ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина Уравнения математической физики

Курс 3 Семестр 6 2004/2005 уч.г.

Фамилия студента ______________________ **№ группы** ________

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

Решить задачи:

1.④ $u_{tt} = u_{xx} - 2e^x \cos t\,,\ t > 0\,,\ x > 0\,,$
$u|_{t=0} = 3e^x - x^2\,,\ u_t|_{t=0} = 2x\,,\ x \geqslant 0\,, \quad (u + u_x)|_{x=0} = 2e^t + 4\cos t\,,\ t \geqslant 0\,.$

2.⑥ $u_{tt} = u_{xx} + u - xt + 2\cos x\,,\ t > 0\,,\ 0 < x < \dfrac{\pi}{2}\,,$
$u|_{t=0} = 0\,,\ u_t|_{t=0} = \dfrac{\pi}{2}\,,\ 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}\,, \quad u_x|_{x=0} = t\,,\ u|_{x=\frac{\pi}{2}} = \dfrac{\pi}{2}t\,,\ t \geqslant 0\,.$

3.④ $u_{tt} = 3\Delta u + 18e^{3t}\cos(x - y + z)\,,\ t > 0\,,\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,, \quad \Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}\,,$
$u|_{t=0} = xy^2 z\,, \quad u_t|_{t=0} = 3\cos(x - y + z)\,.$

4.④ $\Delta u = 0\,,\ 1 < r < 2\,,\ r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,,$
$u|_{r=1} = 2\sin^2\varphi + \cos 2\theta \cos 2\varphi\,,\ u|_{r=2} = 31 \sin 2\theta \sin\varphi\,.$

5.⑤ Решите при всех допустимых значениях λ и a уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^{1} (xy^3 - x^2y^2)\varphi(y)\,dy + ax^2 + x^3$$

и найдите характеристические числа, собственные функции интегрального оператора.

6.⑤ (Рекомендуется для 1, 3 и 7 факультетов)

$$u_t = 4\Delta u - u + J_2(\mu_3^{(2)} r)\cos 2\varphi, \quad r < 1, \quad t > 0, \quad u = u(r,\varphi,t),$$
$$u|_{t=0} = f(r)(2\cos 2\varphi - 3), \quad u|_{r=1} = 0, \quad |u(0)| < \infty.$$

где $f(r)$ — гладкая на $[0,1]$ функция, $\mu_3^{(2)}$ — положительный нуль функции Бесселя J_2, $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}\,,\ x = r\cos\varphi\,,\ y = r\sin\varphi\,.$

6.⑤ (Рекомендуется для 4 и 5 факультетов)

Найдите в $D'(\mathbb{R}^1)$ обобщенное решение уравнения $\dfrac{d^2\varepsilon}{dt^2} + 2\dfrac{d\varepsilon}{dt} = \delta(t)$, обращающееся в нуль при $t < 0$. Принадлежит ли это обобщенное решение ε пространству обобщенных функций медленного роста $S'(\mathbb{R}^1)$?

Вычислить в $D'(\mathbb{R}^1)$ обобщенную производную $\dfrac{d\varepsilon}{dt}$. Какой обобщенной функцией является $\dfrac{d\varepsilon}{dt}$: регулярной или сингулярной в $D'(\mathbb{R}^1)$?

6.⑤ (Рекомендуется для 2 и 8 факультетов)

Покажите, что для всех функций $u(x) \in C^1(|x| \leqslant 1)$, $x = (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$, удовлетворяющих граничному условию $u|_{|x|=1} = x_1 - x_2 + x_3$, имеет место неравенство

$$\int\limits_{|x|<1} (|\nabla u|^2 - 24|x|u)\,dx \geqslant -\frac{8\pi}{7}.$$

Заказ - Тираж - 300 МФТИ - 51

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина Уравнения математической физики

Курс 3 Семестр 6 2004/2005 уч.г.

Фамилия студента ______________________ **№ группы** ________

Сумма баллов			Оценка	
Фамилия проверяющего			Фамилия экзаменатора	

Решить задачи:

1.④ $u_{tt} = 4u_{xx} - 12\cos(x+4t)$, $t>0$, $x>0$, $u|_{t=0} = x + \cos x + \sin x$,
$u_t|_{t=0} = 2\cos x - 2 - 4\sin x$, $x \geqslant 0$, $(u - u_x)|_{x=0} = \cos 4t + \sin 4t - 2\cos 2t$, $t \geqslant 0$.

2.⑥ $u_{tt} = u_{xx} + u + \sin x - \dfrac{\pi}{2}xt$, $t>0$, $0<x<\dfrac{\pi}{2}$,
$u|_{t=0} = 0$, $u_t|_{t=0} = \left(\dfrac{\pi}{2}+1\right)x$, $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, $u|_{x=0} = 0$, $u_x|_{x=\frac{\pi}{2}} = \dfrac{\pi}{2}t$, $t \geqslant 0$.

3.④ $u_t = \Delta u + (x^2+y^2-2z^2)\cos t$, $t>0$, $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,
$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$, $u|_{t=0} = e^{-y^2}\sin(x+z)$.

4.④ $\Delta u = 20$, $r < \sqrt{3}$, $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\Delta u = u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}$,
$u|_{r=\sqrt{3}} = 15 + 15\cos 2\theta - \sqrt{3}\sin\theta\sin\varphi$.

5.⑤ Решите при всех допустимых значениях λ и a уравнение

$$\varphi(x) = \lambda\int_{-\pi}^{\pi}(x\sin y + \cos y\cos x)\varphi(y)\,dy + ax + \cos x$$

и найдите характеристические числа, собственные функции интегрального оператора.

6.⑤ **(Рекомендуется для 1, 3 и 7 факультетов)**

$$u_t = 9\Delta u - 2u + f(r)\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right),\quad r<2,\quad t>0,\quad u = u(r,\varphi,t),$$

$$u|_{t=0} = f(r)\cos 3\varphi + 2J_1\left(\frac{\mu_3^{(1)}}{2}r\right)\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{6}\right),\quad u|_{r=2}=0,$$

где $f(r)$ — гладкая на $[0;2]$ функция, $\mu_3^{(1)}$ — положительный нуль функции Бесселя J_1, $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

6.⑤ **(Рекомендуется для 4 и 5 факультетов)** Найдите в $D'(\mathbb{R}^1)$ обобщенное решение уравнения $\dfrac{d^2\varepsilon}{dt^2} + 6\dfrac{d\varepsilon}{dt} + 8\varepsilon = \delta(t)$, обращающееся в нуль при $t<0$. Принадлежит ли это обобщенное решение ε пространству обобщенных функций медленного роста $S'(\mathbb{R}^1)$? Вычислить в $D'(\mathbb{R}^1)$ обобщенную производную $\dfrac{d\varepsilon}{dt}$. Какой обобщенной функцией является $\dfrac{d\varepsilon}{dt}$: регулярной или сингулярной в $D'(\mathbb{R}^1)$?

6.⑤ **(Рекомендуется для 2 и 8 факультетов)**
Покажите, что для всех функций $u(x) \in C^1(1 \leqslant |x| \leqslant 2)$, $x = (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$, удовлетворяющих граничному условию $u|_{|x|=1} = 0$, $u|_{|x|=2} = 1$, имеет место неравенство

$$\int_{1<|x|<2}\left(|\nabla u|^2 - \frac{2u}{|x|}\right)dx \geqslant -\frac{\pi}{3}.$$

Заказ - Тираж - 300 МФТИ - 52

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина $\boxed{\text{Уравнения математической физики}}$

Курс $\boxed{3}$ Семестр $\boxed{6}$ 2004/2005 уч.г.

Фамилия студента ______________________ **№ группы** ________

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

Решить задачи:

1.④ $u_{tt} = 9u_{xx} + 18e^{-3t}\sin x$, $t > 0$, $x > 0$, $u|_{t=0} = 2x^2 + 2\sin x + \cos x$,
$u_t|_{t=0} = -3\cos x$, $x \geqslant 0$, $(2u + u_x)|_{x=0} = 4e^{-3t} + 18t^2 + 6t$, $t \geqslant 0$.

2.⑥ $u_{tt} + 2u = u_{xx} + 2\cos^2 x$, $t > 0$, $0 < x < \pi$, $u|_{t=0} = x^2$, $u_t|_{t=0} = 1$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$,
$u_x|_{x=0} = 0$, $u_x|_{x=\pi} = 2\pi$, $t \geqslant 0$.

3.④ $u_{tt} = \Delta u + 9t\sin(2x - 2y + z)$, $t > 0$, $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,
$u|_{t=0} = 2\sin(2x - 2y + z)$, $u_t|_{t=0} = x^3yz$.

4.④ $\Delta u = 0$, $1 < r < 2$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$,
$u_r|_{r=1} = 5\sin^2\theta\cos^2\varphi$, $u|_{r=2} = -\dfrac{5}{6} - \dfrac{5}{2}\cos 2\theta$.

5.⑤ Решите при всех допустимых значениях λ и a уравнение

$$\varphi(x) = \lambda\int_{-1}^{1}(x^2y^2 - xy)\varphi(y)\,dy + x^3 + a$$

и найдите характеристические числа, собственные функции интегрального оператора.

6.⑤ (Рекомендуется для 1, 3 и 7 факультетов)

$$u_t = 5\Delta u - 3u + J_3\left(\frac{1}{4}\mu_2^{(3)}r\right)\cos 3\varphi + f(r)\sin 2\varphi,\quad r < 4,\quad t > 0,\quad u = u(r,\varphi,t),$$

$$u|_{t=0} = f(r)\cos 3\varphi,\quad u|_{r=4} = 0,\quad |u(0)| < \infty,$$

где $f(r)$ — гладкая на $[0;4]$ функция, $\mu_2^{(3)}$ — положительный нуль функции Бесселя J_3, $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

6.⑤ (Рекомендуется для 4 и 5 факультетов) Найдите в $D'(\mathbb{R}^1)$ обобщенное решение уравнения $\dfrac{d^2\varepsilon}{dt^2} + 4\dfrac{d\varepsilon}{dt} + 4\varepsilon = \delta(t)$, обращающееся в нуль при $t < 0$. Принадлежит ли это обобщенное решение ε пространству обобщенных функций медленного роста $S'(\mathbb{R}^1)$? Вычислить в $D'(\mathbb{R}^1)$ обобщенную производную $\dfrac{d\varepsilon}{dt}$. Какой обобщенной функцией является $\dfrac{d\varepsilon}{dt}$: регулярной или сингулярной в $D'(\mathbb{R}^1)$?

6.⑤ (Рекомендуется для 2 и 8 факультетов)
Покажите, что для всех функций $u(x) \in C^1(|x| \leqslant 1)$, $x = (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$, удовлетворяющих граничному условию $u|_{|x|=1} = x_1 - x_2 + x_3$, имеет место неравенство

$$\int\limits_{|x|<1}(|\nabla u|^2 + 2u)\,dx \geqslant \frac{176\pi}{45}.$$

Заказ - Тираж - 300 МФТИ - 53

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина Уравнения математической физики

Курс 3 Семестр 6 2004/2005 уч.г.

Фамилия студента ______________________ **№ группы** ________

Сумма баллов			**Оценка**	
Фамилия проверяющего			**Фамилия экзаменатора**	

Решить задачи:

1.④ $u_{tt} = 16u_{xx} - 16te^x$, $t > 0$, $x > 0$, $u|_{t=0} = 2e^x + x - 2$, $u_t|_{t=0} = e^x - 4$, $x \geqslant 0$, $(u - 2u_x)|_{x=0} = -\cos 4t + 2\sin 4t - e^{4t} - 9t - 4$, $t \geqslant 0$.

2.⑥ $u_{tt} = 9u_{xx} + u - \pi(1+x) - \dfrac{3}{4}\sin\dfrac{x}{6}$, $t > 0$, $0 < x < 3\pi$,
$u|_{t=0} = \pi(1+x) + \sin\dfrac{x}{6}$, $u_t|_{t=0} = x$, $0 \leqslant x \leqslant 3\pi$, $u|_{x=0} = \pi$, $u_x|_{x=3\pi} = \pi$, $t \geqslant 0$.

3.④ $u_t = \dfrac{1}{4}\Delta u + t^4(x+1)$, $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $t > 0$, $u|_{t=0} = e^{2z-z^2} \cdot \sin(x+y)$.

4.④ $\Delta u = \dfrac{1}{r^4}$, $r > 2$, $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $u(\infty) = 0$, $(u - u_r)|_{r=2} = \sin\theta \cdot \cos^2\dfrac{\theta}{2} \cdot \sin\left(\dfrac{\pi}{6} - \varphi\right)$.

5.⑤ Решите при всех допустимых значениях λ и a уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} (x^2 \cos y + y \sin x)\varphi(y)\,dy + \cos x + a \sin x$$

и найдите характеристические числа, собственные функции интегрального оператора.

6.⑤ (**Рекомендуется для 1, 3 и 7 факультетов**)

$$u_t = 3\Delta u - 2u + f(r)\left(\cos\left(2\varphi - \frac{\pi}{3}\right) + \sin 3\varphi\right), \quad r < 3, \quad t > 0, \quad u = u(r,\varphi,t),$$

$$u|_{t=0} = 2J_3\left(\frac{\mu_2^{(3)}}{3}r\right)\sin 3\varphi, \quad u|_{r=3} = 0, \quad |u(0)| < \infty,$$

где $f(r)$ — гладкая на $[0;3]$ функция, $\mu_2^{(3)}$ — положительный нуль функции Бесселя J_3, $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

6.⑤ (**Рекомендуется для 4 и 5 факультетов**) Найдите в $D'(\mathbb{R}^1)$ обобщенное решение уравнения $\dfrac{d^2\varepsilon}{dt^2} + 2\dfrac{d\varepsilon}{dt} + 2\varepsilon = \delta(t)$, обращающееся в нуль при $t < 0$. Принадлежит ли это обобщенное решение ε пространству обобщенных функций медленного роста $S'(\mathbb{R}^1)$? Вычислить в $D'(\mathbb{R}^1)$ обобщенную производную $\dfrac{d\varepsilon}{dt}$. Какой обобщенной функцией является $\dfrac{d\varepsilon}{dt}$: регулярной или сингулярной в $D'(\mathbb{R}^1)$?

6.⑤ (**Рекомендуется для 2 и 8 факультетов**)
Покажите, что для всех функций $u(x) \in C^1(1 \leqslant |x| \leqslant e)$, $x = (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$, удовлетворяющих граничному условию $u|_{|x|=1} = 0$, $u|_{|x|=e} = -1$, имеет место неравенство

$$\int\limits_{1<|x|<e} \left(|\nabla u|^2 - \frac{2u}{|x|^2}\right) dx \geqslant 4\pi(e+1).$$

Заказ - Тираж - 300 МФТИ - 54

ОТВЕТЫ К экзаменационной работе по УМФ, 2004 – 2005гг.

Вариант 1.

1. $u = e^x \cos t + e^{x+t} + \begin{cases} e^{x-t} - (x-t)^2, \ x \ge t \ge 0, \\ \cos(x-t) + \sin(x-t), \ 0 \le x \le t. \end{cases}$

2. $u = xt + \left(t^2 + \frac{4t}{\pi}\right)\cos x + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\lambda_n + 1)\sqrt{\lambda_n}}\sin\sqrt{\lambda_n}t \cdot \cos(1+2n)x, \quad \lambda_n = (1+2n)^2 - 1.$

$$\frac{\pi}{2} - x = \frac{4}{\pi}\sum_{0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}.$$

3. $u = \left(e^{3t} - \cos t\right)\cos(x - y + z) + 3t^2 xz + xy^2 z.$

4. $u = -1 + \frac{2}{r} + \left(\frac{2r^2}{31} - \frac{64}{31r^3}\right)\cos 2\varphi \sin^2\theta + \frac{124}{7}\left(r - \frac{1}{r^2}\right)\sin\varphi \sin 2\theta$

5.
$$\lambda = \frac{5}{2} : \varphi = x; \ \lambda = -\frac{5}{2} : \varphi = x^2,$$
$$\lambda \ne \pm\frac{5}{2} : \varphi = \frac{2\lambda}{7\left(1 - \frac{2\lambda}{5}\right)}x - \frac{2\lambda a}{5\left(1 + \frac{2\lambda}{5}\right)}x^2 + ax^2 + x^3;$$
$$\lambda = \frac{5}{2} : \varnothing;$$
$$\lambda = -\frac{5}{2} : a = 0, \varphi = -\frac{5}{2}\left(\frac{1}{7}x - C_2 x^2\right) + x^3.$$

6. $u(r,\varphi,t) = \sum_{1}^{\infty} T_k(t) J_2\left(\mu_k^{(2)} r\right)\cos 2\varphi + \sum_{1}^{\infty} Q_k(t) J_0\left(\mu_k^{(0)} r\right)$, где

$$T_k(t) = 2a_k e^{-\left(4\left(\mu_k^{(2)}\right)^2 + 1\right)t}, k \ne 3, \ T_3(t) = \frac{1}{\left(4\left(\mu_3^{(2)}\right)^2 + 1\right)}\left(1 - e^{-\left(4\left(\mu_3^{(2)}\right)^2 + 1\right)t}\right) + 2a_3 e^{-\left(4\left(\mu_3^{(2)}\right)^2 + 1\right)t},$$

$$Q_k(t) = -3b_k e^{-\left(4\left(\mu_k^{(0)}\right)^2 + 1\right)t}$$

$f(r) = \sum^{\infty} a_k J_2\left(\mu_k^{(2)} r\right), f(r) = \sum^{\infty} b_k J_0\left(\mu_k^{(0)} r\right)$, где

$$a_k = \frac{\int_0^1 f(r) J_2\left(\mu_k^{(2)} r\right) r\,dr}{\int_0^1 J_2^2\left(\mu_k^{(2)} r\right) r\,dr}, \ b_k = \frac{\int_0^1 f(r) J_0\left(\mu_k^{(0)} r\right) r\,dr}{\int_0^1 J_0^2\left(\mu_k^{(0)} r\right) r\,dr}$$

6. $\varepsilon = \theta(t)\frac{1 - e^{-2t}}{2} \in S'(R); \frac{d\varepsilon}{dt} = \theta(t)e^{-2t}$ - регулярная обобщенная функция.

6. $u = 1 - |x|^3 + x_1 - x_2 + x_3.$

Вариант 2.

1. $u=\cos(x+4t)+\sin(x+2t)+\begin{cases} x-2t,\ x\ge 2t\ge 0,\\ \sin(x-2t),\ 0\le x\le 2t.\end{cases}$

2. $u=\dfrac{\pi xt}{2}+\left(\dfrac{4t}{\pi}+\dfrac{t^2}{2}\right)\sin x+\dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(1+2n)^2\sqrt{n(n+1)}}\sin\sqrt{\lambda_n}t\cdot\sin(1+2n)x,\quad \lambda_n=(1+2n)^2-1.$

3. $u=\left(x^2+y^2-2z^2\right)\sin t+\dfrac{1}{\sqrt{4t+1}}e^{\frac{-y^2}{4t+1}-2t}\sin(x+z)$

4. $u=10r^2\cos^2\theta-r\sin\theta\sin\varphi$.

5.

$\lambda=\dfrac{1}{\pi}:\quad \varphi=\cos x,\quad \lambda=\dfrac{1}{2\pi}:\varphi=x.$

$\lambda=\dfrac{1}{\pi}$: нет решений,

$\lambda=\dfrac{1}{2\pi}: a=0,\ \varphi=C_1x+\cos x;$

$\lambda\ne\dfrac{1}{\pi},\dfrac{1}{2\pi}:\varphi=\lambda\left(\dfrac{2\pi a}{1-2\pi\lambda}x+\dfrac{\pi}{1-\pi\lambda}\cos x\right)+ax+\cos x.$

6. $u(r,\varphi,t)=\sum\limits_{1}^{\infty}T_k(t)J_1\left(\dfrac{\mu_k^{(1)}}{2}r\right)\sin\left(\varphi+\dfrac{\pi}{6}\right)+\sum\limits_{1}^{\infty}Q_k(t)J_3\left(\dfrac{\mu_k^{(3)}}{2}r\right)\cos 3\varphi$, где

$$T_k(t)=\frac{a_k}{9\left(\frac{\mu_k^{(1)}}{2}\right)^2+2}\left(1-e^{-\left(9\left(\frac{\mu_k^{(2)}}{2}\right)^2+2\right)t}\right),\ k\ne 3,$$

$$T_3(t)=\frac{a_3}{\left(9\left(\frac{\mu_3^{(1)}}{2}\right)^2+2\right)}\left(1-e^{-\left(9\left(\frac{\mu_3^{(1)}}{2}\right)^2+2\right)t}\right)+2e^{-\left(9\left(\frac{\mu_3^{(3)}}{2}\right)^2+2\right)t},\ Q_k(t)=b_ke^{-\left(9\left(\frac{\mu_k^{(3)}}{2}\right)^2+2\right)t},$$

$$f(r)=\sum_1^{\infty}a_kJ_1\left(\frac{\mu_k^{(1)}}{2}r\right),\ f(r)=\sum_1^{\infty}b_kJ_3\left(\frac{\mu_k^{(3)}}{2}r\right),\ \text{где}$$

$$a_k=\frac{\int_0^2 f(r)J_1\left(\frac{\mu_k^{(1)}}{2}r\right)rdr}{\int_0^2 J_1^2\left(\frac{\mu_k^{(1)}}{2}r\right)rdr},\ b_k=\frac{\int_0^2 f(r)J_3\left(\frac{\mu_k^{(3)}}{2}r\right)rdr}{\int_0^2 J_3^2\left(\frac{\mu_k^{(3)}}{2}r\right)rdr}$$

6. $\varepsilon=\theta(t)\dfrac{e^{-2t}-e^{-4t}}{2}\in S'(R^1);\dfrac{d\varepsilon}{dt}=\theta(t)\left(2e^{-4t}-e^{-2t}\right)$ - регулярная обобщенная функция.

6. $u=-\dfrac{|x|}{2}-\dfrac{3}{|x|}+\dfrac{7}{2}.$

Вариант 3.

1. $u = e^{-3t}\sin x + (x+3t)^2 + \begin{cases} (x-3t)^2 + \cos(x-3t) + \sin(x-3t),\ x \ge 3t \ge 0, \\ e^{x-3t},\ 0 \le x \le 3t. \end{cases}$

2. **Ответ.**
$$u = x^2 + \left(\frac{3}{2} - \frac{\pi^2}{6}\right)\left(1-\cos\sqrt{2}t\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}t + \frac{1}{6}\left(1-\cos\sqrt{6}t\right)\cos 2x +$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8(-1)^{n+1}}{n^2(n^2+2)}\left(1-\cos t\sqrt{n^2+2}\right)\cos nx.$$

3. $u = \left(2\cos 3t - \dfrac{\sin 3t}{3} + t\right)\sin(2x-2y+z) + tx^3yz + t^3xyz.$

4. $u = \dfrac{5}{6} - \dfrac{5}{3r} - \dfrac{5}{6}r^2\left(\dfrac{3}{2}\cos^2\theta - \dfrac{1}{2}\right) + \dfrac{5}{49}\left(\dfrac{1}{4}r^2 - \dfrac{8}{r^3}\right)\sin^2\theta\cos 2\varphi$

$$\lambda = -\frac{3}{2}:\quad \varphi = x,\quad \lambda = \frac{5}{2}: \varphi = x^2.$$

5. **Ответ.**
$$\lambda = -\frac{3}{2}: \text{нет решений},$$
$$\lambda = \frac{5}{2}: b = 0,\ \varphi = Cx^2 - \frac{3}{8}x + x^3;$$
$$\lambda \ne \frac{5}{2}, -\frac{3}{2}: \varphi = \lambda\left(\frac{10b}{15-6\lambda}x^2 - \frac{6}{15+10\lambda}x\right) + x^3 + b.$$

Ответ. $u(r,\varphi,t) = \sum_1^{\infty} T_k(t) J_3\left(\dfrac{\mu_k^{(3)}}{4}r\right)\cos 3\varphi + \sum_1^{\infty} Q_k(t) J_2\left(\dfrac{\mu_k^{(2)}}{4}r\right)\sin 2\varphi$, где

$$T_k(t) = a_k\left(e^{-\left(5\left(\frac{\mu_k^{(3)}}{4}\right)^2+3\right)t}\right),\ k \ne 2,\ T_2(t) = \frac{1}{\left(5\left(\frac{\mu_3^{(3)}}{4}\right)^2+3\right)}\left(1 - e^{-\left(5\left(\frac{\mu_3^{(3)}}{4}\right)^2+3\right)t}\right) + a_3 e^{-\left(5\left(\frac{\mu_3^{(3)}}{2}\right)^2+3\right)t},$$

$$Q_k(t) = \frac{b_k}{5\left(\frac{\mu_k^{(2)}}{4}\right)^2+3}\left(1 - e^{-\left(5\left(\frac{\mu_k^{(2)}}{4}\right)^2+3\right)t}\right),$$

$$f(r) = \sum_1^{\infty} a_k J_3\left(\frac{\mu_k^{(3)}}{4}r\right),\ f(r) = \sum_1^{\infty} b_k J_2\left(\frac{\mu_k^{(2)}}{4}r\right), \text{ где}$$

$$a_k = \frac{\int_0^4 f(r) J_3\left(\frac{\mu_k^{(3)}}{4}r\right) r\,dr}{\int_0^4 J_3^2\left(\frac{\mu_k^{(3)}}{4}r\right) r\,dr},\quad b_k = \frac{\int_0^4 f(r) J_2\left(\frac{\mu_k^{(2)}}{4}r\right) r\,dr}{\int_0^4 J_2^2\left(\frac{\mu_k^{(2)}}{4}r\right) r\,dr}$$

6. $\varepsilon = \theta(t) te^{-2t} \in S'(R);\ \dfrac{d\varepsilon}{dt} = \theta(t) e^{-2t}(1-2t)$ - регулярная обобщенная функция.

6. $u = \dfrac{|x|^2 - 1}{6} + x_1 - x_2 + x_3.$

Вариант 4.

1. $u = te^x + e^{x+4t} + \begin{cases} e^{x-4t} + (x-4t) - 2, \ x \ge 4t \ge 0, \\ 2(x-4t) - \cos(x-4t), \ 0 \le x \le 4t. \end{cases}$

2.Ответ. $u = \pi(x+1) + \left(\frac{16\sqrt{3}}{\pi} sh\frac{t\sqrt{3}}{2} + 1\right)\sin\frac{x}{6} +$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6\cdot(-1)^n}{\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\sqrt{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 - 1}} \sin\sqrt{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 - 1}t \cdot \sin\frac{2n+1}{6}x.$$

3. $u = e^{-\frac{t}{2}}\sin(x+y)\cdot\frac{1}{\sqrt{1+t}}e^{\frac{2z-z^2+t}{1+t}} + \frac{t^5(x+1)}{5}$

4. $u = \frac{1}{2r^2} - \frac{1}{3r} + \frac{1}{r^2}\sin\theta\sin\left(\frac{\pi}{6} - \varphi\right) + \frac{8}{5r^3}\sin\theta\cos\theta\sin\left(\frac{\pi}{6} - \varphi\right).$

$\lambda = \frac{1}{2\pi}$: $\varphi = \sin x$, $\lambda = -\frac{1}{4\pi} : \varphi = x^2.$

$\lambda = -\frac{1}{4\pi}$: нет решений,

5.
$\lambda = \frac{1}{2\pi} : b = 0, \varphi = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\pi}{3}x^2 + C_2\sin x\right) + \cos x;$

$\lambda \ne \frac{1}{4\pi}, -\frac{1}{2\pi} : \varphi = \lambda\left(\frac{\pi}{1+4\pi\lambda}x^2 + \frac{2\pi b}{1-2\pi\lambda}\sin x\right) + \cos x + b\sin x.$

6. $u(r,\varphi,t) = \sum_1^{\infty} T_k(t) J_2\left(\frac{\mu_k^{(2)}}{3}r\right)\cos\left(2\varphi - \frac{\pi}{3}\right) + \sum_1^{\infty} Q_k(t) J_3\left(\frac{\mu_k^{(3)}}{3}r\right)\sin 3\varphi$, где

$$T_k(t) = \frac{a_k}{3\left(\frac{\mu_k^{(2)}}{3}\right)^2 + 2}\left(1 - e^{-\left(3\left(\frac{\mu_k^{(2)}}{3}\right)^2 + 2\right)t}\right), \ k \ne 3,$$

$$Q_2(t) = \frac{b_2}{\left(3\left(\frac{\mu_3^{(3)}}{3}\right)^2 + 2\right)}\left(1 - e^{-\left(3\left(\frac{\mu_3^{(3)}}{3}\right)^2 + 2\right)t}\right) + 2e^{-\left(3\left(\frac{\mu_3^{(3)}}{3}\right)^2 + 2\right)t}, f(r) = \sum_1^{\infty} a_k J_2\left(\frac{\mu_k^{(2)}}{3}r\right),$$

$$f(r) = \sum_1^{\infty} b_k J_3\left(\frac{\mu_k^{(3)}}{3}r\right), \text{ где } a_k = \frac{\int_0^3 f(r) J_2\left(\frac{\mu_k^{(2)}}{3}r\right) r dr}{\int_0^3 J_2^2\left(\frac{\mu_k^{(1)}}{3}r\right) r dr}, \ b_k = \frac{\int_0^3 f(r) J_3\left(\frac{\mu_k^{(3)}}{3}r\right) r dr}{\int_0^3 J_3^2\left(\frac{\mu_k^{(3)}}{3}r\right) r dr}$$

6. $\varepsilon = \theta(t)e^{-t}\sin t \in S'(R); \frac{d\varepsilon}{dt} = \theta(t)e^{-t}(\cos t - \sin t)$ - регулярная обобщенная функция.

6. $u = -\ln|x|$.