ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина: **Уравнения математической физики**

Вариант: 71 **Курс:** 3 **Факультет:** 1,3,5,6,7 **2006-2007 уч. г.**

Фамилия студента ______________________ № группы ________

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

1. (5) Решить задачу Коши и указать наибольшую область, в которой решение определено однозначно:

$$2x^2u_{xx}-3xyu_{xy}+y^2u_{yy}+2xu_x+yu_y=0,$$

$$u\big|_{y=1}=x^3-x,\qquad u_y\big|_{y=1}=3x^3-2x,\qquad 1<x<2.$$

2. (5) Найти решение смешанной задачи:

$$u_{tt}=u_{xx}+3\sin(x+2t),\qquad x>0,\ t>0,$$

$$u\big|_{t=0}=x-\sin x,\qquad u_t\big|_{t=0}=e^x-2\cos x,\qquad x\ge 0,$$

$$(u_x-u)\big|_{x=0}=\sin 2t+\cos t-\cos 2t,\qquad t\ge 0.$$

3. (4) Решить смешанную задачу:

$$u_{tt}=u_{xx}+x^2-\pi x,\qquad 0<x<\pi,\quad t>0,$$

$$u\big|_{t=0}=x,\qquad u_t\big|_{t=0}=-1,\qquad 0\le x\le\pi,$$

$$u\big|_{x=0}=-t,\qquad u\big|_{x=\pi}=\pi-t,\qquad t\ge 0.$$

4. (5) Решить задачу Коши:

$$u_{tt}=\Delta u+[x^2-z^2+x-2y+3z]\cdot e^t,\qquad (x,y,z)\in R^3,\quad t>0,$$

$$u\big|_{t=0}=\sqrt[3]{x-2y+3z},\qquad u_t\big|_{t=0}=x^2yz,\qquad (x,y,z)\in R^3.$$

5. (3) Решить задачу:

$$\Delta u=96x^2,\qquad (u-u_r)\big|_{r=1}=12\sin 2\varphi,\qquad r=\sqrt{x^2+y^2}<1,\quad 0\le\varphi\le 2\pi.$$

6. (5) Найти характеристические числа и собственные функции ядра интегрального уравнения. Решить интегральное уравнение при всех возможных λ:

$$u(x)=\lambda\int_1^2\left(\frac{4}{x^2y^2}-1\right)u(y)\,dy+3x^2-4,\qquad u(x)\in C[1,2].$$

7. (4) Найти решение смешанной задачи:

$$u_t=\Delta u+J_1(r)\sin\varphi,\qquad x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi,\ r<\mu_1^{(1)},\ 0\le\varphi\le 2\pi,\ t>0,$$

$$u\big|_{t=0}=J_1(r)\cos 2\varphi,\qquad r\le\mu_1^{(1)},\ 0\le\varphi\le 2\pi,$$

$$u\big|_{r=\mu_1^{(1)}}=0,\qquad 0\le\varphi\le 2\pi,\ t\ge 0,$$

где $\mu_1^{(1)}$ – минимальный положительный корень функции Бесселя $J_1(r)$.

Заказ - Тираж – 200

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина: **Уравнения математической физики**

Вариант: **72** **Курс:** **3** **Факультет:** **1,3,5,6,7** **2006-2007 уч. г.**

Фамилия студента Виноградов Павел № группы 465 гр.

Сумма баллов	23+1=24
Фамилия проверяющего	[illegible]

Оценка	отл. –
Фамилия экзаменатора	[illegible]

4 **1.** (6) Решить задачу Коши и указать наибольшую область, в которой решение определено однозначно:

$$u_{yy} + x^2 u_{xy} - (x^2+1) u_{xx} + \frac{2x}{x^2+2}(u_y - u_x) = 0,$$

$$u\big|_{x=0} = y^2 + 1, \quad u_x\big|_{x=0} = 2y + 4, \quad 0 < y < 2.$$

4+1 **2.** (5) Найти решение смешанной задачи:

$$u_{tt} = u_{xx} + 3\sin(2x+t), \qquad x > 0,\ t > 0,$$

$$u\big|_{t=0} = \cos x + \sin 2x, \quad u_t\big|_{t=0} = 1 + \cos 2x, \qquad x \ge 0,$$

$$(u_x - u)\big|_{x=0} = -1 - 2\sin t + 2\cos t, \qquad t \ge 0.$$

4 **3.** (4) Решить смешанную задачу:

$$u_t = u_{xx} + 2x, \qquad 0 < x < \pi,\ t > 0,$$

$$u\big|_{t=0} = 0, \qquad 0 \le x \le \pi,$$

$$u_x\big|_{x=0} = t, \quad u_x\big|_{x=\pi} = t, \qquad t \ge 0.$$

1 **4.** (5) Решить задачу Коши:

$$u_t = 0.5\Delta u + ch t \cdot e^{-5z} \cdot \cos(3x+4y), \qquad (x,y,z) \in R^3,\ t > 0,$$

$$u\big|_{t=0} = (x+y)\cdot\cos(x+z), \qquad (x,y,z) \in R^3.$$

3 **5.** (3) Решить задачу:

$$\Delta u = 24x, \quad (2u + u_r)\big|_{r=1} = 20\sin^3\varphi, \quad r = \sqrt{x^2+y^2} < 1,\ 0 \le \varphi \le 2\pi.$$

3 **6.** (5) Найти характеристические числа и собственные функции ядра интегрального уравнения. Решить интегральное уравнение при всех возможных λ:

$$u(x) = \lambda \int_0^1 (2\sqrt{xy} - 1) u(y)\,dy + 10x - 9, \qquad u(x) \in C[0,1].$$

4 **7.** (4) Найти решение смешанной задачи:

$$u_t = 4\Delta u - t J_3(r)\cos 3\varphi, \qquad x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ r < \mu_1^{(3)},\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ t > 0,$$

$$u\big|_{t=0} = \frac{1}{16} J_3(r)\cos 3\varphi + J_2\left(\frac{\mu_1^{(2)}}{\mu_1^{(3)}} r\right)\sin 2\varphi, \qquad r \le \mu_1^{(3)},\ 0 \le \varphi \le 2\pi,$$

$$u\big|_{r=\mu_1^{(3)}} = 0, \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi,\ t \ge 0,$$

где $\mu_1^{(2)} > 0$, $\mu_1^{(3)} > 0$ – корни функций Бесселя $J_2(r)$ и $J_3(r)$ соответственно.

Заказ - Тираж – 200

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина: **Уравнения математической физики**

Вариант: 73 **Курс:** 3 **Факультет:** 1,3,5,6,7 **2006-2007 уч. г.**

Фамилия студента № группы

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

1. (6) Решить задачу Коши и указать наибольшую область, в которой решение определено однозначно:

$$x u_{xx} + x^3 u_{xy} - 2x^5 u_{yy} - 2u_x = 0,$$

$$u\big|_{x=1} = 3y^2 + y + 1, \quad u_x\big|_{x=1} = 6y + 4, \quad -1 < y < 1.$$

2. (5) Найти решение смешанной задачи:

$$u_{tt} = 4u_{xx} + 3\cos(x+t), \qquad x > 0,\ t > 0,$$

$$u\big|_{t=0} = 1 + \cos x, \quad u_t\big|_{t=0} = \sin x, \qquad x \ge 0,$$

$$(u_x - u)\big|_{x=0} = 2t - 1 - \sin t - \cos t, \qquad t \ge 0.$$

3. (4) Решить смешанную задачу:

$$u_{tt} = u_{xx} + (0.5\pi - 5x)\cdot\cos 2t, \qquad 0 < x < \pi/2, \quad t > 0,$$

$$u\big|_{t=0} = x, \quad u_t\big|_{t=0} = 0, \qquad 0 \le x \le \pi/2,$$

$$u_x\big|_{x=0} = \cos 2t, \quad u\big|_{x=\pi/2} = 0.5\pi\cdot\cos 2t, \qquad t \ge 0.$$

4. (5) Решить задачу Коши:

$$u_{tt} = (1/3)\cdot\Delta u + 5\cos(x+y+5z)\cdot\sin 2t, \qquad (x,y,z)\in R^3, \quad t > 0,$$

$$u\big|_{t=0} = e^{(x+y+z)^3}, \quad u_t\big|_{t=0} = 8\cos(x+y+5z) + xyz^3, \qquad (x,y,z)\in R^3.$$

5. (3) Решить задачу:

$$\Delta u = 96y^2, \qquad (u + u_r)\big|_{r=1} = 20\sin 2\varphi, \qquad r = \sqrt{x^2+y^2} < 1, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi.$$

6. (5) Найти характеристические числа и собственные функции ядра интегрального уравнения. Решить интегральное уравнение при всех возможных λ:

$$u(x) = \lambda \int_{1/2}^{1} \left(\frac{3x^2}{y^2} - 8\right) u(y)\,dy - 6x^2 + 7, \qquad u(x) \in C[1/2,1].$$

7. (4) Найти решение смешанной задачи:

$$u_t = \Delta u + J_1(r)\cos 2\varphi, \qquad x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ r < \mu_1^{(1)},\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ t > 0,$$

$$u\big|_{t=0} = J_1(r)\sin\varphi, \qquad r \le \mu_1^{(1)},\ 0 \le \varphi \le 2\pi,$$

$$u\big|_{r=\mu_1^{(1)}} = 0, \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi,\ t \ge 0,$$

где $\mu_1^{(1)}$ – минимальный положительный корень функции Бесселя $J_1(r)$.

Заказ -

Тираж – 200

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина: **Уравнения математической физики**

Вариант: 74 **Курс:** 3 **Факультет:** 1,3,5,6,7 **2006-2007 уч. г.**

Фамилия студента № группы

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

1. (6) Решить задачу Коши и указать наибольшую область, в которой решение определено однозначно:

$$y^4u_{yy}+y^2u_{xy}-2u_{xx}+2y^3u_y=0,$$

$$u\big|_{y=1}=x^2+5,\quad u_y\big|_{y=1}=2x-6,\quad 1<x<2.$$

2. (5) Найти решение смешанной задачи:

$$4u_{tt}=u_{xx}-3\sin(x+t),\qquad x>0,\ t>0,$$

$$u\big|_{t=0}=\sin x+\sin 2x,\quad u_t\big|_{t=0}=2+\cos x,\qquad x\ge 0,$$

$$(u_x-2u)\big|_{x=0}=2-4t-2\sin t+\cos t,\qquad t\ge 0.$$

3. (4) Решить смешанную задачу:

$$u_t=u_{xx}+1+x,\qquad 0<x<\pi/2,\quad t>0,$$

$$u\big|_{t=0}=\pi x,\qquad 0\le x\le \pi/2,$$

$$u\big|_{x=0}=t,\quad u_x\big|_{x=\pi/2}=\pi,\qquad t\ge 0.$$

4. (5) Решить задачу Коши:

$$u_t=0.25\,\Delta u+(x^2+7x+2y^2-3z^2+11)\cdot t,\qquad (x,y,z)\in R^3,\quad t>0,$$

$$u\big|_{t=0}=x^3e^{-y^2}\sin 2z,\qquad (x,y,z)\in R^3.$$

5. (3) Решить задачу:

$$\Delta u=24y,\qquad (u+u_r)\big|_{r=1}=16\cos^3\varphi,\qquad r=\sqrt{x^2+y^2}<1,\quad 0\le\varphi\le 2\pi.$$

6. (5) Найти характеристические числа и собственные функции ядра интегрального уравнения. Решить интегральное уравнение при всех возможных λ:

$$u(x)=\lambda\int_0^{\ln 2}\left(\frac{2}{3}e^{3x-y}-3e^{y}\right)u(y)\,dy+4e^{3x}-18,\qquad u(x)\in C[0,\ln 2].$$

7. (4) Найти решение смешанной задачи:

$$u_t=9\,\Delta u-t\,J_2(r)\sin 2\varphi+J_4\left(\frac{\mu_1^{(4)}}{\mu_1^{(2)}}r\right)\cos 4\varphi,\qquad x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi,\quad r<\mu_1^{(2)},\ 0\le\varphi\le 2\pi,\ t>0,$$

$$u\big|_{t=0}=\frac{1}{81}J_2(r)\sin 2\varphi,\qquad r\le\mu_1^{(2)},\ 0\le\varphi\le 2\pi,$$

$$u\big|_{r=\mu_1^{(2)}}=0,\qquad 0\le\varphi\le 2\pi,\ t\ge 0,$$

где $\mu_1^{(2)}>0$, $\mu_1^{(4)}>0$ – корни функций Бесселя $J_2(r)$ и $J_4(r)$ соответственно.

Заказ - Тираж – 200

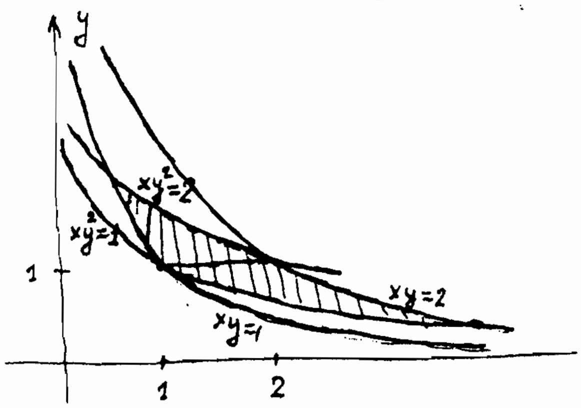
1. Характеристики: $xy^2 = C_1, \quad xy = C_2$.

Замена: $\xi = xy^2, \quad \eta = xy$.

Уравнение $x^2y^3v_{\xi\eta} = 0$.

Решение: $u(x,y) = -xy^2 + x^3y^3$,

Область: $1 < xy^2 < 2,\ 1 < xy < 2$.



2. Частное решение: $w(t,x) = -\sin(x+2t)$.

$$u(t,x) = 0.5\cdot(x+t+e^{x+t}) - \sin(x+2t) +$$

$$+\begin{cases} 0.5\cdot(x-t-e^{x-t}), & x-t\ge 0 \\ 1-e^{x-t}+0.5\cdot\big(x-t+\sin(x-t)-\cos(x-t)\big), & x-t<0 \end{cases}$$

3. $u(t,x) = v(t,x) + (x-t), \qquad \lambda_n = n^2, \quad X_n(x) = \sin nx, \quad n = 1,2,...$

$$T_n(t) = a_n(1-\cos nt)/n^2, \quad a_n = \frac{4\cdot[(-1)^n - 1]}{\pi n^3}, \quad u(t,x) = x - t + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^2}(1-\cos nt)\sin nx.$$

4. $u(t,x,y,z) = v_1 + v_2 + v_3, \qquad v_1(t,x,y,z) = (e^t - t - 1)\cdot(x^2 - z^2 + x - 2y + 3z)$

$v_2(t,x,y,z) = tx^2yz + t^3zy/3$,

$v_3(t,x,y,z) = 0.5\cdot[{}^3\ x - 2y + 3z + \ \ 14t + {}^3\ x - 2y + 3z - \ \ 14t]$

5. Частное решение: $\tilde{u}(r,\varphi) = 3r^4 + 4r^4\cos 2\varphi$

$u(r,\varphi) = (3r^4 + 4r^4\cos 2\varphi) + [9 - 12\ \ 2r^2\cos(2\varphi - \pi/4)]$.

6. $\lambda_1 = -3, \quad \varphi_1(x) = 4/x^2 - 3$, уравнение не имеет решения,

$\lambda_2 = +2, \quad \varphi_2(x) = 1/x^2 - 1/3$, уравнение имеет решение $u(x) = \varphi_2(x)\cdot C + 3x^2 - 6$,

$\lambda \ne -3, \lambda \ne +2$, решение уравнения $u(x) = \dfrac{12\lambda}{\lambda+3}\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{9\lambda}{\lambda+3} + 3x^2 - 4$,

7а. $u(t,r,\varphi) = (1-e^{-t})J_1(r)\sin\varphi + \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k \exp\left[-\left(\mu_k^{(2)}/\mu_1^{(1)}\right)^2 t\right] J_2\left(\mu_k^{(2)} r/\mu_1^{(1)}\right)\cos 2\varphi$,

$$b_k = c_k/d_k, \quad c_k = \int_0^{\mu_1^{(1)}} rJ_1(r)J_2(\mu_k^{(2)} r/\mu_1^{(1)})\,dr, \quad d_k = \frac{\left(\mu_1^{(1)}\right)^2}{2}\left[J_2'(\mu_k^{(2)})\right]^2$$

7б. $u(x) = -\ln x + 2\ln 2\cdot\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)$.

7 в. $$u(x,t) = -2\frac{\partial\mathcal{E}(x,t)}{\partial t} = \left[\frac{1}{t} - \frac{x^2}{2t^2}\right]\mathcal{E}(x,t) - 2\delta(x,t), \quad \mathcal{E}(x,t) = \frac{\theta(t)}{2\sqrt{\pi t}}\,e^{-\frac{x^2}{4t}}.$$

Инструкция по проверке экзаменационной контрольной работы по уравнениям математической физики (3 курс, 2 семестр, 2006/2007 уч. г.)

Общая часть.

За арифметическую ошибку, не влияющую существенно на результат решения задачи и не упрощающую решение задачи, снимать 1 очко.

Оценка отдельных задач.

1. (5) Найдены характеристики уравнения — 1 очко.
Правильно сделана замена переменных и получено уравнение в новых переменных — 2 очка.
Найдено решение уравнения — 1 очко.
Указана область однозначности решения (аналитически или графически, но с четким указанием линий — 1 очко.

2. (5) Сведено к задаче с однородным уравнением — 1 очко.
Найдено решение при $x > at$ — 2 очка.
Найдено решение при $x \le at$ — 1 очко.
Проведена сшивка на характеристике — 1 очко.

3. (4) Сведено к задаче с однородными краевыми условиями — 1 очко.
Выписана задача Штурма-Лиувилля и получены все собственные функции — 1 очко.
Проведено разложение функции по собственным функциям — 1 очко.
Поставлены и решены задачи Коши для всех коэффициентов — 1 очко.

4. (5) Проведено разумное расщепление задачи на простые подзадачи — 1 очко.
Найдено решение подзадачи — 1 очко (за каждую).

5. (3) Сведено к задаче с однородным уравнением — 1 очко.
Найдено решение задачи с однородным уравнением — 2 очка.

6 (5). Правильно найдены характеристические числа — 1 очко.
Правильно найдены собственные функции — 1 очко за каждую функцию.
Найдено решение уравнения при λ, равном характеристическому числу — 1 очко.
Найдено решение уравнения при λ, не равном характеристическому числу — 1 очко.

7а. (4) Правильно проведено разложение функции по функциям Бесселя — 2 очка.
Правильно поставлены все задачи Коши — 1 очко.
Правильно решены все задачи Коши — 1 очко.

7б. (4) Правильно сформулирована краевая задача — 1 очко.
Правильно решена краевая задача — 2 очка.

7в. (4) Произведение $t^{m-1}\delta^{(m)}$ сведено к первой производной от $\delta(t)$ или $x^m\delta^{(m)}$ сведено к $\delta(x)$ — 1 очко.

Использовано правило дифференцирования прямого произведения $\frac{\partial\delta(t)}{\partial t}\cdot\delta(x)=\frac{\partial}{\partial t}\left[\delta(t)\cdot\delta(x)\right]$, а также свойство $\delta(t)\cdot\delta(x)=\delta(x,t)$ — 1 очко.

Указан вид обобщенного решения через свертку $\left[\dfrac{\partial\delta(x,t)}{\partial t}\right] * \varepsilon(x,t)$ — 1 очко.