ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина Уравнения математической физики

Курс 3 Семестр 4 2009/2010 уч.г.

Фамилия студента ______________________ **№ группы** __________

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

1.④ Найти решение задачи
$$6u_{xx}-5u_{xy}+u_{yy}-2u_y+4u_x=0,\quad (x,y)\in\mathbb{R}^2;$$
$$u|_{y=0}=1+x,\quad u_y|_{y=0}=3,\quad x\in\mathbb{R}^1.$$

2.④ Найти решение задачи
$$u_{tt}-u_{xx}=0,\quad x>0,\quad t>0;$$
$$u|_{t=0}=2\sin 2x,\quad u_t|_{t=0}=2,\quad x\geqslant 0;\qquad (u_x-2u)|_{x=0}=4-4t,\quad t\geqslant 0.$$

3.⑦ Найти решение задачи
$$u_t=4u_{xx}+3u-(1+\sin x)e^{2t},\quad 0<x<\pi,\quad t>0;$$
$$u|_{t=0}=x+1,\quad 0\leqslant x\leqslant\pi;\qquad u|_{x=0}=e^{2t},\quad u_x|_{x=\pi}=e^{3t},\quad t\geqslant 0.$$

4.④ Найти решение задачи
$$u_t=\frac{1}{4}\Delta u+\cos(5x)\cdot e^{t-5z},\quad (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\quad t>0;$$
$$u|_{t=0}=y^3\operatorname{sh}2x,\quad (x,y,z)\in\mathbb{R}^3.$$

5.④ Найти решение $u(x,y)=u(r\cos\varphi,r\sin\varphi)$ задачи
$$\Delta u+9r=0,\quad \frac{1}{3}<r<1,\quad 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi;$$
$$u|_{r=1/3}=10\sin\varphi-\frac{1}{27},\quad 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi;$$
$$u_r|_{r=1}=2\cos 2\varphi-3,\quad 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi.$$

6.④ Найти условия на $f(x)\in C[-\pi;\pi]$ при которых уравнение
$$u(x)=\lambda\int_{-\pi}^{\pi}(|x|+y\sin x)u(y)\,dy+f(x),\quad x\in[-\pi,\pi],$$
разрешимо при всех λ.

7.④ Найти решение $u(x,y,t)=u(r\cos\varphi,r\sin\varphi,t)$ задачи
$$9u_{tt}=\Delta u+f(r)\cos 4\varphi,\quad r<1,\quad t>0;$$
$$u|_{t=0}=J_0\left(\mu_4^{(0)}r\right),\quad u_t|_{t=0}=g(r)\cos 4\varphi,\quad r\leqslant 1;\quad u|_{r=1}=0,\quad t\geqslant 0,$$
где $f(r)$, $g(r)$ — гладкие на $[0,1]$ функции, $g(1)=f(1)=0$; $\mu_j^{(k)}$ — j-й по порядку положительный нуль функции Бесселя J_k, $k=0,1,2,\ldots$, $j=1,2,3,\ldots$

8.④ Пусть $Q=\{x=(x_1,x_2)\colon\ 0<x_1<\pi,\ 0<x_2<1\}$. Показать, что для всех $u(x_1,x_2)\in C^1(\overline{Q})$, $u|_{x_1=0}=u|_{x_1=\pi}=0$, $u|_{x_2=0}=0$, $u|_{x_2=1}=\sin x$, имеет место неравенство
$$\iint\limits_Q|\nabla u|^2\,dx_1\,dx_2>\frac{\pi}{2}.$$

9.④ Найти в $D'(\mathbb{R}^1)$ обобщённое решение $u(t)$ уравнения
$$\frac{d^2u}{dt^2}+8\frac{du}{dt}+25u=\frac{d^2f}{dt^2}-f,\quad f=\frac{1}{2}e^{|t|},$$
обращающееся в нуль при $t<0$.

Для факультета ФАЛТ

10.④ Найдите общее решение системы $\begin{cases}2u_t+3v_t+7u_x+8v_x=0,\\ u_t+2v_t+5u_x+6v_x=0.\end{cases}$
Решите задачу Коши ($x\in\mathbb{R}$, $t>0$) с начальными условиями $u(x,0)=\sin x$, $v(x,0)=0$.

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина Уравнения математической физики

Курс 3 Семестр 4 2009/2010 уч.г.

Фамилия студента ______________________ **№ группы** ________

Сумма баллов			Оценка	
Фамилия проверяющего			Фамилия экзаменатора	

1. ④ Найти решение задачи
$$u_{xx} - 2u_{xy} - 3u_{yy} + 2u_x + 2u_y = 0, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2;$$
$$u|_{x=0} = 1 - 4y, \quad u_x|_{x=0} = 0, \quad y \in \mathbb{R}^1.$$

2. ④ Найти решение задачи
$$u_{tt} - 4u_{xx} = 0, \quad x > 0, \quad t > 0;$$
$$u|_{t=0} = 2e^{2x} - 4, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad x \geqslant 0; \qquad (u_x - 2u)|_{x=0} = 8t^2 + 8, \quad t \geqslant 0.$$

3. ⑦ Найти решение задачи
$$u_t = u_{xx} + 5u - 8x^2e^t, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad t > 0;$$
$$u|_{t=0} = \pi x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}; \qquad u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=\pi/2} = \frac{\pi^2}{2}e^t, \quad t \geqslant 0.$$

4. ④ Найти решение задачи
$$u_{tt} = 9\Delta u + xyz\sqrt{1+t}, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0;$$
$$u|_{t=0} = ze^{2x}, \quad u_t|_{t=0} = y, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

5. ④ Найти решение $u(x,y) = u(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ задачи
$$\Delta u + 15r\sin 2\varphi = 0, \quad 1 < r < 2, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi;$$
$$u_r|_{r=1} = 2\cos 2\varphi - 9\sin 2\varphi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi;$$
$$u|_{r=2} = 1 - 25\sin 2\varphi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi.$$

---

6. ④ Найти условия на $f(x) \in C\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ при которых уравнение
$$u(x) = \lambda \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (|y|\sin|x| + y|x|)u(y)\,dy + f(x), \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$
разрешимо при всех λ.

7. ④ Найти решение $u(x,y,t) = u(r\cos\varphi, r\sin\varphi, t)$ задачи
$$u_{tt} = \Delta u + f(r)\sin 4\varphi, \quad r < \frac{1}{4}, \quad t > 0;$$
$$u|_{t=0} = J_4\left(4\mu_4^{(4)} r\right)\cos 4\varphi, \quad u_t|_{t=0} = g(r)\sin 4\varphi, \quad r \leqslant \frac{1}{4}; \quad u|_{r=1/4} = 0, \quad t \geqslant 0,$$
где $f(r)$, $g(r)$ — гладкие на $\left[0, \frac{1}{4}\right]$ функции, $f\left(\frac{1}{4}\right) = g\left(\frac{1}{4}\right) = 0$; $\mu_j^{(k)}$ — j-й по порядку положительный нуль функции Бесселя J_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$, $j = 1, 2, 3, \ldots$

8. ④ Пусть $Q = \{x = (x_1, x_2)\colon 0 < x_1 < \pi, 0 < x_2 < 1\}$. Найти функцию, реализующую
$$\inf_{u \in M} \iint\limits_Q (|\nabla u|^2 + 2u\sin x_1)\,dx_1\,dx_2, \quad \text{где} \quad M = \{u \in C^1(\overline{Q}),\ u|_{\partial Q} = 0\}.$$

9. ④ Найти в $D'(\mathbb{R}^1)$ обобщённое решение $u(t)$ уравнения
$$\frac{d^2u}{dt^2} + 4\frac{du}{dt} - 45u = \frac{d^2f}{dt^2} + \frac{1}{2(1+|t|)^2}, \quad f = \frac{1}{2}\ln(1+|t|),$$
обращающееся в нуль при $t < 0$.

Для факультета ФАЛТ

10. ④ Найдите общее решение системы $\begin{cases} 3u_t + 2v_t - 3u_x = 0, \\ u_t + v_t - 5u_x - v_x = 0. \end{cases}$

Решите задачу Коши ($x \in \mathbb{R}$, $t > 0$) с начальными условиями $u(x,0) = 0$, $v(x,0) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина Уравнения математической физики

Курс 3 Семестр 4 2009/2010 уч.г.

Фамилия студента ______________________ **№ группы** ________

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

1.④ Найти решение задачи
$$2u_{xx} - 3u_{xy} + u_{yy} - u_x + u_y = 0, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2;$$
$$u|_{y=0} = 1 + x, \quad u_y|_{y=0} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^1.$$

2.④ Найти решение задачи
$$u_{tt} - 4u_{xx} = 0, \quad x > 0, \quad t > 0;$$
$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 4\sin x - 4, \quad x \geqslant 0; \qquad (u_x + u)|_{x=0} = 4t^2, \quad t \geqslant 0.$$

3.⑦ Найти решение задачи
$$u_t = u_{xx} + u + e^{x-8t} + x(2-t), \quad 0 < x < \frac{\pi}{3}, \quad t > 0;$$
$$u|_{t=0} = -x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3}; \qquad u_x|_{x=0} = t-1, \quad u_x|_{x=\pi/3} = t-1, \quad t \geqslant 0.$$

4.④ Найти решение задачи
$$u_{tt} = \Delta u + \sin(x+2y)\cos t, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0;$$
$$u|_{t=0} = \operatorname{ch}(3y), \quad u_t|_{t=0} = xe^z, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

5.④ Найти решение $u(x,y) = u(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ задачи
$$\Delta u - 5\sin 3\varphi = 0, \quad 1 < r < 2, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi;$$
$$u_r|_{r=1} = \sin 3\varphi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi;$$
$$u|_{r=2} = 3 - 4\sin 3\varphi - \cos 3\varphi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi.$$

6.④ Найти условия на $f(x) \in C\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ при которых уравнение
$$u(x) = \lambda \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (2\sin|y| + (x-1)\sin y) u(y)\,dy + f(x), \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$
разрешимо при всех λ.

7.④ Найти решение $u(x,y,t) = u(r\cos\varphi, r\sin\varphi, t)$ задачи
$$u_{tt} = 16\Delta u + f(r)\cos 6\varphi, \quad r < 2, \quad t > 0;$$
$$u|_{t=0} = g(r)\cos 6\varphi, \quad u_t|_{t=0} = J_0\left(\frac{\mu_3^{(0)}}{2} r\right), \quad r \leqslant 2; \quad u|_{r=2} = 0, \quad t \geqslant 0,$$
где $f(r)$, $g(r)$ — гладкие на $[0,2]$ функции, $g(2) = f(2) = 0$; $\mu_j^{(k)}$ — j-й по порядку положительный нуль функции Бесселя J_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$, $j = 1, 2, 3, \ldots$

8.④ Пусть $Q = \{x = (x_1, x_2)\colon 0 < x_1 < \pi, 0 < x_2 < 1\}$. Показать, что для всех $u(x) \in C^1(\overline{Q})$, $u|_{x_1=0} = u|_{x_1=\pi} = 0$, $u|_{x_2=0} = 0$, $u|_{x_2=1} = \sin 2x_1$, имеет место неравенство
$$\iint_Q |\nabla u|^2\,dx_1\,dx_2 > \pi.$$

9.④ Найти в $D'(\mathbb{R}^1)$ обобщённое решение $u(t)$ уравнения
$$\frac{d^2u}{dt^2} + 4\frac{du}{dt} + 29u = \frac{d^2 f}{dt^2} + f, \quad f = \frac{1}{2}\sin|t|,$$
обращающееся в нуль при $t < 0$.

Для факультета ФАЛТ

10.④ Найдите общее решение системы $\begin{cases} u_t + 2v_t + 10u_x + 8v_x = 0, \\ u_t + 3v_t + 19u_x + 15v_x = 0. \end{cases}$
Решите задачу Коши ($x \in \mathbb{R}$, $t > 0$) с начальными условиями $u(x,0) = 0$, $v(x,0) = \cos x$.

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина $\boxed{\text{Уравнения математической физики}}$

Курс $\boxed{3}$ Семестр $\boxed{4}$ 2009/2010 уч.г.

Фамилия студента ______________________________ **№ группы** __________

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

1.④ Найти решение задачи
$$u_{xx} - u_{xy} - 2u_{yy} + 3u_x + 3u_y = 0, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2;$$
$$u|_{x=0} = 1 - 3y, \quad u_x|_{x=0} = 0, \quad y \in \mathbb{R}^1.$$

2.④ Найти решение задачи
$$u_{tt} - 4u_{xx} = 0, \quad x > 0, \quad t > 0;$$
$$u|_{t=0} = \cos x - 2x, \quad u_t|_{t=0} = 2\sin x + 2, \quad x \geqslant 0; \qquad (u_x - u)|_{x=0} = t^2 - 3, \quad t \geqslant 0.$$

3.⑦ Найти решение задачи
$$u_t = 8u_{xx} + u + (\pi^2 - x - x^2)e^{-t}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0;$$
$$u|_{t=0} = x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi; \qquad u_x|_{x=0} = \operatorname{ch} t, \quad u|_{x=\pi} = \pi \operatorname{ch} t, \quad t \geqslant 0.$$

4.④ Найти решение задачи
$$u_t = \Delta u + ye^{2z-t}, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0;$$
$$u|_{t=0} = (y - x^4)\sin z, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

5.④ Найти решение $u(x,y) = u(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ задачи
$$\Delta u + 16r\cos\varphi = 0, \quad \frac{1}{2} < r < 1, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi;$$
$$u|_{r=1/2} = 1 - \frac{1}{4}\cos\varphi + \cos 3\varphi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi;$$
$$u_r|_{r=1} = -6\cos\varphi - 2\cos 2\varphi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi.$$

6.④ Найти условия на $f(x) \in C\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ при которых уравнение
$$u(x) = \lambda \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin(|x| + y)u(y)\,dy + f(x), \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$
разрешимо при всех λ.

7.④ Найти решение $u(x,y,t) = u(r\cos\varphi, r\sin\varphi, t)$ задачи
$$4u_{tt} = \Delta u + f(r)\sin 3\varphi, \quad r < \frac{1}{2}, \quad t > 0;$$
$$u|_{t=0} = g(r)\sin 3\varphi, \quad u_t|_{t=0} = J_3\left(2\mu_5^{(3)} r\right)\sin 3\varphi, \quad r \leqslant \frac{1}{2}; \quad u|_{r=1/2} = 0, \quad t \geqslant 0,$$
где $f(r)$, $g(r)$ — гладкие на $[0,\frac{1}{2}]$ функции, $f\left(\frac{1}{2}\right) = g\left(\frac{1}{2}\right) = 0$; $\mu_j^{(k)}$ — j-й по порядку положительный нуль функции Бесселя J_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$, $j = 1, 2, 3, \ldots$

8.④ Пусть $Q = \{x = (x_1, x_2)\colon 0 < x_1 < \pi,\ 0 < x_2 < 1\}$. Найти функцию, реализующую
$$\inf_{u \in M} \iint\limits_Q (|\nabla u|^2 + 2u\sin 2x_1)\,dx_1\,dx_2, \quad \text{где} \quad M = \{u \in C^1(\overline{Q}),\ u|_{\partial Q} = 0\}.$$

9.④ Найти в $D'(\mathbb{R}^1)$ обобщённое решение $u(t)$ уравнения
$$\frac{d^2u}{dt^2} + 3\frac{du}{dt} - 28u = \frac{d^2 f}{dt^2} + \frac{|t|}{(1+t^2)^2}, \quad f = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}|t|,$$
обращающееся в нуль при $t < 0$.

Для факультета ФАЛТ

10.④ Найдите общее решение системы $\begin{cases} u_t + v_t + 5u_x + 13v_x = 0, \\ 3u_t + 4v_t + 11u_x + 28v_x = 0. \end{cases}$

Решите задачу Коши ($x \in \mathbb{R}$, $t > 0$) с начальными условиями $u(x,0) = \dfrac{1}{1+x^2}$, $v(x,0) = 0$.

1.④ $\xi = 3y + x$, $\eta = 2y + x$; $u_{\xi\eta} + 2u_\xi = 0$;

$$u(x,y) = f(3y+x)e^{-2(2y+x)} + g(2y+x) = \frac{1}{2}e^{2y} + \frac{1}{2} + 2y + x.$$

2.④ $$u(x,t) = \sin 2(x+t) + x + t + \begin{cases} \sin 2(x-t) - x + t, & x \geqslant t, \\ e^{2(x-t)} - 2 - x + t + \cos 2(x-t), & x \leqslant t. \end{cases}$$

3.⑦ $u(x,t) = v(x,t) + e^{2t} + xe^{3t}$, $v(x,t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} T_n(t)\sin\left(\frac{1}{2}+n\right)x$; $-\sin x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{1}{2}+n\right)x$,

$b_n = \dfrac{8(-1)^n}{\pi(2n-1)(2n+3)}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$; $T_n'(t) = \left(3 - 4\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\right)T_n(t) + b_n e^{2t}$,

$T_n(0) = 0$, $n = 0,1,2,\ldots$; $T_0(t) = b_0 t e^{2t}$, $T_n(t) = \dfrac{b_n}{4(n^2+n)}\left(e^{2t} - e^{(2-4n^2-4n)t}\right)$, $n = 1,2,\ldots$

$$u(x,t) = e^{2t} + xe^{3t} - \frac{8}{3\pi}te^{2t}\sin\frac{x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{\pi(n^2+n)(2n-1)(2n+3)}\left(e^{2t} - e^{(2-4n^2-4n)t}\right) \times$$
$$\times \sin\left(\frac{1}{2}+n\right)x.$$

4.④ $u(x,y,z,t) = (e^t - 1)\cos 5x \cdot e^{-5z} + \left(y^3 + \frac{3}{2}ty\right)e^t \operatorname{sh} 2x.$

5.④ $u = -r^3 + 3\left(r + \frac{1}{r}\right)\sin\varphi + \frac{1}{82}\left(81r^2 - \frac{1}{r^2}\right)\cos 2\varphi.$

6.④ Из теорем Фредгольма вытекает, что таким условием является ортогональность функции $f(x)$ **всем** собственным функциям сопряжённого ядра $K^*(x,y)$, т.е. в нашем случае функциям $v_1(x) = 1$ и $v_2(x) = x$ (отвечающим характеристическим числам $\frac{1}{\pi^2}$ и $\frac{1}{2\pi}$ соответственно). **Ответ:** $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot 1\,dx = 0$, $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)x\,dx = 0$.

7.④ $$u = \cos\left(\frac{1}{3}\mu_4^{(0)}t\right)J_0\left(\mu_4^{(0)}r\right) + \sum_{j=1}^{\infty}\Bigg[\frac{3b_j}{\mu_j^{(4)}}\sin\left(\frac{1}{3}\mu_j^{(4)}t\right) +$$
$$+ \frac{a_j}{(\mu_j^{(4)})^2}\left(1 - \cos\left(\frac{1}{3}\mu_j^{(4)}t\right)\right)\Bigg]J_4\left(\mu_j^{(4)}r\right)\cos 4\varphi,\ f(r) = \sum_{j=1}^{\infty}a_j J_4\left(\mu_j^{(4)}r\right),$$
$$g(r) = \sum_{j=1}^{\infty}b_j J_4\left(\mu_j^{(4)}r\right).$$

8.④ Функция $u_0(x_1,x_2) = \sin x_1 \cdot \dfrac{\operatorname{sh} x_2}{\operatorname{sh} 1}$, как решение задачи Дирихле $\Delta u_0 = 0$, $(x_1,x_2) \in Q$, $u_0|_{x_1=0} = u_0|_{x_1=\pi} = 0$, $u_0|_{x_2=1} = 0$, $u_0|_{x_2=1} = \sin x_1$, реализует $\inf\limits_{u\in M}\iint\limits_Q |\nabla u|^2 dx_1\,dx_2$, $M = \{u \in C^1(\overline{Q})\colon u|_{x_1=0} = u|_{x_1=\pi} = u|_{x_2=0} = 0,\ u|_{x_2=1} = \sin x_1\}$. Поэтому требуемое неравенство следует из неравенства $\iint\limits_Q |\nabla u_0|^2 dx_1\,dx_2 = \frac{\pi}{2}\operatorname{cth} 1 > \frac{\pi}{2}$.

9.④ $$\frac{df}{dt} = \frac{1}{2}\begin{cases} e^t, & t > 0 \\ -e^{-t}, & t < 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{d^2f}{dt^2} = \delta(t) + \frac{1}{2}\begin{cases} e^t, & t > 0 \\ e^{-t}, & t < 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{d^2f}{dt^2} - f = \delta(t).$$

$u = \theta(t)Z(t)$, $Z(t) = Ae^{(-4+3i)t} + Be^{(-4-3i)t}$, $Z(0) = 0$, $Z'(0) = 1$. $u = \frac{1}{3}\theta(t)e^{-4t}\sin 3t$.

1.④ $\xi = y + 3x$, $\eta = y - x$; $2u_{\xi\eta} - u_\xi = 0$;
$u(x,y) = f(y+3x)e^{\frac{1}{2}(y-x)} + g(y-x) = 2e^{-2x} - 1 - 4(y-x)$.

2.④ $u(x,t) = e^{2(x+2t)} - 2 + \begin{cases} e^{2(x-2t)} - 2, & x \geqslant 2t, \\ \dfrac{3}{2}e^{2(x-2t)} - (x-2t)^2 - (x-2t) - \dfrac{5}{2}, & x \leqslant 2t. \end{cases}$

3.⑦ $u(x,t) = v(x,t) + \pi x e^t$, $v(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin 2nx$; $4\pi x - 8x^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin 2nx$,

$b_n = \dfrac{8(1-(-1)^n)}{\pi n^3}$, $n = 1, 2, \ldots$; $T_n'(t) = (5-4n^2)T_n(t) + b_n e^t$, $T_n(0) = 0$, $n = 1, 2, \ldots$;

$T_1(t) = b_1 t e^t$, $T_n(t) = \dfrac{b_n}{4(n^2-1)}\left(e^t - e^{(5-4n^2)t}\right)$, $n = 2, 3, \ldots$

$$u(x,t) = \pi x e^t + \frac{16}{\pi} t e^t \sin 2x + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{\pi(2m-1)^3(m^2-m)}(e^t - e^{(5-4(2m-1)^2)t})\sin(4m-2)x.$$

4.④ $u(x,y,z,t) = \left(\dfrac{4}{15}((1+t)^{5/2} - 1) - \dfrac{2}{3}t\right) xyz + ze^{2x}\operatorname{ch}(6t) + yt$.

5.④ $u = -3r^3 \sin 2\varphi + 1 - \dfrac{4}{17}\left(r^2 + \dfrac{1}{r^2}\right)\sin 2\varphi + \dfrac{1}{17}\left(r^2 - \dfrac{16}{r^2}\right)\cos 2\varphi$.

6.④ Из теорем Фредгольма вытекает, что таким условием является условие ортогональности функции $f(x)$ **всем** собственным функциям сопряжённого ядра $K^*(x,y)$, т.е. в нашем случае функции $|x| + \dfrac{\pi^3}{24}x$ (собственная функция, отвечающая характеристическому числу $\lambda = \dfrac{1}{2}$). **Ответ:** $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x)\left(|x| + \frac{\pi^3}{24}x\right)dx = 0$.

7.④ $u = \cos\left(4\mu_4^{(4)}t\right) J_4\left(4\mu_4^{(4)}r\right)\cos 4\varphi + \sum\limits_{j=1}^{\infty}\Big[\dfrac{a_j}{(4\mu_j^{(4)})^2}\left(1 - \cos(4\mu_j^{(4)}t)\right) +$

$+ \dfrac{b_j}{4\mu_j^{(4)}}\sin\left(4\mu_j^{(4)}t\right)\Big] J_4\left(4\mu_j^{(4)}r\right)\sin 4\varphi$, $f(r) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j J_4\left(4\mu_j^{(4)}r\right)$,

$g(r) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} b_j J_4\left(4\mu_j^{(4)}r\right)$.

8.④ $u(x_1,x_2) = \sin x_1 \cdot \left(\operatorname{ch} x_2 + \dfrac{1 - \operatorname{ch} 1}{\operatorname{sh} 1}\operatorname{sh} x_2 - 1\right)$.

9.④ $\dfrac{df}{dt} = \dfrac{1}{2}\begin{cases} \dfrac{1}{1+t}, & t > 0 \\ -\dfrac{1}{1-t}, & t < 0 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{d^2f}{dt^2} = \delta(t) + \dfrac{1}{2}\begin{cases} -\dfrac{1}{(1+t)^2}, & t > 0 \\ -\dfrac{1}{(1-t)^2}, & t < 0 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{d^2f}{dt^2} + \dfrac{1}{2(1+|t|)^2} = \delta(t)$.

$u = \theta(t)Z(t)$, $Z(t) = Ae^{5t} + Be^{-9t}$, $Z(0) = 0$, $Z'(0) = 1$. $u = \dfrac{1}{14}\theta(t)(e^{5t} - e^{-9t})$.

1.④ $\xi = y + x$, $\eta = 2y + x$; $u_{\xi\eta} - u_\eta = 0$; $u(x,y) = f(2y+x)e^{x+y} + g(x+y) = e^{-y} + x + y$.

2.④ $u(x,t) = -\cos(x+2t) - (x+2t) +$
$$+\begin{cases} \cos(x-2t) + (x-2t), & x \geqslant 2t, \\ -3e^{2t-x} + (x-2t)^2 - 3(x-2t) + 4 + \sin(x-2t), & x \leqslant 2t. \end{cases}$$

3.⑦ $u(x,t) = v(x,t) + xt - t$, $v(x,t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} T_n(t)\cos(3nx)$; $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n \cos(3nx)$, $b_0 = \dfrac{3(e^{\pi/3}-1)}{\pi}$,

$b_n = \dfrac{6(e^{\pi/3}(-1)^n - 1)}{\pi(9n^2+1)}$, $n = 1, 2, \ldots$; $T_n'(t) = (1-9n^2)T_n(t) + b_n e^{-8t}$,

$T_n(0) = 0$, $n = 0,1,2, \ldots$; $T_1(t) = b_1 t e^{-8t}$, $T_n(t) = \dfrac{b_n}{9(n^2-1)}\left(e^{-8t} - e^{(1-9n^2)t}\right)$,

$n = 0,2,3, \ldots$

$$u(x,t) = xt - x + \frac{1-e^{\pi/3}}{3\pi}(e^{-8t} - e^t) - \frac{3(e^{\pi/3}+1)}{5\pi}te^{-8t}\cos 3x +$$
$$+\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2(e^{\pi/3}(-1)^n - 1)\cos 3nx}{3\pi(n^2-1)(9n^2+1)}(e^{-8t} - e^{(1-9n^2)t}).$$

4.④ $u(x,y,z,t) = \dfrac{1}{4}(\cos t - \cos(\sqrt{5}t))\sin(x+2y) + \operatorname{ch}(3t)\cdot\operatorname{ch}(3y) + xz^2 t + \dfrac{xt^3}{3}$.

5.④ $u = -r^2 \sin 3\varphi + 3 + \dfrac{1}{65}\left(r^3 - \dfrac{64}{r^3}\right)\sin 3\varphi - \dfrac{8}{65}\left(r^3 + \dfrac{1}{r^3}\right)\cos 3\varphi$.

6.④ Из теорем Фредгольма вытекает, что таким условием является условие ортогональности функции $f(x)$ **всем** собственным функциям сопряжённого ядра $K^*(x,y)$, т.е. в нашем случае функциям $\sin|x| - \sin x$ и $\sin x$ (отвечающим характеристическим числам $\lambda_1 = \dfrac{1}{4}$ и $\lambda_2 = \dfrac{1}{2}$ соответственно).

Ответ: $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x)(\sin|x| + \sin x)\,dx = 0$, $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x)\sin x\,dx = 0$.

7.④ $$u = \frac{\sin(2\mu_3^{(0)}t)}{2\mu_3^{(0)}} J_0\Big(\frac{\mu_3^{(0)}}{2}r\Big) + \sum_{j=1}^{\infty}\left[\Big(b_j - \frac{a_j}{(2\mu_j^{(6)})^2}\Big)\cos\Big(2\mu_j^{(6)}t\Big) + \frac{a_j}{(2\mu_j^{(6)})^2}\right] J_6\Big(\frac{\mu_j^{(6)}}{2}r\Big)\cos 6\varphi,$$

$f(r) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j J_6\Big(\dfrac{\mu_j^{(6)}}{2}r\Big)$, $g(r) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} b_j J_6\Big(\dfrac{\mu_j^{(6)}}{2}r\Big)$.

8.④ Функция $u_0(x_1,x_2) = \sin(2x_1)\cdot\dfrac{\operatorname{sh}(2x_2)}{\operatorname{sh} 2}$, как решение задачи Дирихле $\Delta u_0 = 0$, $x \in Q$, $u_0|_{x_1=0} = u_0|_{x_1=\pi} = 0$, $u_0|_{x_2=0} = 0$, $u_0|_{x_2=1} = \sin(2x_1)$, реализует $\inf\limits_{u \in M} \iint\limits_Q |\nabla u|^2 dx_1\,dx_2$, $M = \{u \in C^1(\overline{Q})\colon u|_{x_1=0} = u|_{x_1=\pi} = 0,\ u|_{x_2=0} = 0,\ u|_{x_2=1} = \sin(2x_1)\}$. Поэтому требуемое неравенство следует из неравенства $\iint\limits_Q |\nabla u_0|^2 dx_1\,dx_2 = \pi\operatorname{cth} 2 > \pi$.

9.④ $\dfrac{df}{dt} = \dfrac{1}{2}\begin{cases}\cos t, & t > 0\\ -\cos t, & t < 0\end{cases} \Rightarrow \dfrac{d^2 f}{dt^2} = \delta(t) + \dfrac{1}{2}\begin{cases}-\sin t, & t > 0\\ \sin t, & t < 0\end{cases} \Rightarrow \dfrac{d^2 f}{dt^2} + f = \delta(t)$.

$u = \theta(t)Z(t)$, $Z(t) = Ae^{(-2+5i)t} + Be^{(-2-5i)t}$, $Z(0) = 0$, $Z'(0) = 1$. $u = \dfrac{1}{5}\theta(t)e^{-2t}\sin 5t$.

1.④ $\xi = y + 2x$, $\eta = y - x$; $u_{\xi\eta} - u_\xi = 0$; $u(x,y) = f(y+2x)e^{y-x} + g(y-x) = e^{-3x} - 3(y-x)$.

2.④ $u(x,t) = -\dfrac{1}{2}(x+2t) + \begin{cases} \cos(x-2t) - \dfrac{3}{2}(x-2t), & x \geqslant 2t, \\ -\dfrac{1}{2}e^{x-2t} - \dfrac{1}{4}(x-2t)^2 - (x-2t) + \dfrac{3}{2}, & x \leqslant 2t. \end{cases}$

3.⑦ $u(x,t) = v(x,t) + x\,\mathrm{ch}\,t$, $v(x,t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} T_n(t)\cos\left(\frac{1}{2}+n\right)x$; $\pi^2 - x^2 = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n \cos\left(\frac{1}{2}+n\right)x$,

$b_n = \dfrac{32\cdot(-1)^n}{(2n+1)^3\pi}$, $n = 0,1,2,\ldots$; $T_n'(t) = \left(1 - 8\left(n+\dfrac{1}{2}\right)^2\right)T_n(t) + b_n e^{-t}$, $T_n(0) = 0$,
$n = 0,1,2,\ldots$;

$T_0(t) = b_0 t e^{-t}$, $T_n(t) = \dfrac{b_n}{8(n^2+n)}\left(e^{-t} - e^{(1-8(n+1/2)^2)t}\right)$, $n = 1, 2, \ldots$

$$u(x,t) = x\,\mathrm{ch}\,t + \frac{32}{\pi}te^{-t}\cos\frac{x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{\pi(n^2+n)(2n+1)^3}(e^{-t} - e^{-(8n^2+8n+1)t})\cos\left(\frac{1}{2}+n\right)x.$$

4.④ $u(x,y,z,t) = \dfrac{1}{5}(e^{4t} - e^{-t})ye^{-2z} + (y - x^4 - 12tx^2 - 12t^2)e^{-t}\sin z$.

5.④ $u = -2r^3\cos\varphi + 1 + \dfrac{1}{17}\left(-16r^2 + \dfrac{1}{r^2}\right)\cos 2\varphi + \dfrac{8}{65}\left(r^3 + \dfrac{1}{r^3}\right)\cos 3\varphi$.

6.④ Из теорем Фредгольма вытекает, что таким условием является условие ортогональности функции $f(x)$ **всем** собственным функциям сопряжённого ядра $K^*(x,y)$, т.е. в нашем случае функции $\cos x + \dfrac{\pi}{2}\sin x$ (собственная функция, отвечающая характеристическому числу $\lambda = 1$).

Ответ: $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x)\left(\cos x + \frac{\pi}{2}\sin x\right)dx = 0$.

7.④ $u = \dfrac{\sin\left(\mu_5^{(3)}t\right)}{\mu_5^{(3)}} J_3\left(2\mu_5^{(3)}r\right)\sin 3\varphi + \displaystyle\sum_{j=1}^{\infty}\left[\frac{a_j}{4(\mu_j^{(3)})^2} + \left(b_j - \frac{a_j}{4(\mu_j^{(3)})^2}\right)\cos\left(\mu_j^{(3)}t\right)\right] \times$

$\times J_3\left(2\mu_j^{(3)}r\right)\sin 3\varphi$, $\qquad f(r) = \displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} a_j J_3\left(2\mu_j^{(3)}r\right)$, $g(r) = \displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} b_j J_3\left(2\mu_j^{(3)}r\right)$.

8.④ $u(x_1,x_2) = \dfrac{\sin 2x_1}{4}\left(\mathrm{ch}\,2x_2 + \dfrac{1-\mathrm{ch}\,2}{\mathrm{sh}\,2}\mathrm{sh}\,2x_2 - 1\right)$.

9.④ $\dfrac{df}{dt} = \dfrac{1}{2}\begin{cases} \dfrac{1}{1+t^2}, & t>0 \\ -\dfrac{1}{1+t^2}, & t<0 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{d^2f}{dt^2} = \delta(t) + \dfrac{1}{2}\begin{cases} -\dfrac{t}{(1+t^2)^2}, & t>0 \\ \dfrac{t}{(1+t^2)^2}, & t<0 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{d^2f}{dt^2} + \dfrac{|t|}{(1+t^2)^2} = \delta(t).$

$u = \theta(t)Z(t)$, $Z(t) = Ae^{4t} + Be^{-7t}$, $Z(0) = 0$, $Z'(0) = 1$. $u = \dfrac{1}{11}\theta(t)(e^{4t} - e^{-7t})$.

Инструкция
по проверке письменной работы по уравнениям математической физики
2009/2010 учебный год

Задача 1.(4 очка)
Найдены характеристики – 1 очко;
Верно сделана замена переменных – 1 очко;
Найдено общее решение уравнения – 1 очко;
Найдено решение задачи Коши - 1 очко.

Задача 2.(4 очка)
Найдено решение под характеристикой -1 очко;
Найдено решение над характеристикой – 2 очка;
Произведена «склейка» решений - 1 очко.

Задача 3.(7 очков)
Задача сведена к случаю однородных граничных условий - 1 очко;
Найдена система собственных функций 1 очко;
Разложена в ряд Фурье по системе собственных функций требуемая функция - 1 очко;
Решена задача Коши в общем случае – 2 очка;
Решена задача Коши в случае резонанса – 2 очка;
Если при нахождении собственных функций допущена ошибка, то за задачу в целом ставить не более 1 очка;
Если выписаны все случаи, но не решены, то за это поставить 1 очко.

Задача 4.(4 очка)
Найдено частное решение уравнения и поставлена задача Коши для однородного уравнения - 1 очко;
За решение каждой из подзадач для однородного уравнения - по1 очку.

Задача 5.(4 очка)
Найдено частное решение уравнения Пуассона - 1 очко;
Выписано решение в виде конечной суммы -1 очко;
Выписана линейная система для нахождения коэффициентов - 1 очко;
Найдены коэффициенты - 1 очко.

Задача 6.(4 очка)
<u>I. В случае, если студент решает задачу пользуясь теоремами</u> Фредгольма, находя собственные функции сопряженного ядра:
Уравнение сведено к линейной системе - 1 очко;
За каждую собственную функцию сопряженного ядра – по 1 очку;
Выписаны условия ортогональности - 1 очко.

<u>II. Задача решается « в лоб »:</u>
Уравнение сведено к линейной системе - 1 очко;
Найдены условия разрешимости при каждом характеристическом значении λ - по1 очку;
Указано, что при не характеристических значениях λ уравнение разрешимо при любой f(x) – 1 очко.

Задача 7.(4 очка)
Решение правильно разложено по собственным функциям - 1 очко;
Поставлены задачи Коши для функций переменной времени и выписаны формулы для коэффициентов в общем случае - 1 очко;
Решены задачи Коши в общем случае - 1 очко;
Решена задача Коши для особого значения индекса - 1 очко.

Задача 8.(4 очка)
<u>Варианты 1,3</u>
Поставлена соответствующая краевая задача - 1 очко;
Найдена экстремаль -1 очко;
Найдено значение функционала на экстремали и доказано требуемое неравенство -2 очка.
<u>Варианты 2,4</u>
Поставлена соответствующая краевая задача - 1 очко;
Найдено частное решение уравнения Пуассона - 1 очко;
Найдена экстремаль 2 очка.

Задача 9.(4 очка)
Упрощена правая часть уравнения – 2 очка;
Поставлена задача для Z(t) - 1 очко;
Решена задача для Z(t) - 1 очко.

Задача 10.(4 очка) (для ФАЛТ)
Проведено «расщепление» системы на два уравнения – 2 очка;
Найдено общее решение системы – 1 очко;
Решена задача Коши – 1 очко.

При вопросам, возникшим при проверке работ, звонить по тел 8 926 463 29 20 Михайлова Татьяна Валентиновна