Семестровая контрольная работа по ТФКП
5 семестр 2009/2010 уч.г.

№ группы	**Фамилия студента**	**Сумма баллов**	**Оценка**	**Подпись препод.**

1.④ Функцию

$$f(z) = \frac{z^2 + 6iz + 3}{(z^2 - 4iz - 3)(z - 3i)}$$

разложить в ряд Лорана по степеням z в кольце, которому принадлежит точка $z = 1 + 2i$. Указать границы кольца сходимости.

2.④ Исследовать все особые точки функции

$$f(z) = \frac{\left(e^{\frac{1}{z}} - e^6\right) z^3}{\left(\sin \pi z - \frac{1}{2}\right)\left(\cos \pi z + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}.$$

Применяя теорию вычетов, вычислить интегралы **3, 4, 5**:

3.⑤

$$\oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{z+2i}{z+i} \cos\frac{2}{z}\, dz.$$

4.④

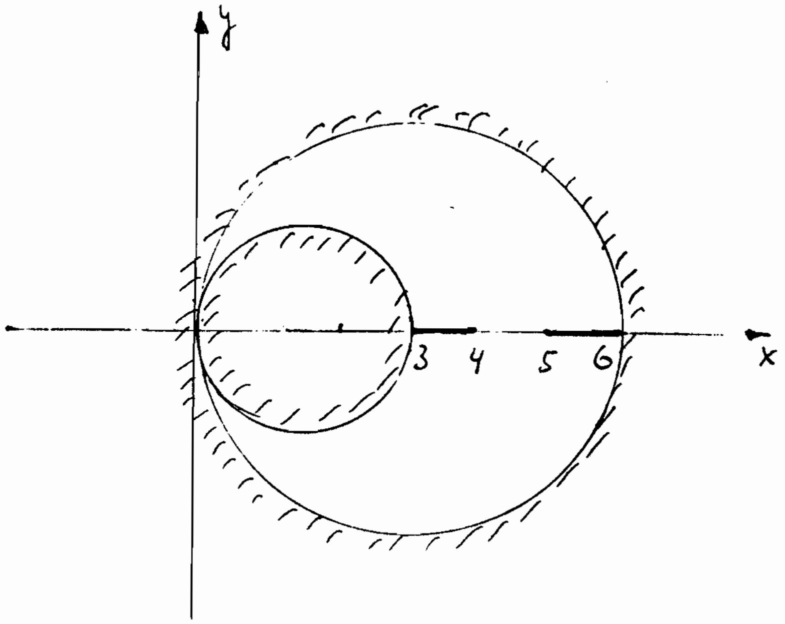
$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-1)\cos(3-5x)}{x^2+2x+17}\, dx.$$

5.⑥

$$\int\limits_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{x}} \cdot \frac{dx}{(x+2)^2}.$$

6.⑥ Пусть $g(z)$ — регулярная ветвь $\sqrt{\dfrac{16z^2+1}{z^2}}$ в плоскости с разрезом по дуге окружности $\left|z - \dfrac{1}{3}\right| = \dfrac{5}{12}$, $\operatorname{Re} z \geqslant 0$, причём $g\left(\dfrac{1}{3}\right) = 5$. Разложить $g(z)$ в ряд Лорана по степеням z в окрестности точки $z = \infty$. Найти область сходимости полученного ряда и вычислить сумму ряда в точке $z = \dfrac{1}{3}$.

7(6) **Отобразить конформно на круг {w: |w| < 1} область, изображенную на рисунке:**



Семестровая контрольная работа по ТФКП
5 семестр 2009/2010 уч.г.

№ группы	**Фамилия студента**	**Сумма баллов**	**Оценка**	**Подпись препод.**

1.④ Функцию

$$f(z) = \frac{z^2 + 2iz + 2}{(z^2 - (2i+1)z + 2i)(z - 2i)}$$

разложить в ряд Лорана по степеням z в кольце, которому принадлежит точка $z = 1 + i$. Указать границы кольца сходимости.

2.④ Исследовать все особые точки функции

$$f(z) = \frac{\left(e^{i(z-1)} - e^{2iz}\right)(2z\pi + 1)^2}{(z+1)^3\left(1 - \cos\frac{1}{z}\right)}.$$

Применяя теорию вычетов, вычислить интегралы **3, 4, 5**:

3.⑤
$$\oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{z}{z+i}\cos\frac{2i}{z}\,dz.$$

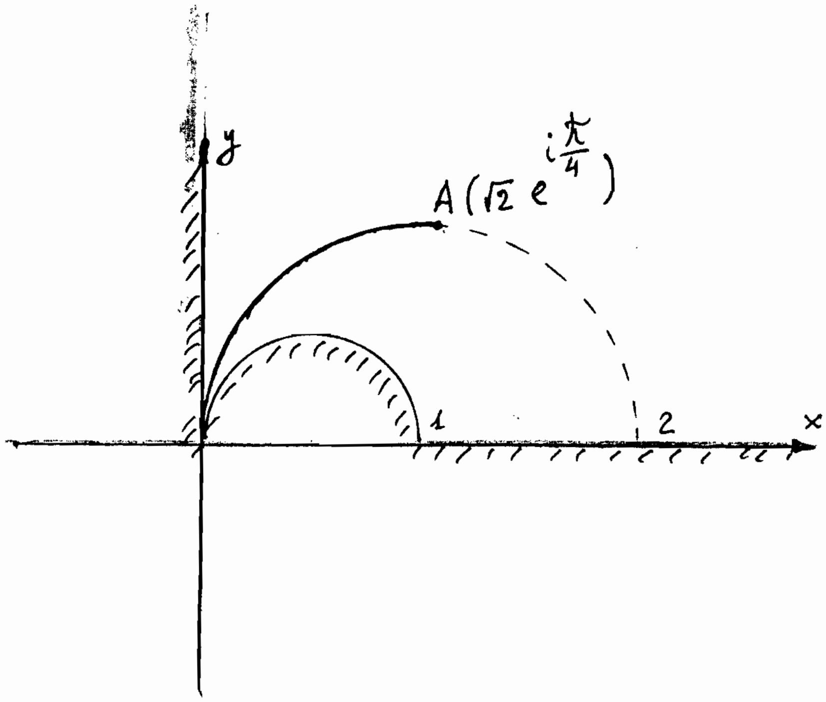
4.④
$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-2)\sin(1-4x)}{x^2 - 2x + 26}\,dx.$$

5.⑥
$$\int\limits_0^2 \frac{dx}{(x+1)^2\sqrt[3]{x^2(2-x)}}.$$

6.⑥ Пусть $h(z)$ — регулярная ветвь $\mathrm{Ln}\left(\dfrac{z^2-1}{z^2}\right)$ в плоскости с разрезом по отрезку $[-1;1]$, причём $\mathrm{Im}\,h\left(-\dfrac{i}{5}\right) = 0$. Разложить $h(z)$ в ряд Тейлора по степеням $z + i$. Найти радиус сходимости полученного ряда и вычислить сумму ряда в точке $z = -\dfrac{i}{5}$.

Заказ - Тираж - 300 МФТИ - 92

7(6) Отобразить конформно на круг { w: |w| < 1} область, изображенную на рисунке:



Семестровая контрольная работа по ТФКП
5 семестр 2009/2010 уч.г.

№ группы	**Фамилия студента**	**Сумма баллов**	**Оценка**	**Подпись препод.**

1.④ Функцию

$$f(z) = \frac{8z^2 - 6iz}{(2z^2 - 3iz - 1)(2z - i)}$$

разложить в ряд Лорана по степеням z в кольце, которому принадлежит точка $z = \dfrac{1+i}{2}$. Указать границы кольца сходимости.

2.④ Исследовать все особые точки функции

$$f(z) = \frac{\left(e^{\frac{i\pi}{z}} - 1\right)(3z+1)}{(1-2z)^2 z\left(1 + \cos\frac{\pi}{z}\right)}.$$

Применяя теорию вычетов, вычислить интегралы **3, 4, 5**:

3.⑤
$$\oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{z^2}{z-i} \sin\frac{i}{z}\, dz.$$

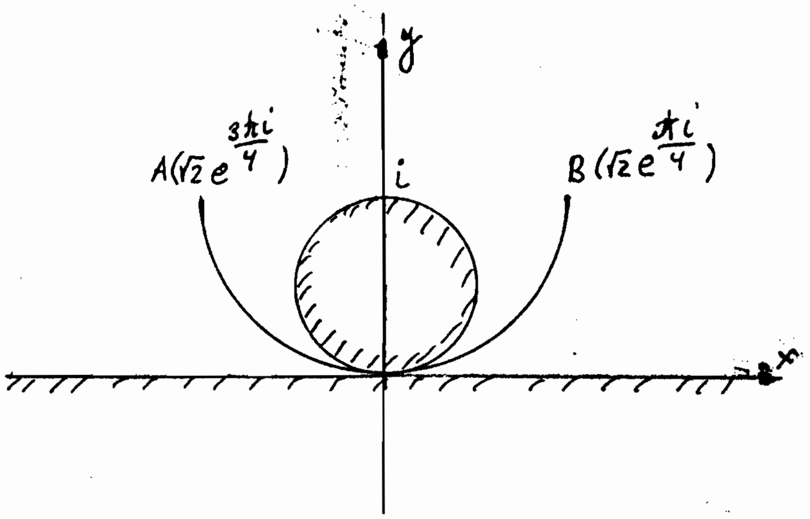
4.④
$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+1)\cos(2-3x)}{x^2 - 2x + 10}\, dx.$$

5.⑥
$$\int\limits_{1}^{2} \sqrt{\frac{x-1}{2-x}} \cdot \frac{dx}{(x+3)^2}.$$

6.⑥ Пусть $g(z)$ — регулярная ветвь $\sqrt{\dfrac{9z^2-1}{z^2}}$ в плоскости с разрезом по дуге окружности $\left|z - \dfrac{i}{4}\right| = \dfrac{5}{12}$, $\operatorname{Im} z \geqslant 0$, причём $g\left(\dfrac{i}{2}\right) = \sqrt{13}$. Разложить $g(z)$ в ряд Лорана по степеням z в окрестности точки $z = \infty$. Найти область сходимости полученного ряда и вычислить сумму ряда в точке $z = \dfrac{i}{2}$.

Заказ - Тираж - 300 МФТИ - 93

7(6) Отобразить конформно на круг $\{w: |w| < 1\}$ область, изображенную на рисунке:



Семестровая контрольная работа по ТФКП
5 семестр 2009/2010 уч.г.

№ группы	**Фамилия студента**	**Сумма баллов**	**Оценка**	**Подпись препод.**

1.④ Функцию

$$f(z) = \frac{z^2 + (4-2i)z - 9}{((2+i)z - z^2 - 2i)(z-i)}$$

разложить в ряд Лорана по степеням z в кольце, которому принадлежит точка $z = i - 1$. Указать границы кольца сходимости.

2.④ Исследовать все особые точки функции

$$f(z) = \frac{\sin\left(\frac{1}{z} + \frac{i}{\pi}\right)}{z^2(e^{2z} - 1)(1 - \cos z)}.$$

Применяя теорию вычетов, вычислить интегралы **3, 4, 5**:

3.⑤
$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{z}{z-2i} e^{\frac{2i}{z}}\, dz.$$

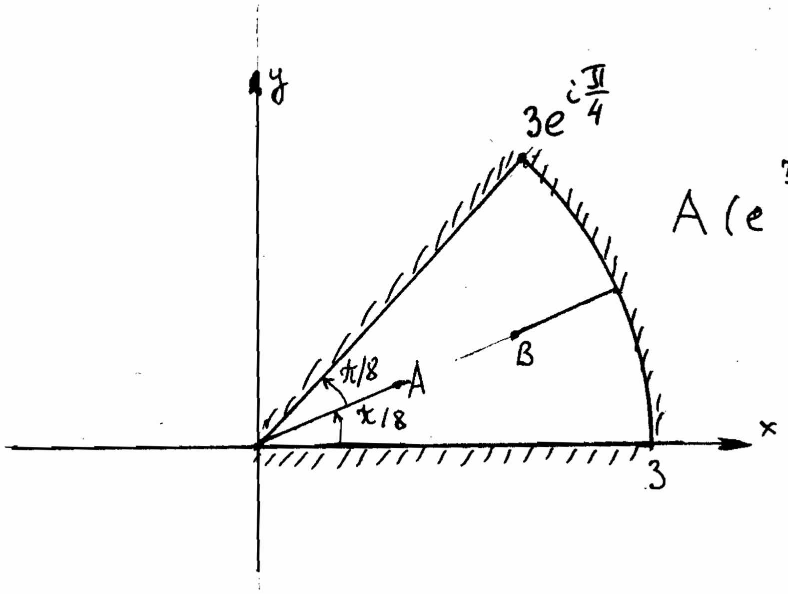
4.④
$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+2)\sin(3-2x)}{x^2 + 2x + 37}\, dx.$$

5.⑥
$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{(x+1)^2 \sqrt[4]{x^3(1-x)}}.$$

6.⑥ Пусть $h(z)$ — регулярная ветвь $\operatorname{Ln}\left(\dfrac{1+z^2}{z^2}\right)$ в плоскости с разрезом по отрезку $[-i; i]$, причём $\operatorname{Im} h\left(\dfrac{1}{5}\right) = 0$. Разложить $h(z)$ в ряд Тейлора по степеням $z - 1$. Найти область сходимости полученного ряда и вычислить сумму ряда в точке $z = \dfrac{1}{5}$.

Заказ - Тираж - 300 МФТИ - 94

7(6) **Отобразить конформно на круг { w: |w| < 1} область, изображенную на рисунке:**



$A(e^{\frac{\pi i}{8}})$, $B(2 \cdot e^{\frac{\pi i}{8}})$

Ответы

2009 г.

Вар. №1

1. $f(z)=\frac{12i}{(z-3i)^2}+\frac{1}{z-i}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(i)^{n-1}}{z^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4(n+1)}{(3i)^{n+1}}z^n$, $1<|z|<3$ – обл. сход.

2. $z=0$ – с.о.т; $z_k=\frac{1}{6}+2k$, $k\in\mathbb{Z}$, $k\neq 0$ – полюсы 1 порядка;
$z=\frac{1}{6}$ – у.о.т. $z_k=\frac{5}{6}+2k$, $k\in\mathbb{Z}$ – полюсы 2-порядка;
$z_k=-\frac{5}{6}+2k$, $k\in\mathbb{Z}$ – полюсы 1 порядка. $z=\infty$ не изол. ос. точка.

3. $I=2\pi(\operatorname{ch}2-1)$ $\left(I=-2\pi i\left(\operatorname*{res}_{z=-i}f(z)+\operatorname*{res}_{z=\infty}f(z)\right)\right)$; $\operatorname*{res}_{z=-i}f(z)=i\operatorname{ch}2$; $\operatorname*{res}_{z=\infty}f(z)=-i$

4. $I=\frac{\pi}{2}e^{-20}(-\cos 8+2\sin 8)$; $I=\operatorname{Re}I_1$; $I_1=2\pi i\operatorname*{res}_{z=-1+4i}F(z)=2\pi i\left(\frac{-1+2i}{4i}e^{-20}e^{-8i}\right)$.

5. $I=\frac{\pi\sqrt{6}}{24}$; $I=\frac{1}{2}I_1$; $I_1=2\pi i\left(\operatorname*{res}_{z=-2}F(z)+\operatorname*{res}_{z=\infty}F(z)\right)$; $\operatorname*{res}_{z=\infty}F(z)=0$.

6. $-\sum_{n=0}^{\infty}C_{1/2}^{n}\frac{4}{16^n}\frac{1}{z^{2n}}$, $|z|>\frac{1}{4}$; $S\left(\frac{1}{3}\right)=-5$.

Вар. №2

1. $f(z)=\frac{1}{z-i}+\frac{6i}{(z-2i)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(i)^{n-1}}{z^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3(n+1)}{(2i)^{n+1}}z^n$, $1<|z|<2$ – обл. сход.

2. $z=-1$ – полюс 1 порядка; $z=-\frac{1}{2\pi}$ – у.о.т.; $z_k=\frac{1}{2\pi k}$, $k\neq-1$, $k\in\mathbb{Z}$ – полюсы 2 п.,
$z=\infty$ – с.о.т. $z=0$ – не изол. особ. точка.

3. $I=2\pi(1-\cos 2)$. $I=-2\pi i\left(\operatorname*{res}_{z=-i}f(z)+\operatorname*{res}_{z=\infty}f(z)\right)$; $\operatorname*{res}_{z=-i}f(z)=-i\cos 2$; $\operatorname*{res}_{z=\infty}f(z)=i$

4. $I=\frac{\pi}{5}e^{-20}(\sin 3-5\cos 3)$; $I=(-1)\operatorname{Im}I_1$; $I_1=2\pi i\operatorname*{res}_{z=1+5i}\frac{(z-2)e^{i(4z-1)}}{z^2-2z+26}=\frac{\pi}{5}e^{-20}(5i-1)e^{3i}$

5. $I=\frac{14\pi\sqrt[6]{3}}{27}$; $I\left(1-e^{-\frac{4\pi i}{3}}\right)=2\pi i\left(\operatorname*{res}_{z=-1}F(z)+\operatorname*{res}_{z=\infty}F(z)\right)=2\pi i\left(\frac{7}{9\sqrt[3]{3}}e^{-\frac{2\pi i}{3}}+0\right)$.

6. $\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{(-1)^{n-1}}{(1-i)^n}-\frac{1}{(1+i)^n}+\frac{2}{(i)^n}\right)(z+i)^n$, $|z+i|<1$; $S\left(-\frac{i}{5}\right)=h\left(-\frac{i}{5}\right)=\ln 26$

Вар № 3

2009г.

1 $f(z) = \frac{2i}{(2z-i)^2} + \frac{2}{z-i} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n n}{2^n} \cdot \frac{1}{z^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(i)^{n+1}} z^n$; $\frac{1}{2} < |z| < 1$ - обл. сход.

2. $z_1 = -\frac{1}{3}$, $z_2 = \frac{1}{2}$ - полюсы 1 порядка; $z_n = \frac{1}{2n+1}$, $n \neq -2$, $n \in \mathbb{Z}$ - полюсы 2 порядка,
$z = \infty$ - У.О.Т. $z = 0$ - не изол. особ. точка.

3. $I = 2\pi i(\sin 1 - 1)$; $I = -2\pi i(\operatorname{res}_{z=i} f(z) + \operatorname{res}_{z=\infty} f(z)) = -2\pi i(-\sin 1 + 1)$.

4. $I = \frac{\pi}{3}(2\cos 1 - 3\sin 1)e^{-9}$. $I = \operatorname{Re} I_1$; $I_1 = 2\pi i \operatorname{res}_{z=1+3i} F(z) = \frac{2\pi i(2+3i)e^{i}e^{-9}}{6i}$

5. $I = \frac{\pi}{20\sqrt{5}}$; $I = \frac{1}{2} I_1$; $I_1 = 2\pi i(\operatorname{res}_{z=-3} F + \operatorname{res}_{z=\infty} F) = 2\pi i\left(-\frac{i}{20\sqrt{5}} + 0\right)$;

6. $-\sum_{n=0}^{\infty} C_{1/2}^n \frac{(-1)^n 3}{9^n} \cdot \frac{1}{z^{2n}}$, $|z| > \frac{1}{3}$; $S\left(\frac{i}{2}\right) = -\sqrt{13}$.

Вар № 4

1. $f(z) = -\left(\frac{1}{z-2} + \frac{4}{(z-i)^2}\right) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n(i)^{n-1}}{z^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}$; $1 < |z| < 2$

2. $z_1 = \pi i$ - У.О.Т.; $z_k = i\pi k$, $k \neq 1$, $k \in \mathbb{Z}$ - полюсы 1 порядка
$z_k = 2\pi k$, $k \neq 0$, $k \in \mathbb{Z}$ - полюсы 2 порядка ; $z = 0$ - С.О.Т. ;
$z = \infty$ - не изол. особ. точка.

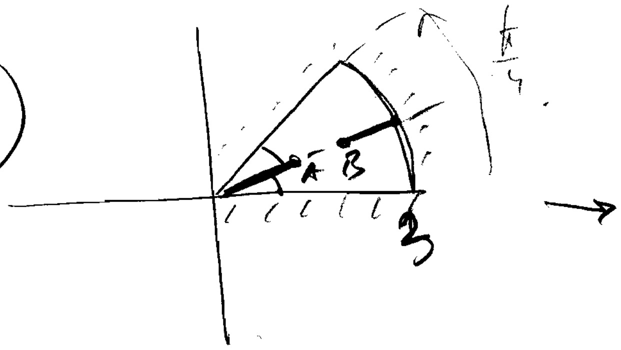
3. $I = 4\pi(e-2)$; $I = -2\pi i(\operatorname{res}_{z=2i} f(z) + \operatorname{res}_{z=\infty} f(z)) = -2\pi i(2ie - 4i)$

4. $I = \frac{\pi}{6} e^{-12}(-6\cos 5 + \sin 5)$; $I = -\operatorname{Im} I_1$; $I_1 = 2\pi i(\operatorname{res}_{z=6i-1} F(z)) = 2\pi i \frac{(1+6i)e^{-12} \cdot e^{-5i}}{12i}$;

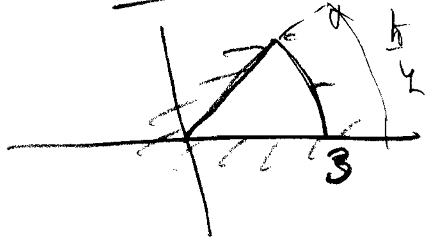
5. $I = \frac{7\sqrt[4]{2}\pi}{8}$; $I(1 - e^{-\frac{6\pi i}{4}}) = 2\pi i(\operatorname{res}_{z=-1} F(z) + \operatorname{res}_{z=\infty} F(z)) = 2\pi i\left(\frac{7}{8\sqrt[4]{2}} e^{-\frac{3\pi i}{4}} + 0\right)$.

6. $\ln 2 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\left(\frac{1}{(1+i)^n} + \frac{1}{(1-i)^n} - 2\right)(z-1)^n$, $|z-1| < 1$; $S\left(\frac{1}{5}\right) = h\left(\frac{1}{5}\right) = \ln 26$.

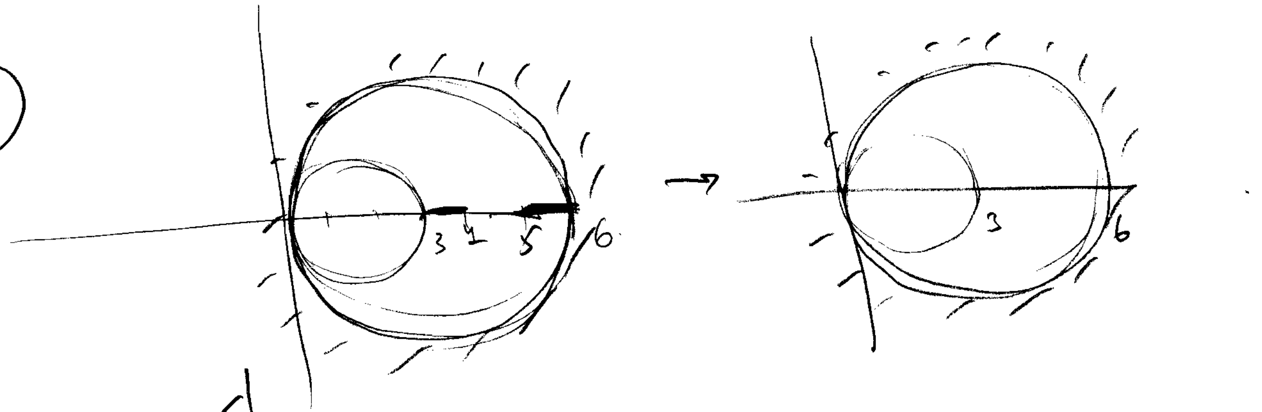
1



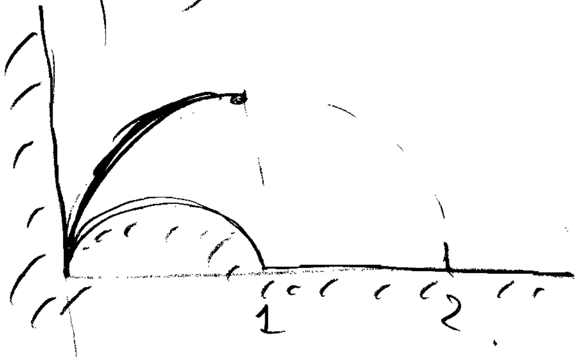
$A(e^{i\frac{\pi}{8}})$; $B(2e^{i\frac{\pi}{8}})$



2



3



4