

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина Математический анализ Курс 1 Семестр 2 2009–2010 уч. год

Фамилия студента _____ № группы _____

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

1. ⑤ Найти первый и второй дифференциал функции $f(x, y)$ в точке $M_0(1, 0)$ и выписать формулу Тейлора до $o((x-1)^2 + y^2)$, где $f(x, y) = \operatorname{th}(x \cos y - 1)$.

2. ⑥ Исследовать на непрерывность и дифференцируемость при всех $\alpha \in \mathbb{R}$ функцию $f(x, y) = \begin{cases} \ln(1 + |x|^{1/2} \cdot |y|^\alpha), & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$ в точке $(0, 0)$.

3. ③ Найти длину дуги кривой $y = \ln(1 + \sin x)$, $x \in [0, \pi/2]$.

4. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость интегралы:

а) ④ $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x \, dx}{(1+x^2)(e^x-1)^\alpha}$;

б) ⑥ $\int_0^1 \frac{\ln^\alpha(1+x^2) \cos \frac{1}{x} \, dx}{x^4}$.

5. ② Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{ch} \frac{1}{\sqrt{n}} \right)^{-n^2}$.

6. ⑤ Последовательность $f_n(x) = e^x \cos \frac{1}{nx}$ исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множествах $E_1 = (1, 2)$ и $E_2 = (2, +\infty)$.

7. ④ Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{x/\sqrt{n}} - 1 \right) \operatorname{arctg} \frac{x^2}{n+1}$ исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множествах $E_1 = (0, 1)$ и $E_2 = (1, +\infty)$.

8. ④ Разложить в ряд по степеням x функцию $f(x) = x^2 \operatorname{arccos} \frac{4x}{4+x^2}$ и найти радиус сходимости полученного ряда.

9. ④ У непрерывных функций $f(x)$ и $g(x)$ интеграл $\int_1^{\infty} f(x) \, dx$ сходится условно, а интеграл $\int_1^{\infty} g(x) \, dx$ сходится абсолютно. Может ли интеграл $\int_1^{\infty} f(x)g(x) \, dx$: а) сходиться абсолютно; б) сходиться условно?

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина Математический анализ Курс 1 Семестр 2 2009–2010 уч. год

Фамилия студента _____ № группы _____

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

1. ⑤ Найти первый и второй дифференциал функции $f(x, y)$ в точке $M_0(0, 1)$ и выписать формулу Тейлора до $o(x^2 + (y - 1)^2)$, где $f(x, y) = \ln(1 + y \sin x)$.

2. ⑥ Исследовать на непрерывность и дифференцируемость при всех $\alpha \in \mathbb{R}$ функцию $f(x, y) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(|x|^\alpha \cdot |y|^{1/3}), & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$ в точке $(0, 0)$.

3. ③ Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = e^x \sin x$, $y = 0$, $x = \pi/4$.

4. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость интегралы:

а) ④ $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(x-1) dx}{e^x(x-\sqrt[3]{x})^\alpha};$

б) ⑥ $\int_1^{+\infty} \ln^\alpha \left(1 + \frac{1}{x}\right) \sin x^3 dx.$

5. ② Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n}(n!)^4}{(3n)!(n+1)!}.$

6. ⑤ Последовательность $f_n(x) = \sqrt{n} \ln \left(1 + \sqrt{\frac{x}{n}}\right)$ исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множествах $E_1 = (0, 1)$ и $E_2 = (1, +\infty)$.

7. ④ Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{x^2 \sqrt{x}}{\sqrt{n}}\right) \operatorname{arctg} \frac{e^x}{\sqrt{n}}$ исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множествах $E_1 = (0, 1)$ и $E_2 = (1, +\infty)$.

8. ④ Разложить в ряд по степеням x функцию $f(x) = x^4 \operatorname{arctg} \frac{3x}{\sqrt{1-9x^2}}$ и найти радиус сходимости полученного ряда.

9. ④ У непрерывных функций $f(x)$ и $g(x)$ интегралы $\int_1^{\infty} f(x) dx$ и $\int_1^{\infty} g(x) dx$ сходятся условно.

Может ли интеграл $\int_1^{\infty} f(x)g(x) dx$: а) сдвигаться абсолютно; б) сдвигаться условно; в) расдвигаться?

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина **Математический анализ** Курс **1** Семестр **2** 2009–2010 уч. год

Фамилия студента _____ № группы _____

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

1. ⑤ Найти первый и второй дифференциал функции $f(x, y)$ в точке $M_0(1, 0)$ и выписать формулу Тейлора до $o((x-1)^2 + y^2)$, где $f(x, y) = \operatorname{tg}(y^3 + \ln x)$.

2. ⑥ Исследовать на непрерывность и дифференцируемость при всех $\alpha \in \mathbb{R}$ функцию $f(x, y) = \begin{cases} \ln(1 + |x|^{1/4} \cdot |y|^\alpha), & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$ в точке $(0, 0)$.

3. ③ Найти площадь поверхности, образованной вращением кривой $y = \sqrt{1+x^2}$, $x \in [0, 1]$, вокруг оси Ox .

4. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость интегралы:

a) ④ $\int_0^{+\infty} \frac{x^{-\alpha} dx}{e^{\alpha x}(e^x - 1)}$;

b) ⑥ $\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg}^\alpha x^2}{x^3} \sin \frac{1}{x} dx$.

5. ② Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(n \operatorname{sh} \frac{1}{n}\right)^{-n^3}$.

6. ⑤ Последовательность $f_n(x) = n \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x}{n}$ исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множествах $E_1 = (0, \pi/4)$ и $E_2 = (\pi/4, \pi/2)$.

7. ④ Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sh} \frac{e^x}{n} \sin \frac{x}{\sqrt{n}}$ исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множествах $E_1 = (0, 1)$ и $E_2 = (1, +\infty)$.

8. ④ Разложить в ряд по степеням x функцию $f(x) = x \operatorname{arctg} \frac{2+x^3}{2-x^3}$ и найти радиус сходимости полученного ряда.

9. ④ У непрерывных функций $f(x)$ и $g(x)$ интеграл $\int_1^{\infty} f(x) dx$ сходится условно, а интеграл $\int_1^{\infty} g(x) dx$ сходится абсолютно. Может ли интеграл $\int_1^{\infty} f(x)g(x) dx$: а) сходиться абсолютно; б) сходиться условно?

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина **Математический анализ** Курс **1** Семестр **2** 2009–2010 уч. год

Фамилия студента _____ № группы _____

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

1. ⑤ Найти первый и второй дифференциал функции $f(x, y)$ в точке $M_0(1, 0)$ и выписать формулу Тейлора до $o((x-1)^2 + y^2)$, где $f(x, y) = \operatorname{arctg}(x^2 - e^y)$.

2. ⑥ Исследовать на непрерывность и дифференцируемость при всех $\alpha \in \mathbb{R}$ функцию $f(x, y) = \begin{cases} \sin(|x|^\alpha \cdot |y|^{1/5}), & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$ в точке $(0, 0)$.

3. ③ Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной кривыми: $y = 1/(1+x^2)$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$.

4. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость интегралы:

a) ④ $\int_0^{+\infty} \frac{(x^\alpha + x) dx}{e^x \operatorname{arctg} x}$;

b) ⑥ $\int_1^{+\infty} \operatorname{arctg}^\alpha \frac{1}{x} \cdot \cos x^3 dx$.

5. ② Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n} \cdot (2n)!}{n^n \cdot n!}$.

6. ⑤ Последовательность $f_n(x) = x^2 \sqrt{1 + \frac{1}{nx}}$ исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множествах $E_1 = (0, 1)$ и $E_2 = (1, +\infty)$.

7. ④ Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{e^x}{n} \right) \sin \frac{x^3}{\sqrt{n}}$ исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множествах $E_1 = (0, 1)$ и $E_2 = (1, +\infty)$.

8. ④ Разложить в ряд по степеням x функцию $f(x) = x^3 \operatorname{arccos} \frac{2x}{\sqrt{1+4x^2}}$ и найти радиус сходимости полученного ряда.

9. ④ У непрерывных функций $f(x)$ и $g(x)$ интегралы $\int_1^{\infty} f(x) dx$ и $\int_1^{\infty} g(x) dx$ сходятся условно.

Может ли интеграл $\int_1^{\infty} f(x)g(x) dx$: а) сдвигаться абсолютно; б) сдвигаться условно; в) расдвигаться?

Вариант 1

1. ⑤ $df(M_0) = dx, \quad d^2(M_0) = -dy^2, \quad f(x, y) = x - 1 - \frac{y^2}{2} + o((x-1)^2 + y^2).$
2. ⑥ Непрерывна при $\alpha \geq 0$, дифференцируема при $\alpha > 1/2$.
3. ③ $L = 2 \ln(1 + \sqrt{2}).$
- 4 а). ④ Сходится при $0 \leq \alpha < 2$.
- 4 б). ⑥ Абсолютно сходится при $\alpha > 3/2$; условно сходится при $1 < \alpha \leq 3/2$; расходится при $\alpha \leq 1$.
5. ② $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow e^{-1/2}$ при $n \rightarrow \infty$, ряд сходится.
6. ⑤ $f(x) = e^x, |f_n(x) - f(x)| = 2e^x \sin^2[1/(2nx)];$
 $x \in E_1, |f_n(x) - f(x)| \leq e^2/(2n^2)$, последовательность равномерно сходится на E_1 ;
 $x_n = n \in E_2, |f_n(x_n) - f(x_n)| \sim e^n/(2n^4)$ при $n \rightarrow \infty$, сходится неравномерно на E_2 .
7. ④ $e^t - 1 = t e^\xi, \quad t = \frac{x}{\sqrt{n}}; \quad x \in E_1, \quad |u_n(x)| \leq \frac{ex}{\sqrt{n}} \cdot \frac{x^2}{n+1} \leq \frac{e}{n^{3/2}};$
 ряд равномерно сходится на E_1 ;
 $x_n = \sqrt{n}, \quad u_n(x_n) \sim (e-1)\pi/4$ при $n \rightarrow \infty$; ряд сходится неравномерно на E_2 .
8. ④ $f(x) = \frac{\pi x^2}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+3}}{(2n+1)4^n}; \quad R = 2.$
9. ④ а) $f(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad g(x) = \frac{1}{x^2}, \quad f(x)g(x) = \frac{\sin x}{x^3}.$
 б) $f(x) = x^3 \sin x^5, \quad g(x) = \frac{1}{x^2}, \quad f(x)g(x) = x \sin x^5.$

Вариант 2

1. ⑤ $df(M_0) = dx, \quad d^2(M_0) = -dx^2 + 2dx dy, \quad f(x, y) = x - x^2/2 + x(y-1) + o(x^2 + (y-1)^2).$
2. ⑥ Непрерывна при $\alpha \geq 0$ и дифференцируема при $\alpha > 2/3$.
3. ③ $S = 1/2.$
- 4 а). ④ Сходится при $\alpha < 2$.
- 4 б). ⑥ Абсолютно сходится при $\alpha > 1$; условно сходится при $-2 < \alpha \leq 1$; расходится при $\alpha \leq -2$.
5. ② $a_{n+1}/a_n \rightarrow 1/3$ при $n \rightarrow \infty$, ряд сходится.
6. ⑤ $f(x) = \sqrt{x}, |f_n(x) - f(x)| = \sqrt{n} |\ln(1+t) - t|, \quad t = \sqrt{x/n};$
 $x \in E_1, |f_n(x) - f(x)| \leq 1/\sqrt{n}$, последовательность равномерно сходится на E_1 ;
 $x_n = \sqrt{n} \in E_2, |f_n(x_n) - f(x_n)| = (1 - \ln 2)\sqrt{n} \rightarrow \infty$, сходится неравномерно на E_2 .
7. ④ $u_n(x) = 2 \sin^2 \left(\frac{x^{5/2}}{2\sqrt{n}} \right); \quad x \in E_1, \quad 0 \leq u_n(x) \leq \frac{2x^5}{4n} \cdot \frac{e^x}{\sqrt{n}} \leq \frac{e}{2n^{3/2}};$
 ряд равномерно сходится на E_1 ;
 $x_n = \sqrt[n]{n}, \quad u_n(x_n) \sim \pi \sin^2(1/2)$ при $n \rightarrow \infty$; ряд сходится неравномерно на E_2 .
8. ④ $f(x) = \pi x^4 + \sum_{n=0}^{\infty} C_{-1/2}^n \frac{(-1)^{n+1} 3^{2n+1} x^{2n+5}}{2n+1}; \quad R = 1/3.$
9. ④ а) $f(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad g(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad f(x)g(x) = \frac{\sin^2 x}{x^2}.$
 б) $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}, \quad g(x) = \frac{2 \cos x}{\sqrt{x}}, \quad f(x)g(x) = \frac{\sin 2x}{x}.$
 в) а) $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}, \quad g(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}, \quad f(x)g(x) = \frac{\sin^2 x}{x}.$

Вариант 3

1. ⑤ $df(M_0) = dx$, $d^2(M_0) = -dx^2$, $f(x, y) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + o((x-1)^2 + y^2)$.
2. ⑥ Непрерывна при $\alpha \geq 0$ и дифференцируема при $\alpha > 3/4$.
3. ③ $P = \frac{\pi}{\sqrt{2}}(\sqrt{6} + \ln(\sqrt{2} + \sqrt{3}))$.
- 4 а). ④ Сходится при $-1 < \alpha < 0$.
- 4 б). ⑥ Абсолютно сходится при $\alpha > 1$; условно сходится при $1/2 < \alpha \leq 1$; расходится при $\alpha \leq 1/2$.
5. ② $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow e^{-1/6}$ при $n \rightarrow \infty$, ряд сходится.
6. ⑤ $f(x) = \operatorname{tg} x$, $|f_n(x) - f(x)| = n|\operatorname{arctg} t - t|$, $t = \operatorname{tg} x/n$;
 $x \in E_1$, $|\operatorname{arctg} t - t| \leq Ct^2 \leq C/n^2$, последовательность равномерно сходится на E_1 ;
 $x_n = \operatorname{arctg} n \in E_2$, $|f_n(x_n) - f(x_n)| = n(1 - \pi/4)$, сходится неравномерно на E_2 .
7. ④ $\operatorname{sh} t = \operatorname{tch} \xi$, $t = \frac{e^x}{n}$; $x \in E_1$, $|u_n(x)| \leq \frac{e \operatorname{ch} 1}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{e \operatorname{ch} 1}{n^{3/2}}$;
 ряд равномерно сходится на E_1 ;
 $x_n = \sqrt{n}$, $u_n(x_n) > \frac{e^{\sqrt{n}} \sin 1}{\sqrt{n}} \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$; ряд сходится неравномерно на E_2 .
8. ④ $f(x) = \frac{\pi x}{4} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{6n+4}}{(2n+1)2^{2n+1}}$; $R = \sqrt[3]{2}$.
9. ④ а) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $g(x) = \frac{1}{x^2}$, $f(x)g(x) = \frac{\sin x}{x^3}$.
 б) $f(x) = x^3 \sin x^5$, $g(x) = \frac{1}{x^2}$, $f(x)g(x) = x \sin x^5$.

Вариант 4

1. ⑤ $df(M_0) = 2dx - dy$, $d^2(M_0) = 2dx^2 - dy^2$,
 $f(x, y) = 2(x-1) - y + (x-1)^2 - y^2/2 + o((x-1)^2 + y^2)$.
2. ⑥ Непрерывна при $\alpha \geq 0$ и дифференцируема при $\alpha > 4/5$.
3. ③ $V = \pi(\pi + 2)/8$.
- 4 а). ④ Сходится при $\alpha > 0$.
- 4 б). ⑥ Абсолютно сходится при $\alpha > 1$; условно сходится при $-2 < \alpha \leq 1$; расходится при $\alpha \leq -2$.
5. ② $a_{n+1}/a_n \rightarrow 36/e$ при $n \rightarrow \infty$, ряд расходится.
6. ⑤ $f(x) = x^2$, $|f_n(x) - f(x)| = x/\left[n\left(\sqrt{1+1/(nx)} + 1\right)\right]$;
 $x \in E_1$, $|f_n(x) - f(x)| < 1/n$, последовательность равномерно сходится на E_1 ;
 $x_n = n \in E_2$, $|f_n(x_n) - f(x_n)| > 1/(1 + \sqrt{2})$, сходится неравномерно на E_2 .
7. ④ $x \in E_1$, $0 \leq u_n(x) \leq \frac{e^x}{n} \cdot \frac{x^3}{\sqrt{n}} \leq \frac{e}{n^{3/2}}$; ряд равномерно сходится на E_1 ;
 $x_n = \sqrt[5]{n}$, $u_n(x_n) > (n^{1/6} - \ln n) \sin 1 \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$; сходится неравномерно на E_2 .
8. ④ $f(x) = \frac{\pi x^3}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^{2n+1} x^{2n+4}}{2n+1}$; $R = 1/2$.
9. ④ а) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $g(x) = \frac{\sin x}{x}$, $f(x)g(x) = \frac{\sin^2 x}{x^2}$.
 б) $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$, $g(x) = \frac{2 \cos x}{\sqrt{x}}$, $f(x)g(x) = \frac{\sin 2x}{x}$.
 в) а) $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$, $g(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$, $f(x)g(x) = \frac{\sin^2 x}{x}$.

Инструкция по проверке экзаменационной работы по математическому анализу, весенний семестр 2009–2010 учебного года

1. На работе должна быть четко выписана фамилия проверяющего и сумма набранных очков.
2. Информацию о проверенных работах: «кол-во очков – кол-во работ» необходимо предварительно сообщить 10 июня Л.Н. Знаменской по e-mail: lznam@lznam.pereslavl.ru
3. Сбор преподавателей с проверенными работами – 11 июня в 8-30 в Актовом зале.
4. За арифметическую ошибку, не имеющую существенного значения, снимать 1 очко.

Оценка отдельных задач

1.	⑤	Найден $d(M_0)$	1 очко
		Найден $d^2(M_0)$	3 очка
		Записана формула Тейлора	1 очко
2.	⑥	Доказана непрерывность при соответствующих значениях α и ее отсутствие при других значениях α	2 очка
		Найдены частные производные в точке $(0, 0)$	1 очко
		Доказана дифференцируемость при соответствующих значениях α	2 очка
		Доказано отсутствие дифференцируемости при других значениях α	1 очко
3.	③	Верно выписан интеграл, который надо вычислить	1 очко
		Правильно найден ответ	2 очка
4 а).	④	Получена асимптотическая формула для $f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ и найдены значения α , при которых сходится интеграл на бесконечном промежутке, не содержащем особые точки	2 очка
		Найдена асимптотическая формула для $f(x)$ в левом конце промежутка и найдены значения α , при которых сходится несобственный интеграл на конечном промежутке	1 очко
		Верно найдены значения α , при которых сходится интеграл	1 очко
4 б).	⑥	Найдены значения α , при которых интеграл сходится абсолютно	1 очко
		Найдены значения α , при которых интеграл сходится (признак Дирихле)	2 очка
		Найдены значения α , при которых интеграл сходится, но неабсолютно	1 очко
		Найдены значения α , при которых интеграл расходится (критерий Коши) ...	2 очка
5.	②	Получена асимптотическая формула для a_{n+1}/a_n или $\sqrt[n]{a_n}$	1 очко
		Установлена сходимость или расходимость ряда	1 очко
6.	⑤	Найдена предельная функция $f(x)$	1 очко
		Исследована равномерная сходимость: неравенство $ f_n(x) - f(x) \leq \alpha_n$, $\alpha_n \rightarrow 0$	3 очка
		Исследована неравномерная сходимость: найдены значения x_n , для которых выполнено неравенство $ f_n(x) - f(x) \geq \beta_n$, где $\beta_n \rightarrow a$, $a > 0$, или $\beta_n \rightarrow +\infty$	1 очко
7.	④	Получена асимптотическая формула для $u_n(x_0)$, $x_0 \in E_1 \cup E_2$ и установлена сходимость в точке x_0	2 очка
		Исследована равномерная сходимость: неравенство $ u_n(x) \leq A/n^\alpha$, $\alpha > 1$	1 очко
		Исследована неравномерная сходимость: найдены значения x_n , для которых $u_n(x_n) \sim A$, $A > 0$ при $n \rightarrow \infty$ или $u_n(x_n) \rightarrow +\infty$ при $n \rightarrow \infty$	1 очко
8.	④	Обозначим $f(x) = x^k g(x)$; правильно найдено разложение Маклорена функции $g'(x)$	2 очка
		Получен с помощью интегрирования ряд Маклорена для функции $g(x)$	1 очко
		Получен ряд Маклорена для функции $f(x)$ и найден радиус сходимости ...	1 очко
9.	④	Получен ответ в а)	1 очко
		Получен ответ в б)	3 очка
		<i>либо</i>	
		Получен ответ в б) и с)	очки 2+1