первого блага, на которое он предъявляет спрос. В данном конкретном случае эта зависимость прямая, следовательно, анализируемый товар является нормальным благом.

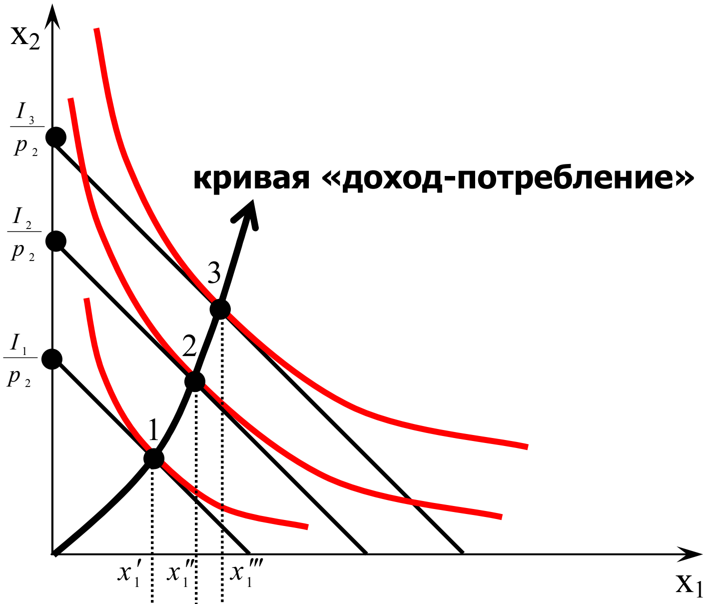

Рис. 3.1(а)

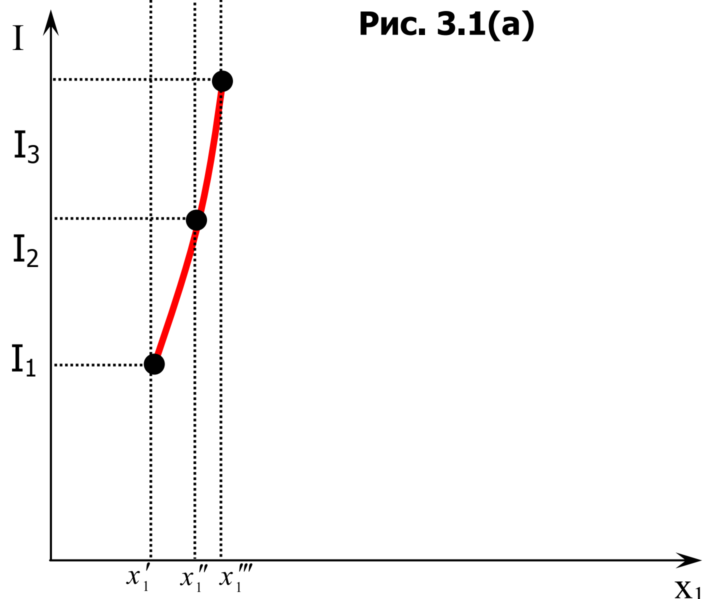

Рис. 3.1(б)

Нормальные блага – это блага, величина спроса на которые увеличивается с ростом дохода потребителя и снижается с уменьшением дохода:

(3.1) $$\frac{\partial x_1}{\partial I} > 0; \frac{\partial x_2}{\partial I} > 0$$

Как видно из рис **3.1**(а), в данном случае не только первое, но и второе благо является нормальным, поскольку с ростом дохода потребителя увеличивается потребление обоих благ: кривая «доход-потребление» имеет положительной наклон. При этом кривая, представленная на рис. **3.1**(а), изгибается по направлению к оси ординат. Значит, потребление второго блага растёт более быстрым темпом, чем потребление первого блага. В соответствии с принятой экономической терминологией мы назовём первый товар предметом первой

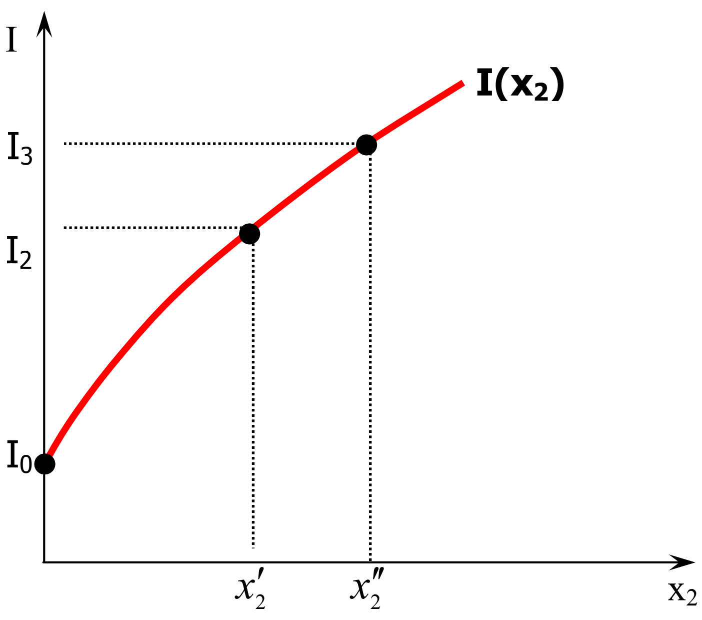

Рис. 3.2.

необходимости, а второй – предметом роскоши. Рассмотрим два этих типа нормальных благ более подробно.

В рассматриваемом примере (рис. **3.1**(а)) второе **благо является предметом роскоши.** Это означает, что прирост дохода на 1% увеличивает объём спроса со стороны потребителя на благо 2 более чем на 1% при прочих равных условиях. При фиксированных ценах это означает, что общая сумма расходов на данный товар также возрастает более чем на 1%. Таким образом, доля потребительских расходов, приходящаяся на предметы роскоши, растёт с ростом дохода. Рисунок **3.2** **иллюстрирует кривую Энгеля для предметов роскоши**. Из него видно, что потребление блага 2 растёт более быстрым темпом, чем доход:

(3.2) $$\frac{\partial^2 x_2}{\partial I^2} > 0$$

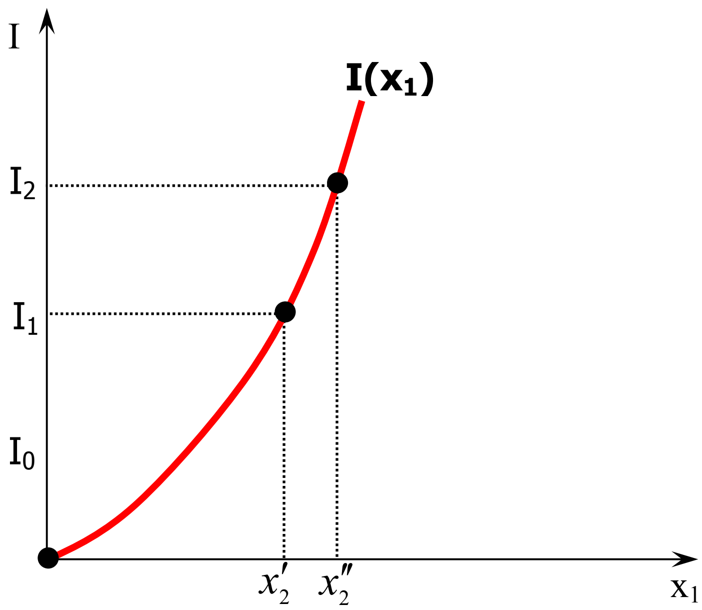

Рис. 3.3.

В данном примере (см. рис. **3.1**(а)) **благо 1 является предметом первой необходимости**. На рисунке **3.3** изображена кривая Энгеля для предметов первой необходимости. В соответствии с теми же доводами, доля потребительских расходов здесь падает с ростом дохода:

(3.3) $$\frac{\partial^2 x_1}{\partial I^2} < 0$$

Кривая «доход-потребление» может изгибаться назад, как показано на рис. **3.4**. В этом случае при увеличении дохода потребитель станет потреблять меньшее количество одного из благ. Такое благо экономисты называют инфериорным (или товаром низшей категории, или малоценным благом). На рис. **3.4** инфериорным является первое благо, а второе при этом обязательно будет нормальным.

Инфериорные блага – это блага, спрос на которые снижается с ростом дохода и, наоборот, возрастает с уменьшением дохода:

(3.4) $$\frac{\partial x_1}{\partial I} < 0$$

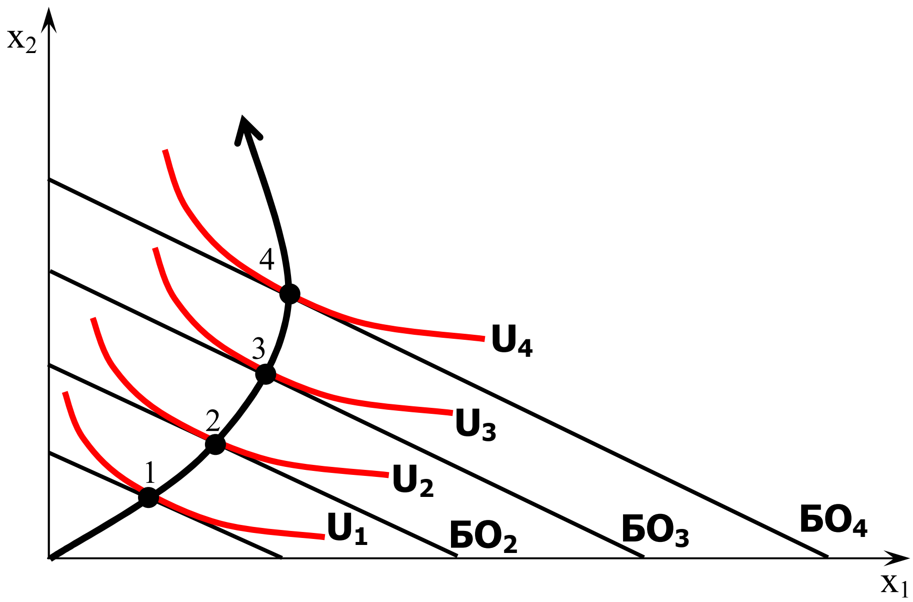

Рис. 3.4.

На рис. **3.5** изображена кривая Энгеля для инфериорного блага. Вы видите, что первоначально, при низких уровнях дохода, потребитель увеличивал спрос на первое благо с ростом дохода, то есть сначала оно было нормальным. Однако, начиная с некоторого уровня дохода I_0, наш потребитель сокращает потребление первого блага и тратит свой возросший доход на более ценные, с его точки зрения, товары и услуги.

Кривая «доход-потребление» и кривая Энгеля могут быть и вертикальными линиями, если отношение предпочтения потребителя оказывается квазилинейным.

Отношение предпочтения $\succeq$ называется **квазилинейным** относительно блага 2, если

а) все кривые безразличия являются параллельными смещениями друг друга вдоль оси блага 2 (см. рис. **3.6**);

б) благо 2 является более желаемым для потребителя, то есть потребитель очень сильно предпочитает благо 2 благу 1. Квазилинейное отношение предпочтения (относительно блага 2) допускает функцию полезности следующего вида:

(3.5) $$U(x_1, x_2) = \varphi(x_1) + x_2$$

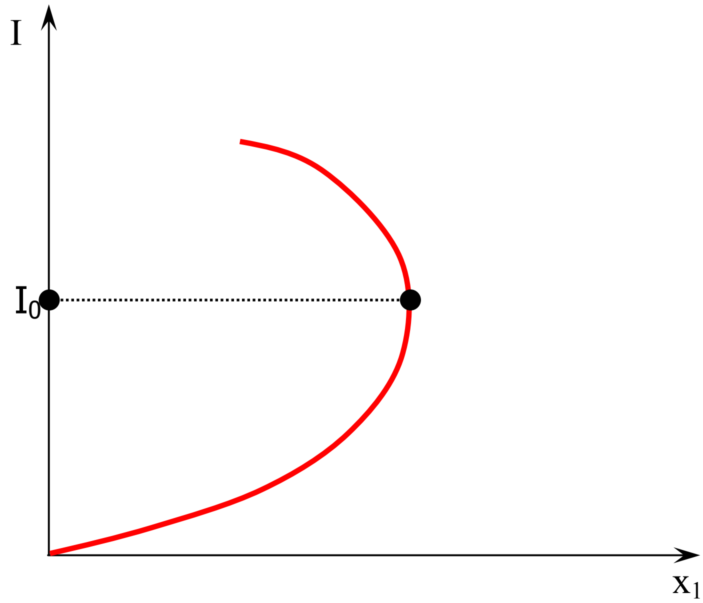

Рис. 3.5.

Для линий уровня: $U(x_1,x_2)=k_i=const$. Тогда $x_2=k_i-\varphi(x_1)$. Чем больше k_i, тем выше уровень полезности. Отсюда видно, что каждая кривая безразличия является параллельным сдвигом предыдущей. Данная функция линейна относительно блага 2, но, возможно, нелинейна относительно блага 1. Отсюда название «квазилинейная» полезность, то есть «частично линейная» или «почти линейная».

Конкретные примеры квазилинейных функций полезности:

$$U(x_1,x_2)=\sqrt{x_1}+x_2$$

$$U(x_1,x_2)=ln\,x_1+x_2$$

Экономический смысл квазилинейности состоит в том, что потребление товара 1 не зависит от величины дохода. Потребитель продолжает потреблять одно и то же количество товара 1 как при росте, так и при снижении дохода. В жизни это товары, расходы на которые рассматриваются как предметы первой необходимости, например, соль, мыло, зубная паста, туалетная бумага.

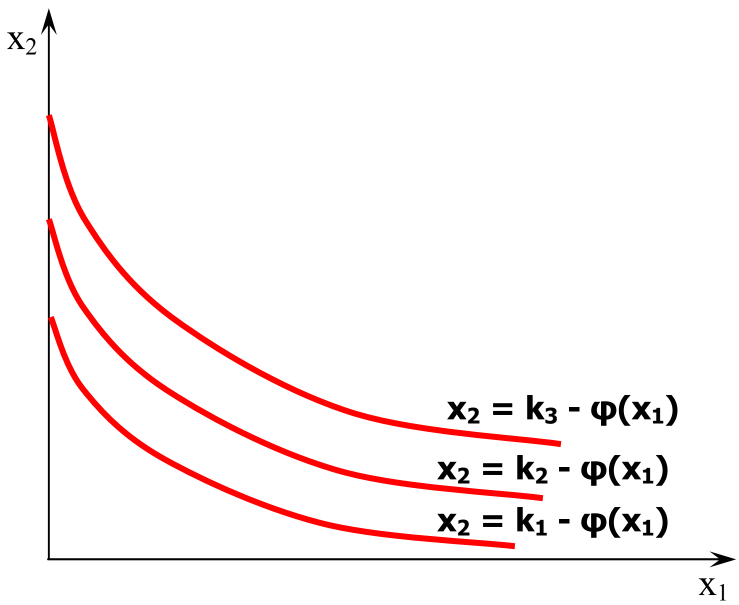

Рис. 3.6.

Здесь $\dfrac{\partial x_1}{\partial I}=0$, тогда как $\dfrac{\partial x_2}{\partial I}>0$ (см. рис. **3.7**).

Обратите внимание на то, что кривая «доход-потребление» будет вертикальной только в ситуации, когда первоначальный доход потребителя достаточно высок. Если доход начинает расти с нуля, то там конфигурация кривой «доход-потребление» будет несколько иной. То есть здесь ситуация, аналогичная ситуации с инфериорным благом – сначала (при низком уровне дохода) оно нормальное и лишь затем становится товаром низшей категории. Кривая Энгеля (см. рис. **3.8**) также будет строго

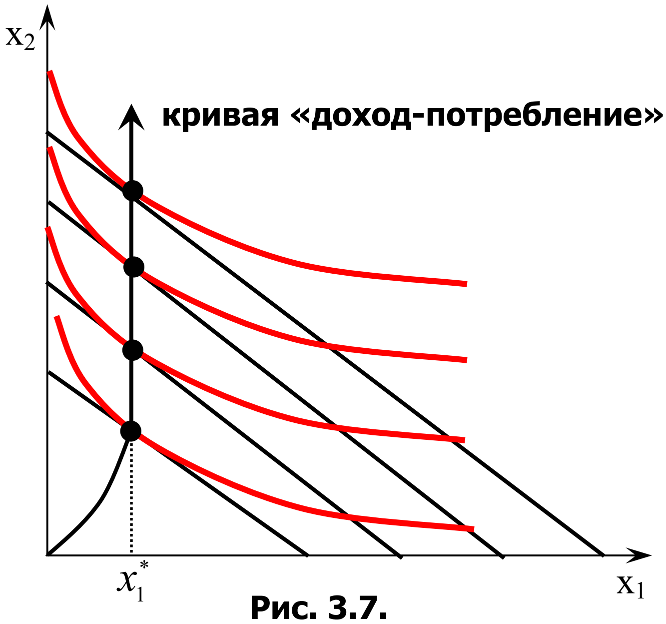

Рис. 3.7.

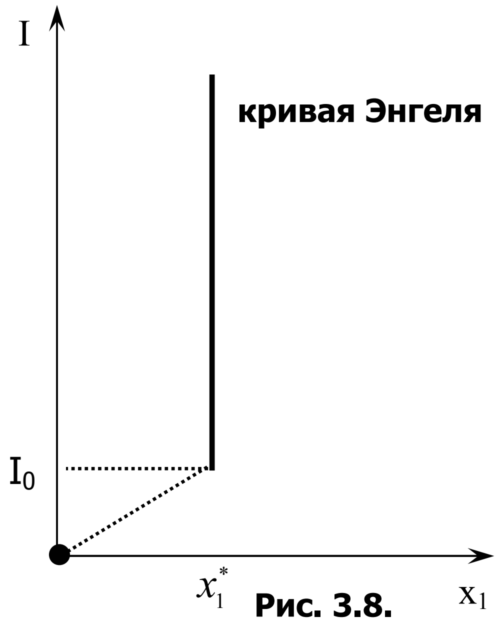

Рис. 3.8.

вертикальной, лишь начиная с определенного дохода потребителя I_0. При более низком доходе потребитель увеличивает спрос на первое благо с ростом своего дохода.

Примеры для самостоятельного рассмотрения.

1. Предположим, что потребитель делает выбор только между двумя благами, являющимися совершенными субститутами. Нарисуйте кривую «доход-потребление» и кривые Энгеля для первого и второго блага.

2. Пусть некий индивид потребляет только два блага, являющихся совершенными комплементами, расходуя на них весь свой доход. Нарисуйте кривую «доход-потребление» и кривые Энгеля для этого типа благ. Объясните их графический вид.

Подсказка. При построении кривых Энгеля воспользуйтесь функциями некомпенсированного спроса для совершенных субститутов и совершенных комплементов, выведенных в предыдущей главе.

<u>Кривые «цена-потребление» и кривые некомпенсированного спроса потребителя.</u> Мы продолжаем анализировать статику спроса, то есть рассматривать, как изменяется спрос потребителя при изменении дохода и цен. Воздействие дохода на спрос мы проанализировали. Вторым этапом будет анализ воздействия на спрос на некоторое благо изменения цены этого блага.

$$x_1^* = d_1(p_1, p_2, I).$$

Предположим, что доход и цены на другие блага остаются постоянными, то есть $p_2 = const$, $I = const$. Предположим далее, что цена блага 1 уменьшается: $p_1' > p_1'' > p_1'''$. Предположим, что первое благо является обычным (то есть не является товаром Гиффена). Тогда: $x_1' < x_1'' < x_1'''$. Обычные блага – это блага, спрос на которые растёт с уменьшением цены или, наоборот, падает с ростом цены.

(3.6) $$\frac{\partial x_1}{\partial p_1} < 0$$

На рис. **3.9**(а) представлен оптимальный выбор потребителя, максимизирующего полезность при фиксированном доходе и понижающейся цене первого блага. Первоначально оптимальный набор находился в точке 1, когда индивид потреблял x_1' первого товара. При уменьшении цены линия бюджетного ограничения становится более пологой **(БО$_2$)** и касается теперь кривой безразличия, отражающей уровень полезности U_2. Новая точка выбора – точка 2, когда индивид потребляет x_1'' единиц первого блага. Ещё одно снижение цены p_1 делает бюджетную линию ещё более пологой **(БО$_3$),** и полезность потребителя максимизируется в точке 3, где выбирается x_1''' единиц первого блага. Соединив точки оптимального выбора 1,2 и 3 линией, получаем кривую «цена-потребление».

На рис. **3.9**(б) изображена кривая некомпенсированного спроса потребителя на первое благо. Она получена путём перенесения значений x_1', x_1'', x_1''' с рис. 3.9(а) на ось абсцисс и выделения на оси ординат трёх значений рыночной цены первого блага: p_1', p_1'', p_1'''. Легко видеть, что кривая спроса на товар имеет отрицательный наклон. Обратите внимание, что мы построили эту кривую при помощи аппарата кривых безразличия и бюджетных линий благодаря простейшему максимизированию ценой.

БО$_1$: $I = p_1' \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2$

БО$_2$: $I = p_1'' \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2$

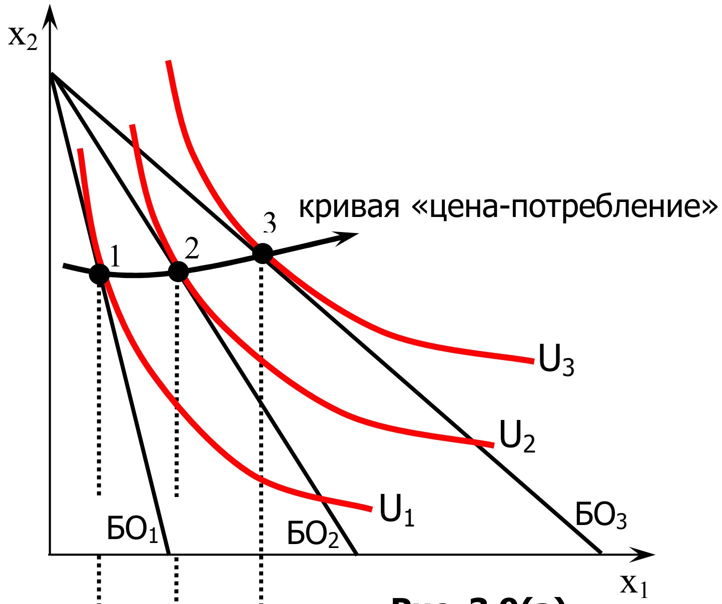

Рис. 3.9(а)

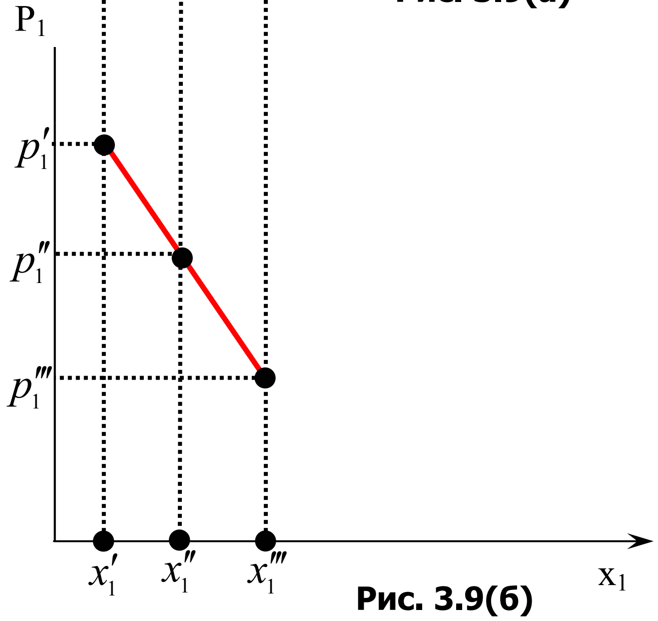

Рис. 3.9(б)

БО₃: $I = p_1''' \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2$

Кривая «цена-потребление» есть геометрическое место точек, отражающих товарные наборы (x_1, x_2), максимизирующие полезность потребителя при различных ценах товара 1 и при неизменном доходе и неизменной цене блага 2. Кривая некомпенсированного спроса потребителя показывает зависимость между ценой блага и величиной спроса на данное благо при прочих равных условиях (то есть при неизменности всех других факторов спроса). Особенно важно, что здесь не изменяется номинальный доход потребителя.

Перечислим основные **свойства кривой некомпенсированного спроса потребителя**, отражающие её экономический смысл и отличающие ей от кривой компенсированного спроса, которая будет рассмотрена в следующем параграфе.

1. Каждая точка на кривой некомпенсированного спроса показывает то количество первого блага, которое максимизирует полезность потребителя при каждой возможной цене этого блага.

2. Достигаемый уровень полезности изменяется по мере движения вдоль кривой некомпенсированного спроса. Причём, чем ниже цена блага, тем выше уровень полезности, достигаемый потребителем (сопоставьте рис. 3.9(а) и 3.9(б)). Исключение составляет кривая некомпенсированного спроса на благо, являющееся совершенным субститутом по отношению к другому товару.

3. Номинальный (то есть *денежный*) доход потребителя не изменяется при движении вдоль кривой некомпенсированного спроса.

Пример для самостоятельного рассмотрения. Нарисуйте кривые «цена-потребление» и кривые некомпенсированного спроса для пары благ, являющихся совершенными субститутами, и для пары благ, являющихся совершенными комплементами.

§2. Эффект замещения и эффект дохода.

Воздействие изменения цены на количество спрашиваемого блага является более сложным явлением, чем воздействие изменения дохода. Геометрически эту сложность можно объяснить тем, что при изменении цены не только перемещается линия бюджетного ограничения, но также меняется и её наклон. Следовательно, движение к новому, максимизирующему полезность выбору, влечёт за собой не только движение к другой кривой безразличия, но также и изменение **MRS**. Поэтому когда изменяются цены, возникают два аналитически различных эффекта.

Уменьшение цены некоторого товара при постоянстве цен прочих товаров представляет собой снижение **относительной цены** этого товара (данный товар дешевеет по отношению ко всем другим товарам). В то же время, хотя номинальные (денежные) цены других товаров остаются неизменными, эти товары становятся дороже относительно данного товара. Потребитель будет стремиться замещать относительно подорожавшие блага благом, относительно подешевевшим, и спрос на этот подешевевший товар возрастёт. В этом состоит суть **эффекта замещения**.

Помимо этого, уменьшение цены некоторого товара приводит к увеличению **реального дохода** потребителя, так как на тот же самый номинальный (денежный) доход потребитель может купить большее количество благ. Причём, не только больше подешевевшего блага, но и других благ тоже. Более того, если потребитель ощущает себя богаче в результате снижения цены данного блага и это данное благо является инфериорным, а другие товары нормальными, то рост реального дохода может привести к уменьшению спроса на подешевевшее благо. В этом состоит суть **эффекта дохода**.

Итак, изменение в спросе, вызванное изменением рыночной нормы обмены между двумя благами, называется эффектом замещения. Другими словами, **эффект замещения** – *это изменение в потреблении товара только в результате изменения его цены по отношению к ценам всех других благ; то есть изменение в объёме покупок товара (за период времени), которое наблюдалось бы, если бы реальный доход потребителя был откорректирован так, чтобы от изменения цены его благосостояние и не ухудшилось бы и не улучшилось бы.*

Эффект дохода – *изменение в потреблении товара в ответ на изменение в его цене, рассматриваемое только как результат изменения реального дохода потребителя (его способности приобретать больше или меньше данного товара). Реальный доход – это покупательная сила денег, то есть то количество товаров и услуг, которое индивид может приобрести на свой номинальный (денежный) доход. Эффект дохода возникает потому, что изменение цены неизбежно изменяет реальный доход потребителя, следовательно, потребитель не может оставаться на первоначально кривой безразличия, но должен переместиться на новую кривую безразличия.*

Сначала мы рассмотрим эти эффекты графически, а затем проведём математический анализ.

Графический анализ эффекта замещения и эффекта дохода.

Пусть цена первого блага снижается. Тогда потребитель перемещается из точки **1** в точку **2**,

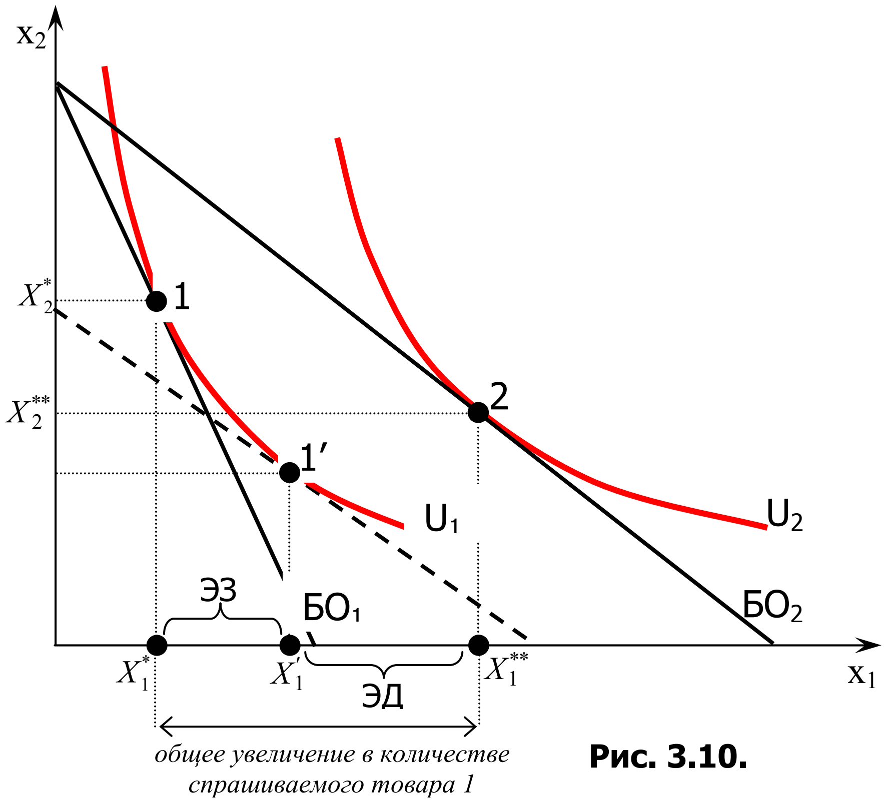

Рис. 3.10.

как показано на рис. **3.10**, где первое благо является нормальным. Этот график демонстрирует вычленение эффекта дохода и эффекта замещения по методу, предложенному Хиксом. Особенность подхода Джона Хикса к эффекту замещения состоит в том, что понимается им под словами: «благосостояние потребителя при изменении цены не улучшилось, не ухудшилось, а осталось прежним». Хикс понимает это таким образом, что **не изменяется уровень полезности**, которую доставляет потребителю потребление данного набора благ.

Линия, проведённая пунктиром через точку **1′**, называется **компенсированной**, или фиктивной, бюджетной линией. Мы проводим её для того, чтобы теоретически отделить эффект замещения от эффекта дохода, которые в реальной жизни неотделимы друг от друга. В реальной жизни мы можем наблюдать только движение из точки **1** в точку **2**, то есть общее изменение величины спроса на первое благо, вызванное снижением цены этого блага:

(3.8) $$\Delta x_1 = x_1^{**} - x_1^{*}$$

Это **общее изменение** складывается из двух величин – эффекта замещения (движение из точки **1** в точку **1′**) и эффект дохода (движение из точки **1′** в точку **2**). Чтобы нейтрализовать действие эффекта дохода и продемонстрировать эффект замещения в чистом виде, мы проводим фиктивную бюджетную линию (фиктивную, потому что её нет в реальной жизни) параллельно новой бюджетной линии **$БО_2$** и так, чтобы она касалась старой кривой безразличия **U_1**. Эта фиктивная бюджетная линия отбрасывает нашего потребителя на прежний уровень полезности при новом соотношении цен на рынке (её наклон такой же, как и наклон **$БО_2$**). Тем самым благосостояние потребителя не изменяется при уменьшении цены и действие эффекта дохода нейтрализуется. Мы наблюдаем на графике увеличение спроса на первое благо только за счёт снижения цены этого блага, но не за счёт роста реального дохода потребителя, то есть эффект замещения в чистом виде:

(3.9) $$\Delta x_1 \Big|_{\text{ЭЗ}} = x_1^{'} - x_1^{*}$$

Весь оставшийся прирост спроса на первое благо происходит уже за счёт увеличения реального дохода индивида в результате уменьшения цены блага, то есть за счёт эффекта дохода:

(3.10) $$\Delta x_1 \Big|_{\text{ЭД}} = x_1^{**} - x_1^{'}$$

Как можно отделить эффект замещения от эффекта дохода в реальной жизни? Поскольку в результате снижения цены у потребителя высвободилась некоторая сумма денег, то эту сумму денег нужно изъять у потребителя для того, чтобы уровень его благосостояния (по Хиксу – уровень полезности) остался неизменным. Это можно назвать **компенсацией** со знаком «минус». Более очевидным понятие компенсации становится, когда цена первого блага растёт, как показано на рис. **3.11**. Здесь

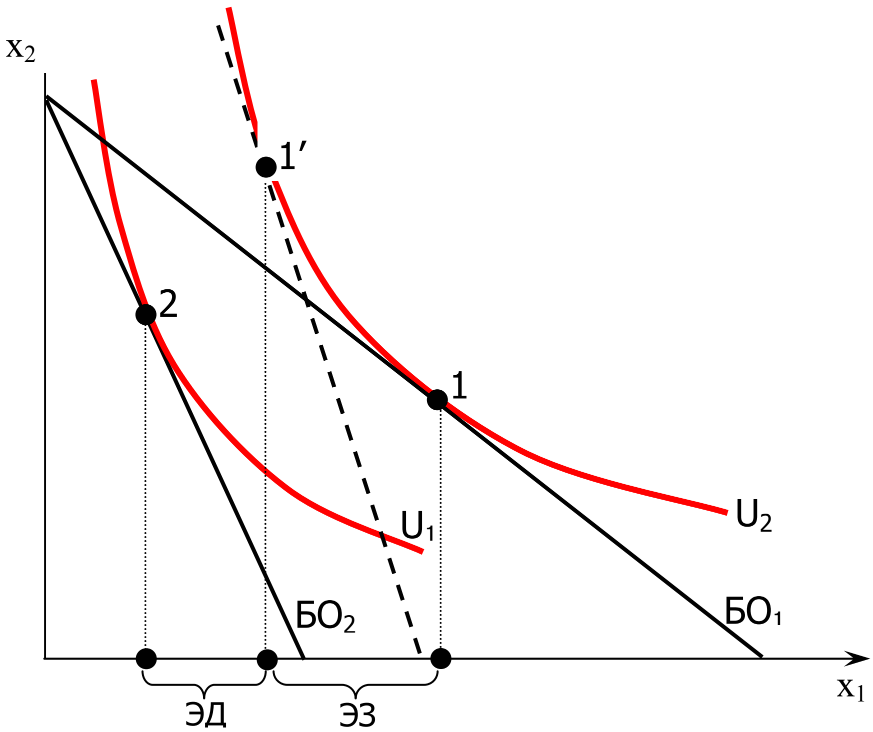

Рис. 3.11.

компенсация – это та сумма денег, которую нужно выдать потребителю, чтобы он остался на прежнем высоком уровне благосостояния (уровне полезности $\mathbf{U_2}$) при увеличении цены первого блага.

Важно подчеркнуть, что в действительности индивид не может двигаться из точки **1** в точку **1′**, а оттуда в точку **2**. Точку **1′** мы вообще никогда не можем наблюдать в реальности – она аналитически выводится лишь в теории. Реально обозреваемы лишь точки **1** и **2** – это точки на кривой спроса потребителя.

Кривая компенсированного спроса.

Когда мы рассматривали кривые обычного (некомпенсированного) спроса (глава **3**, **§1**), полезность, получаемая потребителем, изменялась вдоль кривой спроса. Это было связано с тем, что при снижении цены блага **1**, потребитель перемещался на более высокую кривую безразличия, отражающую более высокий уровень полезности, так как кривая спроса строилась при допущении, что **номинальный** доход потребителя остаётся неизменным. Отсюда снижение цены p_1 улучшает благосостояние потребителя за счёт увеличения реальной покупательной способности денег. Это наиболее общий способ построения кривой спроса, хотя и не единственный.

Альтернативный подход исходит из неизменности **реального** дохода потребителя (то есть из неизменности уровня полезности) для того, чтобы рассмотреть реакцию только на изменение цены p_1. Этот подход проиллюстрирован на рис. **3.12 (а)**. Мы оставляем уровень полезности постоянным (например, U_1) при снижении цены первого блага – p_1. Поскольку p_1 уменьшается, номинальный доход потребителя умышленно урезается, чтобы помешать любому увеличению полезности от происходящего снижения цены. Другими словами, эффект дохода от изменения цены «компенсируется» так, чтобы оставить потребителя на прежнем уровне полезности U_1. Если бы мы проанализировали случай с увеличением цены, то такая компенсация была бы положительной: денежный доход потребителя должен был бы возрасти, чтобы позволить ему остаться на прежней кривой безразличия после увеличения цены. Мы можем суммировать эти результаты следующим образом:

Кривая компенсированного спроса показывает взаимосвязь между ценой блага и количеством этого блага, которое покупается потребителем при данной цене, при условии, что цены других благ и **полезность** остаются постоянными.

Построение кривой компенсированного спроса показано на рис. **3.12 (а,б)**. Пусть цены первого блага уменьшается дважды: $p_1^{'} > p_1^{''} > p_1^{'''}$, что приводит к изменению бюджетной линии от **БО₁** к **БО₂** и от **БО₂** к **БО₃**.

Наклон **БО₁** $= -\dfrac{p_1^{'}}{p_2}$

Наклон **БО₂** $= -\dfrac{p_1^{''}}{p_2}$

Соответственно наклон фиктивной

бюджетной линии **2** $= -\frac{p_1''}{p_2}$

Наклон **БО₃** $= -\frac{p_1'''}{p_2}$ и наклон

фиктивной бюджетной линии 3

$= -\frac{p_1'''}{p_2}$

Поскольку $p_2 = const$ и $p_1' > p_1'' > p_1'''$, то соответственно выбираемое количество **1-го** блага: $x_1' < x_1'' < x_1'''$. Сносяэти точки на нижний график, получаем кривую компенсированного спроса, то есть кривую спроса, являющуюся решением задачи минимизации расходов потребителя при фиксированном уровне полезности и при изменении цены **1-го** блага.

Действительно, в **§2** второй главы, анализируя проблему минимизации расходов потребителя при некотором заданном уровне полезности, мы строго формально вывели **функции** компенсированного (хиксианского) спроса нашего индивида (см. **2.19**). В данном параграфе мы осуществили графическое представление функции $x_1^* = h_1(p_1, p_2, U_1)$, при $p_2, U_1 = const$, получив тем самым кривую компенсированного спроса потребителя на первое благо, отражающую изменение в потреблении этого блага при изменении его цены, минимизирующее расходы индивида для достижения требуемого уровня полезности U_1.

Свойства кривой компенсированного спроса.

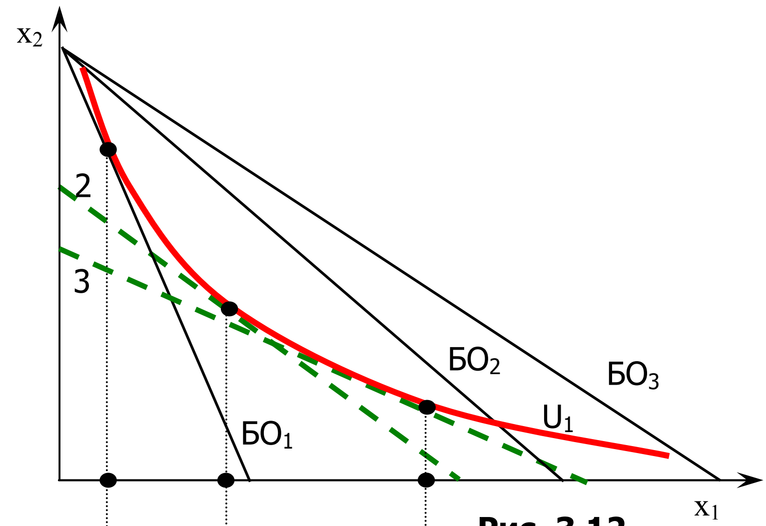

Рис. 3.12

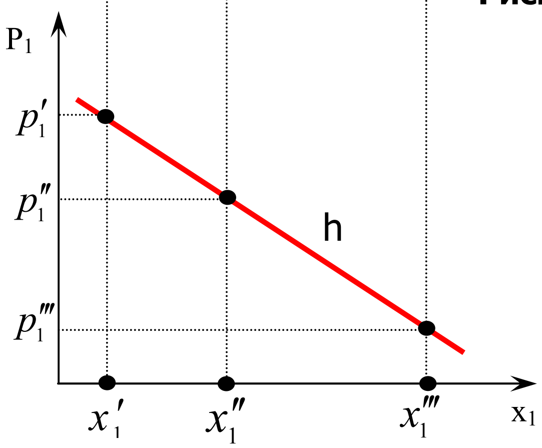

Рис. 3.12(б)

1. Каждая точка на кривой компенсированного спроса показывает то количество блага **1**, которое минимизирует расходы потребителя при достижении им определённого уровня полезности $\overline{U}$ при каждой возможной цене блага 1.
2. Достигаемый уровень полезности **не меняется** по мере движения вдоль кривой компенсированного спроса.
3. Зато **изменяется номинальный доход потребителя**: при уменьшении цены мы каждый раз как бы «отбираем» у индивида часть денег, чтобы он не смог почувствовать себя богаче, то есть, чтобы сохранить неизменным его реальный доход (уровень полезности). При повышении цены мы, напротив, компенсируем потребителю снижение его жизненного уровня, доплачивая определённую часть денег, чтобы он остался на прежнем уровне полезности. Следовательно, его номинальный доход снова изменяется при постоянстве реального дохода.

Напомним, что при движении вдоль кривой некомпенсированного спроса **номинальный** доход потребителя остаётся **неизменным**. При этом, однако, изменяется реальный доход потребителя, так как отсутствует эффект компенсации, и увеличение объёма спроса происходит как за счёт эффекта замещения в результате снижения цены, так и за счёт эффекта дохода в результате роста реального дохода.

Кривые же компенсированного спроса отражают только эффекты замещения от изменения цен; эффекты дохода здесь отсутствуют.

§3. Уравнение Слуцкого.

Уравнение Евгения Слуцкого (1915 г.) является аналитическим представлением эффекта замещения и эффекта дохода. Оно позволяет дать более строгое (по сравнению с графическим анализом) объяснение величины и направления этих эффектов. Предлагаемый здесь вывод уравнения будет базироваться на принципе двойственности, сформулированном в конце §2 второй главы, и на лемме Шепарда. Поэтому прежде, чем перейти непосредственно к уравнению Слуцкого, мы представим один из способов доказательства леммы Шепарда. Этот способ основывается на теореме об огибающей, которая часто используется в микроэкономическом анализе.

Теорема об огибающей.

Рассмотрим проблему минимизации с учётом изменения одного из параметров в ограничении и целевой функции. Заметим, что полученный здесь результат будет таким же и для задачи максимизации.

Пусть целевая функция: $g(x_1, x_2 a)$, где a - параметр. И пусть $M(a)$ - минимальное значение этой функции.

(3.11) $M(a) = \min\limits_{X_1, X_2} g(x_1, x_2, a)$ при условии, что $h(x_1, x_2, a) = 0.$

(3.12) $L = g(x_1, x_2, a) - \lambda \cdot h(x_1, x_2, a) \to \min$

(3.13)
$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = \dfrac{\partial g}{\partial x_1} - \lambda \cdot \dfrac{\partial h}{\partial x_1} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = \dfrac{\partial g}{\partial x_2} - \lambda \cdot \dfrac{\partial h}{\partial x_2} = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = h(x_1, x_2, a) = 0$$

Эти условия минимизации первого порядка определяют функции оптимального выбора: $x_1(a)$ и $x_2(a)$, которые, в свою очередь, определяют минимальное значение целевой функции:

(3.14) $$M(a) \equiv g(x_1(a), x_2(a), a)$$

<u>Теорема об огибающей утверждает</u>, что:

(3.15) $$\frac{\partial M(a)}{\partial a} = \frac{\partial L(x_1, x_2, a)}{\partial a}\Bigg|_{x_i = x_i(a)} = \frac{\partial g(x_1, x_2, a)}{\partial a}\Bigg|_{x_i = x_i(a)} - \lambda \cdot \frac{\partial h(x_1, x_2, a)}{\partial a}\Bigg|_{x_i = x_i(a)}$$, где $i = 1,2$.

Здесь интерпретация частных производных нуждается в специальном объяснении: они являются производными функций g и h по параметру a в точке оптимального выбора, то есть берутся оптимальные значения x_1 и x_2 и рассматриваются как фиксированные.

Доказательство.

Продифференцируем тождество $M(a) \equiv g(x_1(a), x_2(a), a)$ по a:

(3.16) $$\frac{dM}{da} = \frac{\partial g}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{da} + \frac{\partial g}{\partial x_2} \cdot \frac{dx_2}{da} + \frac{\partial g}{\partial a}$$

Из условий первого порядка мы получаем, что:

(3.17) $$\frac{\partial g}{\partial x_1} = \lambda \cdot \frac{\partial h}{\partial x_1} \text{ и } \frac{\partial g}{\partial x_2} = \lambda \cdot \frac{\partial h}{\partial x_2}.$$

Подставим это в уравнение:

(3.18) $\frac{dM}{da} = \lambda \cdot (\frac{\partial h}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{da} + \frac{\partial h}{\partial x_2} \cdot \frac{dx_2}{da}) + \frac{\partial g}{\partial a}$

Очевидно, что функции оптимального выбора должны тождественно удовлетворять условию связи:

(3.19) $h(x_1(a), x_2(a), a) \equiv 0$

Продифференцировав это тождество по a, получаем:

(3.20) $\frac{\partial h}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{da} + \frac{\partial h}{\partial x_2} \cdot \frac{dx_2}{da} + \frac{\partial h}{\partial a} \equiv 0$

(3.21) $\Rightarrow \frac{\partial h}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{da} + \frac{\partial h}{\partial x_2} \cdot \frac{dx_2}{da} = -\frac{\partial h}{\partial a}$

Подставляя **(3.21)** в **(3.18)** получаем:

(3.22) $\frac{dM}{da} = \lambda \cdot (-\frac{\partial h}{\partial a}) + \frac{\partial g}{\partial a} = \frac{\partial g}{\partial a} - \lambda \cdot \frac{\partial h}{\partial a}$, что и требовалось доказать.

Лемма Шепарда.

Пусть $x_1 = h_1(p_1, p_2, \overline{U})$ – компенсированный спрос потребителя на благо **1**. Тогда если функция расходов потребителя $E(p_1, p_2, \overline{U})$ дифференцируема и $p_1 > 0$, то

(3.23) $x_1 = h_1(p_1, p_2, \overline{U}) = \frac{\partial E(p_1, p_2, \overline{U})}{\partial p_1}$

Доказательство.

Здесь E – минимальное значение целевой функции $g = p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2$. Роль параметра a играет цена первого блага p_1. Тогда в соответствии с теоремой об огибающей:

(3.24) $\frac{\partial E(p_1, p_2, \overline{U})}{\partial p_1} = \left.\frac{\partial g(x_1, x_2, p_1)}{\partial p_1}\right|_{x_i = x_i(p_1)} - \lambda \cdot \left.\frac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial p_1}\right|_{x_i = x_i(p_1)}$

(3.25) Но $\dfrac{\partial U(x_1,x_2)}{\partial p_1}=0$, так как функция ограничения не зависит от p_1.

(3.26) $\dfrac{\partial g(x_1,x_2,p_1)}{\partial p_1}=(p_1\cdot x_1+p_2\cdot x_2)'_{p_1}=x_1$

Следовательно, $\dfrac{\partial E(p_1,p_2,\overline{U})}{\partial p_1}=x_1$, где $x_1=h_1(p_1,p_2,\overline{U})$, так как

(3.27) оптимальное количество каждого блага в задаче минимизации расходов потребителя при заданном уровне полезности есть значение функции компенсированного спроса при определённой цене этого блага.

Вывод уравнения Слуцкого.

В §1 второй главы мы решили задачу максимизации полезности при заданном бюджетном ограничении и получили функции некомпенсированного спроса потребителя на все блага из товарного набора. Поскольку здесь мы будем рассматривать изменение цены первого блага, то проанализируем некомпенсированный спрос на него:

(3.28) $x_1(p_1,...,p_n,I)$

В §2 второй главы мы решили задачу минимизации расходов потребителя при заданном уровне полезности и получили функции компенсированного спроса потребителя. Функция компенсированного спроса на первое благо:

(3.29) $h_1(p_1,...,p_n,\overline{U})$

Затем мы вывели функцию расходов потребителя:

(3.30) $E(p_1,...,p_n,\overline{U})$

и сформулировали принцип двойственности между выше указанными задачами потребительского выбора. Из этого принципа вытекало несколько важных тождеств, два их которых мы используем при выводе уравнения Слуцкого:

(3.31) $$E(p_1,...,p_n,V(p_1,...,p_n,I)) \equiv I$$

(3.32) $$h_1(p_1,...,p_n,\bar{U}) \equiv x_1(p_1,...,p_n,E(p_1,...,p_n,\bar{U}))$$

Теперь мы можем продифференцировать уравнение (**3.32**) по p_1, помня, что p_1 дважды включается в функцию некомпенсированного спроса:

(3.33) $$\frac{\partial h_1(p_1,...,p_n,\bar{U})}{\partial p_1} = \frac{\partial x_1(p_1,...,p_n,E(p_1,...,p_n,\bar{U}))}{\partial p_1} + \\ + \frac{\partial x_1(p_1,...,p_n,E(p_1,...,p_n,\bar{U}))}{\partial E} \cdot \frac{\partial E(p_1,...,p_n,\bar{U})}{\partial p_1}$$

Использовав тождество (**3.31**), мы можем переписать уравнение (**3.33**) следующим образом:

(3.34) $$\frac{\partial h_1(p_1,...,p_n,\bar{U})}{\partial p_1} = \frac{\partial x_1(p_1,...,p_n,I)}{\partial p_1} + \frac{\partial x_1(p_1,...,p_n,I)}{\partial I} \cdot \frac{\partial E(p_1,...,p_n,\bar{U})}{\partial p_1}$$

Использовав лемму Шепарда (**3.27**) и поменяв местами члены уравнения (**3.34**), получаем уравнение Слуцкого:

(3.35) $$\frac{\partial x_1(p_1,...,p_n,I)}{\partial p_1} = \frac{\partial h_1(p_1,...,p_n,\bar{U})}{\partial p_1} - \frac{\partial x_1(p_1,...,p_n,I)}{\partial I} \cdot x_1$$

Проанализируем его.

Выражение в левой части уравнения Слуцкого

(3.36) $$\frac{\partial x_1(p_1,...,p_n,I)}{\partial p_1}$$

отражает изменение в некомпенсированном спросе потребителя на первое благо при бесконечно малом изменении цены этого блага. Как было сказано в предыдущем параграфе, это изменение есть сумма двух эффектов – замещения и дохода. Они представлены в правой части уравнения Слуцкого.

(3.37) $$\frac{\partial h_1(p_1,...,p_n,\bar{U})}{\partial p_1}$$

представляет собой изменение в компенсированном спросе потребителя на первое благо при бесконечно малом изменении цены этого блага. Как известно, в компенсированном спросе элиминирован эффект дохода, следовательно, это слагаемое отражает эффект замещения в чистом виде. Отсюда понятно, что второе слагаемое в правой части уравнения

(3.38) $$-\frac{\partial x_1(p_1,...,p_n,I)}{\partial I}\cdot x_1$$

представляет собой эффект дохода, возникающий при изменении цены.

В некоторых учебниках по микроэкономике уравнение Слуцкого может быть представлено в несколько ином виде:

(3.39) $$\frac{\partial x_1}{\partial p_1}=\frac{\partial x_1}{\partial p_1}\bigg|_{comp}-\frac{\partial x_1}{\partial I}\cdot x_1$$

Здесь просто использовано иное обозначение эффекта замещения, что не изменяет содержания уравнения.

Уравнение Слуцкого позволяет дать объяснение направление эффекта замещения и эффекта дохода.

Предположим, что цена первого блага снижается. Тогда в результате действия эффекта замещения потребитель сократит потребление этого блага, заменяя его другими, относительно более дешёвыми, товарами. Следовательно, эффект замещения всегда будет иметь отрицательный знак:

(3.40) $$\frac{\partial x_1}{\partial p_1}\bigg|_{comp}<0$$

Знак эффекта дохода зависит от того, с каким благом мы имеем дело: с нормальным или инфериорным. Допустим, что рассматриваемый товар является нормальным благом. Тогда по определению:

(3.41) $$\frac{\partial x_1}{\partial I}>0\Rightarrow\frac{\partial x_1}{\partial I}\cdot x_1>0\Rightarrow$$

(3.42) $$\Rightarrow-\frac{\partial x_1}{\partial I}\cdot x_1<0$$

Следовательно, в случае нормального блага эффект дохода тоже будет отрицательным. Отсюда понятно, что общее изменение в спросе в результате изменения цены:

(3.43) $$\frac{\partial x_1}{\partial p_1}<0,$$

что на экономическом языке интерпретируется как закон спроса. Кривая некомпенсированного спроса здесь будет иметь отрицательный наклон (см. рис. **3–13**).

Предположим теперь, что благо 1 является инфериорным благом, т.е. товаром

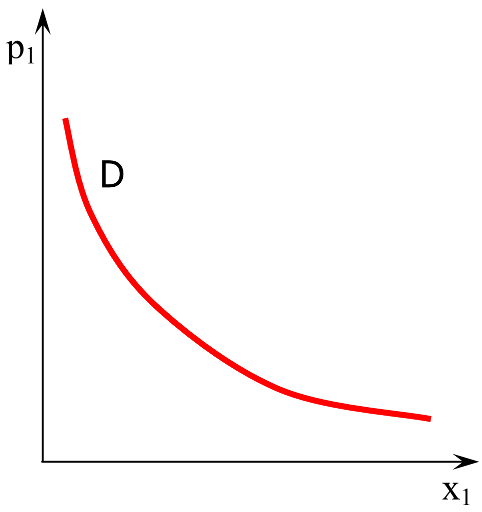

Рис. 3.13

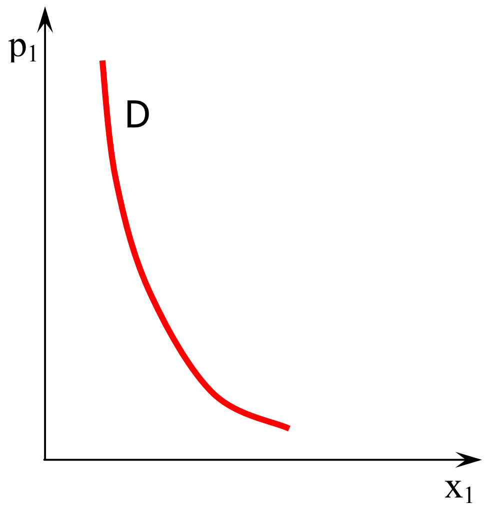

Рис. 3.14

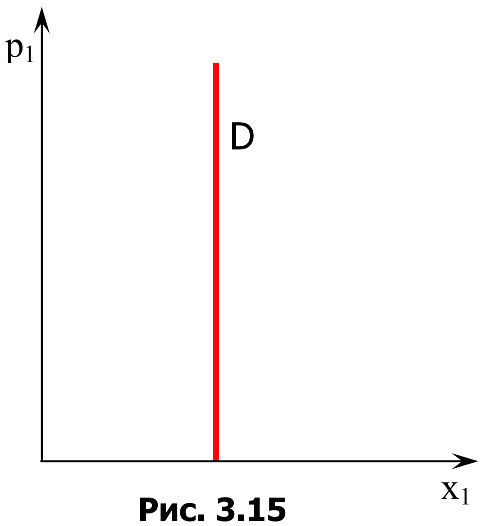

Рис. 3.15

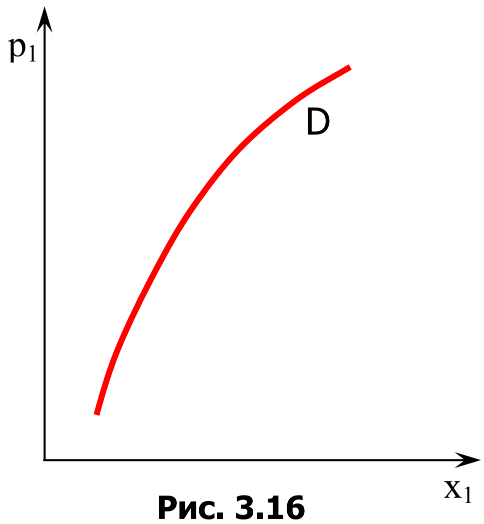

Рис. 3.16

низшей категории. Эффект замещения в этом случае, по-прежнему, будет отрицательным. А эффект дохода изменит свой знак. Действительно, по определению инфериорного блага:

(3.44) $\frac{\partial x_1}{\partial I} < 0 \Rightarrow \frac{\partial x_1}{\partial I} \cdot x_1 < 0 \Rightarrow$

(3.45) $-\frac{\partial x_1}{\partial I} \cdot x_1 > 0$

Это означает, что при понижении цены товара низшей категории наш потребитель расширит его потребление в силу действия эффекта замещения, но сократит покупки данного блага в результате влияния эффекта дохода. Каким же будет общее изменение в спросе? Ответ на этот вопрос зависит от абсолютной величины разнонаправленных эффектов.

Если эффект замещения по модулю превышает эффект дохода, то закон спроса продолжает действовать и кривая некомпенсированного спроса сохраняет отрицательный наклон, хотя здесь она будет не такой пологой, как в ситуации с нормальным благом (см. рис. **3–14**):

(3.46) $$\left|\frac{\partial x_1}{\partial p_1}_{COMP}\right| > \left|-\frac{\partial x_1}{\partial I}\cdot x_1\right| \Rightarrow \frac{\partial x_1}{\partial p_1} < 0.$$

Если же эффект замещения по своей абсолютной величине в точности равен эффекту дохода, взятому по модулю

(3.47) $$\left|\frac{\partial x_1}{\partial p_1}_{COMP}\right| = \left|-\frac{\partial x_1}{\partial I}\cdot x_1\right|,$$

тогда потребитель не изменит спрос на данное благо в результате изменения его цены:

(3.48) $$\frac{\partial x_1}{\partial p_1} = 0$$

Закон спроса уже не действует в данной ситуации, а кривая спроса становится строго вертикальной линией, как показано на рис. **3–15**.

Наконец, возможна ситуация, когда эффект замещения по своей абсолютной величине оказывается меньше эффекта дохода, взятому по модулю:

(3.49) $$\left|\frac{\partial x_1}{\partial p_1}_{COMP}\right| < \left|-\frac{\partial x_1}{\partial I}\cdot x_1\right|,$$

тогда потребитель сократит спрос на инфериорное благо в результате уменьшения его цены. Общее изменение в спросе будет положительным:

(3.50) $$\frac{\partial x_1}{\partial p_1} > 0$$

Графически эта ситуация отражается кривой спроса, имеющей положительный наклон (см. рис. **3–16**).

Конечно, последняя ситуация является скорее теоретической конструкцией и на практике не встречается. Случай, представленный на рис. **3–15**, в обычной жизни встречается редко. поэтому экономисты и говорят о действии закона спроса. Тем не менее теоретический анализ двух последних ситуаций оказывается очень полезным.

Пример для самостоятельного рассмотрения. Представьте на графике – и объясните её экономический смысл – декомпозицию по Хиксу для случаев:

а) двух благ, являющихся совершенными комплементами;

б) двух благ, являющихся совершенными субститутами;

в) двух благ, описывающихся квазилинейными предпочтениями.