ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина **Уравнения математической физики**

Курс **3** **Семестр** **6** **2003/2004 уч.г.**

Фамилия студента ______________________ **№ группы** ________

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

Решить задачи:

1.⑤
$$y u_{xx} + (x+y)u_{xy} + x u_{yy} + u_x + u_y = 0\,,\quad y > |x|\,,$$
$$u|_{x=1} = 1\,,\quad u_x|_{x=1} = 1 - \frac{1}{y}\,,\quad y > 1\,.$$

2.④
$$16u_{tt} = u_{xx} + 24e^{2x-t}\,,\quad x > 0\,,\ t > 0\,,$$
$$u|_{t=0} = 4x\,,\quad u_t|_{t=0} = 2e^{2x} - 1\,,\quad x \geqslant 0\,,$$
$$u_x|_{x=0} = 4e^{-t} + 8t\,,\ t \geqslant 0\,.$$

3.⑨
$$u_{tt} = 6u_{xx} + 15u - 15xt + 9x^2(\pi - x)\sin 9t\,,\quad x \in (0,\pi)\,,\ t > 0\,,$$
$$u|_{t=0} = 2\sin x\,,\quad u_t|_{t=0} = x - 3\sin x\,,\quad 0 \leqslant x \leqslant \pi\,,$$
$$u|_{x=0} = 0\,,\ u|_{x=\pi} = \pi t\,,\ t \geqslant 0\,.$$

4.③
$$\Delta u = 20r^2 \sin 6\varphi\,,\quad r < 1\,,\ r = \sqrt{x^2+y^2}\,,$$
$$(3u + u_r)|_{r=1} = 11\sin 6\varphi - 5\cos 7\varphi + 3\,.$$

5.④
$$u_t = 5\Delta u + \frac{\operatorname{ch}(4y-3z)\cos 5x}{(t+3)^2}\,,\quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,,\ t > 0\,,$$
$$u|_{t=0} = y\operatorname{ch}(4y-3z)\cos 5x\,.$$

6.⑤
$$\Delta u = \frac{3}{r^5}\,,\quad \frac{1}{2} < r < 1\,,\ r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,,$$
$$u|_{r=1/2} = 2\cos^2\varphi - \cos 2\theta\cos 2\varphi\,,\ u_r|_{r=1} = \sin 2\theta \sin\varphi\,.$$

7.⑤ Найти характеристические числа, собственные функции интегрального оператора и решить при всех допустимых значениях λ уравнение
$$\varphi(x) = \lambda\int_0^1 (24x^3y^2 - 14x + 3)\varphi(y)\,dy - 12x^3 + 1,\quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Заказ - Тираж - 300 МФТИ - 41

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина $\boxed{\textbf{Уравнения математической физики}}$

Курс $\boxed{3}$ **Семестр** $\boxed{6}$ **2003/2004 уч.г.**

Фамилия студента ________________________________ **№ группы** ________

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

Решить задачи:

1.⑤
$$xu_{xx} + 2(x+1)u_{xy} + (x+2)u_{yy} + u_x + u_y = 0\,, \quad x > 0\,,\ y < 0\,,$$
$$u|_{y=0} = -x\,, \quad u_y|_{y=0} = 1 - \frac{2}{x}\,, \quad x > 0\,.$$

2.④
$$u_{tt} = 9u_{xx} + 90\cos(2x+9t)\,, \quad x > 0\,,\ t > 0\,,$$
$$u|_{t=0} = 8\cos 3x - 5\cos 2x\,, \quad u_t|_{t=0} = 0\,, \quad x \geqslant 0\,,$$
$$u_x|_{x=0} = 18t - 2\sin 9t\,,\ t \geqslant 0\,.$$

3.⑨
$$u_{tt} + 6u_t = 2u_{xx} - 5xe^{-t} + (2x-\pi)^2 e^{-4t}\,, \quad x \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)\,,\ t > 0\,,$$
$$u|_{t=0} = x\,, \quad u_t|_{t=0} = -x\,, \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\,,$$
$$u_x|_{x=0} = e^{-t}\,,\ u_x|_{x=\pi/2} = e^{-t}\,,\ t \geqslant 0\,.$$

4.③
$$\Delta u = \frac{3}{r^4}\cos\varphi\,, \quad r > 1\,,\ r = \sqrt{x^2+y^2}\,,$$
$$(4u - u_r)|_{r=1} = \cos\varphi + 24\sin 4\varphi\,,\ |u(\infty)| < \infty\,.$$

5.④
$$2u_t = 3\Delta u + \sqrt{t+9}\,e^{-y}\cos z\,, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,,\ t > 0\,,$$
$$u|_{t=0} = (2x+y+z)e^{-y}\cos z\,.$$

6.⑤
$$\Delta u = 6r^3\,, \quad 1 < r < 2\,,\ r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,,$$
$$u|_{r=1} = (\cos 2\theta - 1)\sin^2\varphi + \sin^2\theta\,,\ u_r|_{r=2} = 15 + \sin\theta\cos\varphi\,.$$

7.⑤ Найти характеристические числа, собственные функции интегрального оператора и решить при всех допустимых значениях λ уравнение
$$\varphi(x) = \lambda\int_{-1}^{1}(15x^3 - 3x^2y + 4)\varphi(y)\,dy + 9x + 1, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1.$$

Заказ - Тираж - 300 МФТИ - 42

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина $\boxed{\text{Уравнения математической физики}}$

Курс $\boxed{3}$ **Семестр** $\boxed{6}$ **2003/2004 уч.г.**

Фамилия студента ______________________________ **№ группы** ________

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

Решить задачи:

1.⑤
$$u_{xx}-2(x+1)u_{xy}+4xu_{yy}+\frac{2u_y-u_x}{x-1}=0\,,\quad x>1\,,\ y>0\,,$$
$$u|_{y=1}=-1\,,\quad u_y|_{y=1}=\frac{1}{x}-1\,,\quad x>1\,.$$

2.④
$$9u_{tt}=u_{xx}+54e^{3x-2t}\,,\quad x>0\,,\ t>0\,,$$
$$u|_{t=0}=6x\,,\quad u_t|_{t=0}=-2\,,\quad x\geqslant 0\,,$$
$$u_x|_{x=0}=6e^{-2t}+12t\,,\ t\geqslant 0\,.$$

3.⑨
$$2u_{tt}=20u_{xx}+13u-5e^{-2t}+x(x^2-4\pi^2)\sin 4t\,,\quad x\in(0,2\pi)\,,\ t>0\,,$$
$$u|_{t=0}=3\sin\frac{x}{2}+1\,,\quad u_t|_{t=0}=-2\,,\quad 0\leqslant x\leqslant 2\pi\,,$$
$$u|_{x=0}=e^{-2t}\,,\ u|_{x=2\pi}=e^{-2t}\,,\ t\geqslant 0\,.$$

4.③
$$\Delta u=r^3\sin 3\varphi\,,\quad r<1\,,\ r=\sqrt{x^2+y^2}\,,$$
$$(u+3u_r)|_{r=1}=11\sin 3\varphi+5\cos 8\varphi-3\,.$$

5.④
$$u_t=3\Delta u+\frac{\cos(3x-4y)\,\mathrm{sh}\,5z}{t+2}\,,\quad (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,,\ t>0\,,$$
$$u|_{t=0}=x\cos(3x-4y)\,\mathrm{sh}\,5z\,.$$

6.⑤
$$\Delta u=\frac{6}{r}\,,\quad \frac{1}{3}<r<1\,,\ r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,,$$
$$u|_{r=1/3}=\cos^2\theta\cos 2\varphi+2\sin^2\varphi\,,\ u|_{r=1}=1+\cos\theta\,.$$

7.⑤ Найти характеристические числа, собственные функции интегрального оператора и решить при всех допустимых значениях λ уравнение
$$\varphi(x)=\lambda\int_0^1(3x^2-6xy+1)\varphi(y)\,dy+4x-1,\quad 0\leqslant x\leqslant 1.$$

Заказ - Тираж - 300 МФТИ - 43

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина **Уравнения математической физики**

Курс **3** **Семестр** **6** **2003/2004 уч.г.**

Фамилия студента ________________________ **№ группы** __________

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

Решить задачи:

1.⑤
$$xu_{xx}-(2x+1)u_{xy}+(x+1)u_{yy}+u_x-u_y=0\ ,\quad x>0\ ,\quad y>1\ ,$$
$$u|_{y=1}=x+1\ ,\quad u_y|_{y=1}=1-\frac{1}{x}\ ,\quad x>0\ .$$

2.④
$$u_{tt}=4u_{xx}+60\cos(3x+4t)\ ,\quad x>0\ ,\ t>0\ ,$$
$$u|_{t=0}=5\cos 3x+2\cos 2x\ ,\quad u_t|_{t=0}=0\ ,\quad x\geqslant 0\ ,$$
$$u_x|_{x=0}=4t-\sin 4t\ ,\ t\geqslant 0\ .$$

3.⑨
$$u_{tt}+10u_t=u_{xx}+20x^2-4t+12x(\pi-2x)e^{-8t}\ ,\quad x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)\ ,\ t>0\ ,$$
$$u|_{t=0}=0\ ,\quad u_t|_{t=0}=2x^2\ ,\quad 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}\ ,$$
$$u_x|_{x=0}=0\ ,\ u_x|_{x=\pi/4}=\pi t\ ,\ t\geqslant 0\ .$$

4.③
$$\Delta u=\frac{1}{r^3}\cos 2\varphi\ ,\quad r>1\ ,\ r=\sqrt{x^2+y^2}\ ,$$
$$(2u-u_r)|_{r=1}=3\cos 2\varphi+11\sin 9\varphi\ ,\ |u(\infty)|<\infty\ .$$

5.④
$$2u_t=7\Delta u+\frac{\sin x\operatorname{ch} z}{\sqrt{t+4}}\ ,\quad (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ ,\ t>0\ ,$$
$$u|_{t=0}=(x-2y+z)\sin x\operatorname{ch} z\ .$$

6.⑤
$$\Delta u=12r\ ,\quad 1<r<3\ ,\ r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\ ,$$
$$u|_{r=1}=0\ ,\ u|_{r=3}=\cos 2\theta\sin 2\varphi+(\sin\theta-2\cos\varphi)\sin\varphi\ .$$

7.⑤ Найти характеристические числа, собственные функции интегрального оператора и решить при всех допустимых значениях λ уравнение
$$\varphi(x)=\lambda\int_{-1}^{1}(x^3+3xy+10y)\varphi(y)\,dy+3x+5,\quad -1\leqslant x\leqslant 1.$$

Заказ - Тираж - 300 МФТИ - 44

ОТВЕТЫ УМФ 2003/2004 уч. г.

МФТИ-41

1. (5) $\xi = y - x,\ \eta = y^2 - x^2,\quad u(x,y) = x - y + \sqrt{y^2 - x^2 + 1}.$

2. (4) $u(x,t) = 2e^{2x-t} + 3e^{2x+t/2} + \begin{cases} 4x - t - 5e^{2x - t/2}, & x \geq t/4, \\ 3e^{-2x+t/2} - (4x-t)^2 - 8, & x < t/4. \end{cases}$

3. (9) $9x^2(\pi - x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n \sin nx,\quad f_n = \frac{36}{n^3}\left[2(-1)^{n+1} - 1\right],$

$$u(x,t) = xt + \left(2\,\mathrm{ch}\,3t + \frac{1}{5}\mathrm{sh}\,3t - \frac{2}{5}\sin 9t\right)\sin x +$$

$$+ \frac{1}{96}\left(9 + \cos 9t - \sin 9t\right)\sin 4x +$$

$$+ \sum_{\substack{n \neq 2, \\ n \neq 4}}^{\infty} \frac{f_n}{6(n^2 - 16)}\left(\sin 9t - \frac{9}{\alpha_n}\sin \alpha_n t\right)\sin nx, \quad \text{где } \alpha_n = \sqrt{6n^2 - 15}.$$

4. (3) $u(r,\varphi) = (2r^6 - r^4)\sin 6\varphi - \frac{r^7}{2}\cos 7\varphi + 1.$

5. (4) $u(x,y,z,t) = \left(y - \frac{1}{t+3} + \frac{1}{3}\right)\mathrm{ch}(4y - 3z)\cos 5x +$

$$+ 40t\,\mathrm{sh}(4y - 3z)\cos 5x$$

6. (5) $u|_{r=2} = 1 + 2\sin^2\theta\cos 2\varphi,$

$$u(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{2r^3} - \frac{3}{2r} + \frac{1}{67}\left(32r^2 - \frac{1}{r^3}\right)\sin 2\theta\sin\varphi +$$

$$+ \frac{8}{67}\left(3r^2 + \frac{2}{r^3}\right)\sin^2\theta\cos 2\varphi.$$

7. (5) $\lambda_1 = 1,\ \varphi_1(x) = 20x^3 - 14x + 3,\ \lambda_2 = -1,\ \varphi_2(x) = 12x^3 - 14x + 3.$

Если $\lambda = 1$, то нет решений;

если $\lambda = -1$, то $\varphi(x) = 1 - 4x^3 + C(12x^3 - 14x + 3)$, C – любое;

если $\lambda \neq \pm 1$, то $\varphi(x) = \frac{2\lambda}{\lambda - 1}(20x^3 - 14x + 3) - 12x^3 + 1$

ОТВЕТЫ УМФ 2003/2004 уч. г.

МФТИ - 42

(5) $\xi = x-y$, $\eta = x+2\ln x - y$, $u(x,y) = 2\ln(x-y) - 2\ln x - x + y$.

(4) $u(x,t) = -2\cos(2x+9t) + 4\cos(3x+9t) + \begin{cases} 4\cos(3x-9t) - 3\cos(2x-6t), & x \geq 3t, \\ 2\cos(3x-9t) - 3(x-3t)^2 - 1, & x < 3t. \end{cases}$

(9) $(2x-\pi)^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}\cos 2nx,$

$u(x,t) = xe^{-t} + \frac{\pi^2}{72}(1+2e^{-6t} - 3e^{-4t}) + (e^{-2t} - e^{-4t} - 2te^{-4t})\cos 2x +$

$\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{e^{-3t}}{2n^2(n^2-1)}\left(e^{-t} - \cos\alpha_n t + \frac{1}{\alpha_n}\sin\alpha_n t\right)\cos 2nx$, где $\alpha_n = \sqrt{8n^2-9}$.

(3) $u(r,\varphi) = \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r}\right)\cos\varphi + \frac{3}{r^4}\sin 4\varphi$.

(4) $u(x,y,z,t) = \left(\frac{1}{3}(t+9)^{3/2} - 9 + 2x + y + z\right)e^{-y}\cos z -$

$- 3te^{-y}(\sin z + \cos z)$.

(5) $u|_{r=1} = \sin^2\theta\cos 2\varphi,$

$u(r,\theta,\varphi) = \frac{r^5}{5} - \frac{21}{5} + \frac{4}{r} + \frac{4}{5}\left(r - \frac{1}{r^2}\right)\sin\theta\cos\varphi + \frac{1}{64}\left(3r^2 + \frac{64}{r^3}\right)\sin^2\theta\cos 2\varphi$.

(5) $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\varphi_1(x) = 15x^3 - 9x^2 + 4$, $\lambda_2 = \frac{1}{6}$, $\varphi_2(x) = 15x^3 - 3x^2 + 4$.

Если $\lambda = 1/2$, то нет решений;

если $\lambda = 1/6$, то $\varphi(x) = 9x + 1 - 3x^2 + C(15x^3 - 3x^2 + 4)$, C-любое;

если $\lambda \neq 1/2$, $\lambda \neq \frac{1}{6}$, то $\varphi(x) = \frac{2\lambda}{1-2\lambda}(15x^3 - 9x^2 + 4) + 9x + 1$.

ОТВЕТЫ УМФ 2003/2004 уч. г.

МФТИ – 43

(5) $\xi = 2x+y$, $\eta = x^2+y$, $u(x,y) = 2\sqrt{x^2+y-1} - 2x - y$.

(4) $u(x,t) = 2e^{3x-2t} + e^{3x+t} + \begin{cases} 6x-2t-3e^{3x-t}, & x \geq t/3 \\ e^{t-3x} - 2(3x-t)^2 - 4, & x < t/3 \end{cases}$

(9) $x(x^2-4\pi^2) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin\frac{nx}{2}$, $f_n = \frac{96}{n^3}(-1)^n$,

$(x,t) = e^{-2t} + \left(\frac{12}{5}\sin 4t + 3\,ch\,2t - \frac{24}{5}\,sh\,2t\right)\sin\frac{x}{2} +$

$+ \frac{1}{18}(4t\cos 4t - \sin 4t)\sin\frac{3x}{2} +$

$\sum_{\substack{n=2,\\ n\neq 3}}^{\infty} \frac{f_n}{5(n^2-9)}\left(\sin 4t - \frac{4}{\alpha_n}\sin\alpha_n t\right)\sin\frac{nx}{2}$, где $\alpha_n = \sqrt{\frac{5n^2-13}{2}}$

(3) $u(r,\varphi) = \left(\frac{r^5}{16} + r^3\right)\sin 3\varphi + \frac{r^8}{5}\cos 8\varphi \cdot 3.$

(4) $u(x,y,z,t) = \left(\ln\frac{t+2}{2} + x\right)\cos(3x-4y)\,sh\,5z -$

$- 18t\sin(3x-4y)\,sh\,5z.$

(3) $u|_{r=1/3} = 1 - \sin^2\theta\cos 2\varphi,$

$u(r,\theta,\varphi) = 3r - 3 + \frac{1}{r} + \frac{1}{26}\left(27r - \frac{1}{r^2}\right)\cos\theta + \frac{9}{242}\left(r^2 - \frac{1}{r^3}\right)\sin^2\theta\cos 2\varphi$

(5) $\lambda_1 = 2$, $\varphi_1(x) = 3x^2-3x+1$, $\lambda_2 = -2$, $\varphi_2(x) = 3x^2-5x+1$

если $\lambda = 2$, то $\varphi(x) = 2x-1+C(3x^2-3x+1)$, C – любое;

если $\lambda = -2$, то нет решений;

если $\lambda \neq \pm 2$, то $\varphi(x) = \frac{2\lambda}{\lambda+2}(3x^2-5x+1) + 4x - 1.$

ОТВЕТЫ УМФ 2003/2004 уч. г.

МФТИ-44

1. (5) $\xi = x+y$, $\eta = x+\ln x+y$, $u(x,y) = x+\ln x+y-\ln(x+y-1)$.

2. (4) $u(x,t) = 3\cos(3x+4t)+\cos(2x+4t)+\begin{cases}\cos(2x-4t)+2\cos(3x-6t), & x\geqslant 2t,\\ 5\cos(2x-4t)-(x-2t)^2-2, & x<2t.\end{cases}$

3. (9) $12x(\pi-2x) = \pi^2-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{6}{n^2}\cos 4nx$,

$u(x,t) = 2x^2t+\frac{\pi^2}{80}(1+4e^{-10t}-5e^{-8t})+\frac{1}{6}(6te^{-8t}-e^{-2t}+e^{-8t})\cos 4x$

$+\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{3e^{-5t}}{8n^2(n^2-1)}\left(\cos\alpha_n t-e^{-3t}-\frac{3}{\alpha_n}\sin\alpha_n t\right)\cos 4nx$, где $\alpha_n=\sqrt{16n^2-25}$.

4. (3) $u(r,\varphi) = \left(\frac{1}{r^2}-\frac{1}{3r}\right)\cos 2\varphi+\frac{1}{r^9}\sin 9\varphi$.

5. (4) $u(x,y,z,t) = (\sqrt{t+4}-2+x-2y+z)\sin x\,\mathrm{ch}\,z+$

$+7t(\cos x\,\mathrm{ch}\,z+\sin x\,\mathrm{sh}\,z)$

6. (5) $u|_{r=3} = -2\sin^2\theta\sin 2\varphi+\sin\theta\sin\varphi$,

$u(r,\theta,\varphi) = r^3-40+\frac{39}{r}+\frac{9}{26}\left(r-\frac{1}{r^2}\right)\sin\theta\sin\varphi+\frac{27}{121}\left(\frac{1}{r^3}-r^2\right)\sin^2\theta\sin 2\varphi$

7. (5) $\lambda_1=\frac{1}{4}$, $\varphi_1(x)=5x^3+3x+10$; $\lambda_2=-\frac{1}{2}$, $\varphi_2(x)=10x^3-3x-10$.

Если $\lambda=1/4$, то нет решений;

если $\lambda=-1/2$, то $\varphi(x)=\frac{3x}{2}+C(10x^3-3x-10)$, C – любое;

если $\lambda\neq 1/4$, $\lambda\neq -1/2$, то $\varphi(x)=\frac{x^3}{1-4\lambda}(5x^3+3x+10)-3x-5$.