ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина $\boxed{\text{Математический анализ}}$

Курс $\boxed{1}$ Семестр $\boxed{2}$ 2008/2009 уч.г.

Фамилия студента ________________________ **№ группы** ________

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

1.④ Найти первый и второй дифференциалы функции $f(x,y)$ в точке $M(1;0)$ и представить функцию $f(x,y)$ формулой Тейлора в окрестности этой точки до $o\left((x-1)^2+y^2\right)$, если

$$f(x,y) = x^2 + \operatorname{tg}(\ln(x-y)).$$

2.③ Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox кривой

$$y = \sin x, \quad x \in [0,\pi].$$

3.③ Разложить функцию $f(x) = \ln(10+3x-x^2)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = 2$ и найти радиус сходимости полученного ряда.

4.④ Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+\frac{n}{3}}\,\sin\frac{1}{n}\right)^{-n^3}.$$

---

5. Исследовать на абсолютную и условную сходимость интегралы

а) ④ $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{(x^2+x^3)^{\alpha}}{e^x\arcsin\left(\sqrt{x}\,e^{-x}\right)}\,dx$; б) ⑤ $\displaystyle\int_6^{+\infty}\operatorname{arctg}\left(\frac{\cos x\cdot\ln\left(x+x^2\right)}{\sqrt[9]{x^4}}\right)dx$.

---

6. Исследовать на сходимость и равномерную сходимость

а) ④ на множествах $E_1 = (0;1)$ и $E_2 = (1;+\infty)$ функциональную последовательность $f_n(x) = n\ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right)$;

б) ⑥ на множествах $E_1 = (-\infty;0)$ и $E_2 = (0;+\infty)$ функциональный ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\,\frac{e^x}{n\,e^{2x}+1}$.

7.⑥ Исследовать на дифференцируемость в точке $O(0;0)$ функцию

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2}{x}\operatorname{sh}(3x), & x \neq 0,\\ y^3+|y|^{3/2}, & x = 0.\end{cases}$$

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина **Математический анализ**

Курс **1** **Семестр** **2** **2008/2009 уч.г.**

Фамилия студента ______________________ **№ группы** ________

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

1.④ Найти первый и второй дифференциалы функции $f(x,y)$ в точке $M(0;1)$ и представить функцию $f(x,y)$ формулой Тейлора в окрестности этой точки до $o\left(x^2+(y-1)^2\right)$, если

$$f(x,y)=y^2+\arcsin\left(1-\frac{1}{x+y}\right).$$

2.③ Найти длину графика функции

$$y=\ln\cos x,\quad x\in[0,\pi/6].$$

3.③ Разложить функцию $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+6}}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0=3$ и найти радиус сходимости полученного ряда.

4.④ Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n-\operatorname{arctg} n)^n\,\frac{1}{n!}.$$

---

5. Исследовать на абсолютную и условную сходимость интегралы

а) ④ $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln\left(x^3+\operatorname{ch}x\right)}{(x^2+\sqrt{x})^{\alpha}}\,dx$; б) ⑤ $\displaystyle\int_3^{+\infty}\sin\left(\frac{\sin x\cdot\operatorname{sh}\ln x}{\sqrt[7]{x^{10}}}\right)dx$.

---

6. Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множествах $E_1=(0;1)$ и $E_2=(1;+\infty)$

а) ④ функциональную последовательность $f_n(x)=n\operatorname{arctg}\dfrac{1}{xn}$;

б) ⑥ функциональный ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1+\frac{\sqrt{x}}{n+x}\right)$.

7.⑥ Исследовать на дифференцируемость в точке $O(0;0)$ функцию

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{y}\operatorname{tg}(3y), & y\neq0,\\ x^5+|x|^{5/4}, & y=0.\end{cases}$$

Заказ - Тираж - МФТИ - 92

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина Математический анализ

Курс 1 Семестр 2 2008/2009 уч.г.

Фамилия студента ____________________ **№ группы** __________

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

1.④ Найти первый и второй дифференциалы функции $f(x,y)$ в точке $M(0;-1)$ и представить функцию $f(x,y)$ формулой Тейлора в окрестности этой точки до $o\left(x^2+(y+1)^2\right)$, если

$$f(x,y) = y^2 + \operatorname{arctg}\left(-1+\sqrt{x-y}\right).$$

2.③ Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры

$$0 \leqslant y \leqslant \arcsin x, \quad x \in [0,1].$$

3.③ Разложить функцию в ряд Тейлора $f(x) = \ln\left(\dfrac{4+x}{4-x}\right)$ в окрестности точки $x_0 = 1$ и найти радиус сходимости полученного ряда.

4.④ Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^2+\frac{n}{2}}\,\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^{n^2}.$$

---

5. Исследовать на абсолютную и условную сходимость интегралы

а) ④ $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\left(x+x^2\right)^{\alpha}}{\ln\left(1+\sqrt{x}+\operatorname{sh}x\right)}\,dx$; б) ⑤ $\displaystyle\int_8^{+\infty}\operatorname{sh}\left(\frac{\cos x\cdot\operatorname{arctg}(x^3-20x^2+1)}{\sqrt[8]{x^3}}\right)dx$.

---

6. Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множествах $E_1 = (0;1)$ и $E_2 = (1;+\infty)$

а) ④ функциональную последовательность $f_n(x) = n\sin\dfrac{x^2}{n}$;

б) ⑥ функциональный ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{x}{n}}\,\operatorname{arctg}\frac{n}{xn^2+1}$.

7.⑥ Исследовать на дифференцируемость в точке $O(0;0)$ функцию

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{y}\operatorname{th}(3y), & y \neq 0,\\ x^3+|x|^{7/6}, & y = 0.\end{cases}$$

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина $\boxed{\text{Математический анализ}}$

Курс $\boxed{1}$ Семестр $\boxed{2}$ 2008/2009 уч.г.

Фамилия студента ______________________________ **№ группы** __________

Сумма баллов			**Оценка**	
Фамилия проверяющего			**Фамилия экзаменатора**	

1.④ Найти первый и второй дифференциалы функции $f(x,y)$ в точке $M(1;0)$ и представить функцию $f(x,y)$ формулой Тейлора в окрестности этой точки до $o\left((x-1)^2+y^2\right)$, если

$$f(x,y) = x^2 + \sin\left(-1 + \frac{1}{\sqrt{x-y}}\right).$$

2.③ Найти длину дуги кривой, заданной в полярных координатах

$$r = \sin^3\frac{\varphi}{3}, \quad \varphi \in [0,3\pi].$$

3.③ Разложить функцию $f(x) = \dfrac{x}{(x-2)(x+3)}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = -1$ и найти радиус сходимости полученного ряда.

4.④ Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n!\ \mathrm{sh}^n\frac{1}{n}.$$

---

5. Исследовать на абсолютную и условную сходимость интегралы

а) ④ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^x \operatorname{arctg}(x\,e^{-x})}{(x+\sqrt[3]{x})^{\alpha}}\,dx$; б) ⑤ $\displaystyle\int_4^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{\sin x \cdot \mathrm{ch}\ln x}{\sqrt[5]{x^8}}\right) dx$.

---

6. Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множествах $E_1 = (0;1)$ и $E_2 = (1;+\infty)$

а) ④ функциональную последовательность $f_n(x) = n\left(e^{x/n} - 1\right)$;

б) ⑥ функциональный ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin\frac{x}{n+x^2}$.

7.⑥ Исследовать на дифференцируемость в точке $O(0;0)$ функцию

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2}{x}\arcsin(2x), & x \neq 0,\\ y^3 + |y|^{5/3}, & x = 0.\end{cases}$$

Ответы. Матан 1 курс, 2 семестр, 2008/2009 г. **Вариант (91)**

1.④ $df(1;0) = 3\,dx - dy$; $d^2f(1;0) = dx^2 + 2\,dxdy - dy^2$;
$f(x,y) = 1 + 3(x-1) - y + \frac{1}{2}(x-1)^2 + (x-1)y - \frac{1}{2}y^2 + o\left((x-1)^2 + y^2\right)$.

2.③ $S = 2\pi\left(\ln\left(1+\sqrt{2}\right) + \sqrt{2}\right)$.

3.③ $f = \ln 12 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{k-1}}{4^k} - \frac{1}{3^k}\right)(x-2)^k$; $R = 3$.

4.④ $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n} = e^{1/18}$; расходится . $e^{-1/9}$ сх. $e^{-1/9}$; сх

---

5. а) ④ Сходится при $\alpha \in \left(-\frac{1}{4}; -\frac{1}{6}\right)$, иначе расходится;
б) ⑤ Сходится условно.

---

6. а) ④ $f_n(x) \to x$; на E_1 - равномерно; на E_2 - неравномерно;
б) ⑥ на E_1 - неравномерно; на E_2 - равномерно.

7.⑥ Дифференцируема.

Ответы. Матан 1 курс, 2 семестр, 2008/2009 г. **Вариант (92)**

1.④ $df(0;1) = dx + 3\,dy$; $d^2f(0;1) = -2\,dx^2 - 4\,dxdy$;
$f(x,y) = 1 + x + 3(y-1) - x^2 - 2x(y-1) + o\left(x^2 + (y-1)^2\right)$.

2.③ $l = \frac{1}{2}\ln 3$.

3.③ $f = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_{1/2}^k}{5}\left(\frac{1}{3^{2k-1}} - \frac{1}{2^{2k-1}}\right)(x-3)^k$; $R = 4$.

4.④ $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = e$; расходится .

---

5. а) ④ Сходится при $\alpha \in (1;6)$, иначе расходится;
б) ⑤ Сходится условно.

---

6. а) ④ $f_n(x) \to \frac{1}{x}$; на E_1 - неравномерно; на E_2 - равномерно;
б) ⑥ на E_1 - равномерно; на E_2 - неравномерно.

7.⑥ Дифференцируема.

Ответы. Матан 1 курс, 2 семестр, 2008/2009 г. **Вариант (93)**

1.④ $df(0;-1) = \frac{1}{2}\,dx + \frac{3}{2}\,dy$; $d^2f(0;-1) = -\frac{1}{4}\,dx^2 + \frac{1}{2}\,dxdy + \frac{7}{4}\,dy^2$;

$f(x,y) = 1 + \frac{1}{2}\,x + \frac{3}{2}(y+1) - \frac{1}{8}\,x^2 + \frac{1}{4}\,x(y+1) + \frac{7}{8}(y+1)^2 + o\left(x^2 + (y+1)^2\right)$. $-\frac{5}{2}$ $-\frac{5}{2}$

2.③ $V = \frac{\pi^3 - 8\pi}{4}$.

3.③ $f = \ln\frac{5}{3} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3^k} + \frac{(-1)^{k}}{5^k}\right)\frac{(x-1)^k}{k}$; $R = 3$. $k-1$ √ $\sqrt{}\,k-1$ √

4.④ $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = e^{-1/4}$; сходится .

5. а) ④ Сходится при $\alpha \in \left(-\frac{1}{2};0\right)$, иначе расходится;

б) ⑤ Сходится условно.

6. а) ④ $f_n(x) \to x:2$ на E_1 - равномерно; на E_2 - неравномерно; x^2 √ $\to x^2$;

б) ⑥ на E_1 - неравномерно; на E_2 - равномерно.

7.⑥ Дифференцируема.

Ответы. Матан 1 курс, 2 семестр, 2008/2009 г. **Вариант (94)**

1.④ $df(1;0) = \frac{3}{2}\,dx + \frac{1}{2}\,dy$; $d^2f(1;0) = \frac{11}{4}\,dx^2 - \frac{3}{2}\,dxdy + \frac{3}{4}\,dy^2$;

$f(x,y) = 1 + \frac{3}{2}(x-1) + \frac{1}{2}\,y + \frac{11}{8}(x-1)^2 - \frac{3}{4}(x-1)y + \frac{3}{8}\,y^2 + o\left((x-1)^2 + y^2\right)$.

2.③ $l = \frac{3}{2}\,\pi$.

3.③ $f = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{3}{10}\,\frac{(-1)^k}{2^k} - \frac{2}{15}\,\frac{1}{3^k}\right)(x+1)^k$; $R = 2$.

4.④ $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = e^{-1}$; сходится.

5. а) ④ Сходится при $\alpha \in (2;6)$, иначе расходится;

б) ⑤ Сходится условно.

6. а) ④ $f_n(x) \to x$; на E_1 - равномерно; на E_2 - неравномерно;

б) ⑥ на E_1 - равномерно; на E_2 - неравномерно.

7.⑥ Дифференцируема.