Московский физико-технический институт
(государственный университет)

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина: $\boxed{\textbf{Математический анализ}}$ **Год: 1999/2000**

Вариант: $\boxed{\mathbf{1}}$ **Курс:** $\boxed{\mathbf{1}}$ **Семестр:** $\boxed{\textbf{весенний}}$

---

1. Пусть $z(x,y)$ — дифференцируемая функция, заданная уравнением $z^3 + xz + y^2 = 0$ и принимающая в точке $x = -2$, $y = 1$ значение $z = 1$. Найти $dz(-2;1)$, $d^2z(-2;1)$.

---

2. Найти объём тела, образованного при вращении вокруг оси Oy фигуры $\dfrac{3\pi}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{5\pi}{2}$, $0 \leqslant y \leqslant \cos x$.

---

3. Разложить по степеням x функцию
$$f(x) = \arcsin\frac{2x}{\sqrt{1+4x^2}} + x\int_0^x \frac{\ln(1+t^2)}{t}\,dt$$
и найти радиус сходимости полученного ряда.

---

4. Исследовать на сходимость ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^2\cdot 4^2\cdot 7^2\cdot\ldots\cdot(3n+1)^2}{(2n)!}\operatorname{arctg}\frac{1}{2^n}$.

Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множествах $(0;1)$ и $(1;+\infty)$:

---

5. последовательность $\displaystyle f_n(x) = \frac{\sqrt{1+n^2x}}{xn}$;

---

6. ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{nx}}{x+n}\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)$.

---

7. Исследовать на сходимость интеграл $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\arcsin\frac{1}{(x+1)^2}}{\ln^{\alpha}(x+1)}\,dx$.

---

8. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость интеграл
$$\int\limits_1^{+\infty} x\cos(x^2\ln x)\,dx.$$

---

9. Исследовать на дифференцируемость в точке $(0,0)$ функцию
$$f(x,y) = \frac{x\ln(1+y) - y\ln(1+x) + \frac{xy}{2}(y-x)}{(x^2+y^2)^{3/2}},\ x^2+y^2\neq 0;\ f(0,0)=0.$$

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина: **Математический анализ** **Год: 1999/2000**

Вариант: **2** **Курс:** **1** **Семестр:** **весенний**

---

1. Пусть $z(x,y)$ — дифференцируемая функция, заданная уравнением $x+z=e^{yz}$ и принимающая в точке $x=0$, $y=0$ значение $z=1$. Найти $dz(0;0)$, $d^2z(0;0)$.

---

2. Найти длину дуги кривой $y=\ln\cos x$, $\dfrac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{4}$.

---

3. Разложить по степеням x функцию
$$f(x)=\operatorname{arctg}\frac{3x+1}{3x-1}+x\int_0^x\frac{1-\cos t}{t}\,dt$$
и найти радиус сходимости полученного ряда.

---

4. Исследовать на сходимость ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty}2^n\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}.$$

Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множествах $(0;1)$ и $(1;+\infty)$:

---

5. последовательность $f_n(x)=x\,\operatorname{arcctg}\dfrac{x}{n^2}$;

---

6. ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{nx}}{1+nx}\sin\frac{1}{xn}$.

---

7. Исследовать на сходимость интеграл $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty}\frac{\ln^{\alpha}(\operatorname{ch}x)\,dx}{x^{\alpha}(1+x^2)}$.

---

8. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость интеграл
$$\int\limits_1^{+\infty}x^{3/2}\sin(x^3-2x)\,dx.$$

---

9. Исследовать на дифференцируемость в точке $(0,0)$ функцию
$$f(x,y)=\frac{x\operatorname{sh}y-y\operatorname{sh}x+\frac{xy}{6}(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^{5/2}},\quad x^2+y^2\neq0;\ f(0,0)=0.$$

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина: **Математический анализ** **Год: 1999/2000**

Вариант: **3** **Курс:** **1** **Семестр:** **весенний**

---

1. Пусть $z(x,y)$ — дифференцируемая функция, заданная уравнением $z^3+2yz+xy=0$ и принимающая в точке $x=1$, $y=-1$ значение $z=-1$. Найти $dz(1;-1)$, $d^2z(1;-1)$.

---

2. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox кривой $y=e^x$, $0\leqslant x\leqslant a$.

---

3. Разложить по степеням x функцию
$$f(x)=\arccos\frac{x^2}{\sqrt{1+x^4}}+x\int_0^x\frac{\operatorname{sh}t^2}{t}\,dt$$
и найти радиус сходимости полученного ряда.

---

4. Исследовать на сходимость ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^2\cdot5^2\cdot8^2\cdot\ldots\cdot(3n+2)^2}{(2n+1)!}\sin\frac{1}{3^n}$.

Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множествах $(0;1)$ и $(1;+\infty)$:

---

5. последовательность $\displaystyle f_n(x)=\frac{x\ln(1+e^{n/x})}{n}$;

---

6. ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{xn}{x^2+n^2}\operatorname{arctg}\frac{x}{n}$.

---

7. Исследовать на сходимость интеграл $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty}\frac{\ln^\alpha(e^x-x)}{x^{2\alpha}(\sqrt{x}+1)}\,dx$.

---

8. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость интеграл
$$\int\limits_1^{+\infty}\cos(x^{3/2}-\ln x)\,dx.$$

---

9. Исследовать на дифференцируемость в точке $(0,0)$ функцию
$$f(x,y)=\frac{x\operatorname{arctg}y-y\operatorname{arctg}x+\frac{xy}{3}(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^{5/2}},\ x^2+y^2\neq0;\ f(0,0)=0.$$

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина: $\boxed{\textbf{Математический анализ}}$ **Год: 1999/2000**

Вариант: $\boxed{4}$ **Курс:** $\boxed{1}$ **Семестр:** $\boxed{\textbf{весенний}}$

---

1. Пусть $z(x,y)$ — дифференцируемая функция, заданная уравнением $y - z = e^{xz}$ и принимающая в точке $x = 1$, $y = 1$ значение $z = 0$. Найти $dz(1;1)$, $d^2z(1;1)$.

---

2. Найти длину дуги кривой $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, от точки $(a;0)$ до точки $(-a;0)$.

---

3. Разложить по степеням x функцию
$$f(x) = \ln(x + \sqrt{3 + x^2}) + x\int_0^x \frac{e^{-t^2} - 1}{t}\,dt$$
и найти радиус сходимости полученного ряда.

---

4. Исследовать на сходимость ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}\left(\frac{n+2}{n}\right)^{n^2}$.

Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множествах $(0;1)$ и $(1;+\infty)$:

---

5. последовательность $\qquad f_n(x) = \dfrac{\operatorname{arctg} n^2 x}{x}$;

---

6. ряд $\qquad \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1 + n^2x^2}\ln\left(1 + \frac{1}{nx}\right)$.

---

7. Исследовать на сходимость интеграл $\qquad \displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha}\operatorname{arctg}^{\alpha}\left(\frac{x}{1+x^2}\right)}{1 + x^2}\,dx$.

---

8. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость интеграл
$$\int\limits_1^{+\infty} x\sin(\sqrt{x^5} - 1)\,dx.$$

---

9. Исследовать на дифференцируемость в точке $(0,0)$ функцию
$$f(x,y) = \frac{xe^y - ye^x + y - x + \frac{xy}{2}(x - y)}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \quad x^2 + y^2 \neq 0;\ f(0,0) = 0.$$

Ответы к контрольной работе по математическому анализу
1 курс, 2 семестр, 1999/2000 уч.г.

Вариант 01

1. $dz(-2;1;1) = -dx - 2dy$; $\quad d^2z(-2;1;1) = -4dx^2 - 20\,dx\,dy - 26\,dy^2$.

2. $V = 8\pi^2$. $\quad \left(V = 2\pi \int\limits_{3\pi/2}^{5\pi/2} x\cos x\,dx\right)$.

3. $f(x) = 2x + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{2^{2n+1}}{2n+1} - \frac{1}{2n^2}\right] x^{2n+1}$, $R = \frac{1}{2}$.
$$\left(\begin{array}{ll} f_1(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot 2^{2n+1} \cdot x^{2n+1}, & R_1 = \frac{1}{2}, \\ f_2(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n^2} \cdot x^{2n+1}, & R_2 = 1. \end{array}\right)$$

4. Ряд расходится. $\quad \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \sim \frac{9}{8}\right)$.

5. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, на E_1 последовательность сходится неравномерно, на E_2 — равномерно.

6. Ряд сходится: на E_1 — равномерно, на E_2 — неравномерно.

7. Интеграл сходится при $1 < \alpha < 2$.
$$\left(\begin{array}{ll} \text{При } x \to 0 & f(x) \sim \frac{C}{x^{\alpha-1}} \Rightarrow \alpha < 2, \\ \text{при } x \to \infty & f(x) \sim \frac{1}{x \ln^\alpha x} \Rightarrow \alpha > 1. \end{array}\right)$$

8. Интеграл сходится условно.

9. Функция недифференцируема в т. $(0;0)$.

Ответы к контрольной работе по математическому анализу 1 курс, 2 семестр, 1999/2000 уч.г.

Вариант 02

1. $dz(0;0;1) = dy - dx$; $\quad d^2z(0;0;1) = -2\,dx\,dy + 3\,dy^2$.

2. $l = \ln \dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}}$. $\qquad \left(l = \int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}\,dx\right)$.

3. $f(x) = -\frac{\pi}{4} - 3x + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left[\dfrac{3^{2n+1}}{2n+1} + \dfrac{1}{2n\cdot(2n)!}\right]x^{2n+1}$, $R = \dfrac{1}{3}$.
$$\left(\begin{array}{ll} f_1(x) = -\frac{\pi}{4} + \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{3^{2n+1}}{2n+1}\cdot x^{2n+1}, & R_1 = \frac{1}{3}, \\ f_2(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{2n\cdot(2n)!}x^{2n+1}, & R_2 = \infty. \end{array}\right)$$

4. Ряд сходится. $\quad \left(\sqrt[n]{a_n} \to \dfrac{2}{e}\right)$.

5. $f(x) = \frac{\pi}{2}x$, на E_1 последовательность сходится равномерно, на E_2 — неравномерно.

6. Ряд сходится: на E_1 — неравномерно, на E_2 — равномерно.

7. Интеграл сходится при $\alpha > -1$.
$$\left(\begin{array}{lll} \text{При } x \to 0 & f(x) \sim \dfrac{1}{x^{-\alpha}} \Rightarrow \alpha > -1, \\ \text{при } x \to \infty & f(x) \sim 1. \end{array}\right)$$

8. Интеграл сходится условно.

9. Функция недифференцируема в т. $(0;0)$.

Ответы к контрольной работе по математическому анализу
1 курс, 2 семестр, 1999/2000 уч.г.

Вариант 03

1. $dz(1;-1;-1) = dx + dy$; $\quad d^2z(1;-1;-1) = 6\,dx^2 + 6\,dx\,dy + 2\,dy^2$.

2. $S = \pi\left[\ln(e^a + \sqrt{1+e^{2a}}) + e^a\sqrt{1+e^{2a}} - \ln(1+\sqrt{2}) - \sqrt{2}\right]$.
   $(S = 2\pi\int\limits_0^a e^x\sqrt{1+e^{2x}}\,dx)$.

3. $f(x) = \frac{\pi}{2} + \sum\limits_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^{n+1}\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)!(4n+1)}\right]x^{4n+2}$, $\quad R = 1$.
   $$\left(\begin{array}{ll} f_1(x) = \frac{\pi}{2} + \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{4n+2}\cdot x^{4n+2}, & R_1 = 1, \\ f_2(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!(4n+1)}\,x^{4n+2}, & R_2 = \infty. \end{array}\right)$$

4. Ряд сходится. $\quad\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \sim \frac{3}{4}\right)$.

5. $f(x) \equiv 1$, на E_1 последовательность сходится равномерно, на E_2 — неравномерно.

6. Ряд сходится: на E_1 — равномерно, на E_2 — неравномерно.

7. Интеграл сходится при $\alpha > \frac{1}{2}$.
   $$\left(\begin{array}{ll} \text{При } x \to 0 & f(x) \sim 1, \\ \text{при } x \to \infty & f(x) \sim \frac{1}{x^{\alpha+1/2}} \Rightarrow \alpha > \frac{1}{2}. \end{array}\right)$$

8. Интеграл сходится условно.

9. Функция недифференцируема в т. $(0;0)$.

Ответы к контрольной работе по математическому анализу
1 курс, 2 семестр, 1999/2000 уч.г.

Вариант 04

1. $dz(1;1;0) = \frac{1}{2}\,dy\,;\quad d^2z(1;1;0) = -\frac{1}{2}\,dx\,dy - \frac{1}{8}\,dy^2\,.$

2. $l = 3a\,.\qquad \left(l = 3a\int\limits_0^\pi |\sin t\cos t|\,dt\right).$

3. $$f(x) = \ln\sqrt{3} + \frac{x}{\sqrt{3}} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[C^n_{-1/2}\,\frac{1}{3^{n+1/2}}\,\frac{1}{2n+1} + \frac{(-1)^n}{n!}\cdot\frac{1}{2n}\right]x^{2n+1}\,,$$
$R = \sqrt{3}\,.$
$$\left(\begin{array}{ll} f_1(x) = \ln\sqrt{3} + \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\sum\limits_{n=1}^{\infty} C^n_{-1/2}\,\frac{1}{3^n}\cdot\frac{1}{2n+1}\cdot x^{2n+1}, & R_1 = \sqrt{3}, \\ f_2(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\,\frac{1}{2n}\,x^{2n+1}, & R_2 = \infty. \end{array}\right)$$

4. Ряд расходится. $\left(\sqrt[n]{a_n} \to \frac{e^2}{3}\right).$

5. $f(x) = \frac{\pi}{2x}$, на E_1 последовательность сходится неравномерно, на E_2 — равномерно.

6. Ряд сходится: на E_1 — неравномерно, на E_2 — равномерно.

7. Интеграл сходится при $\alpha > -\frac{1}{2}$.
$$\left(\begin{array}{ll} \text{При } x \to 0 & f(x) \sim \frac{1}{x^{-2\alpha}} \Rightarrow \alpha > -\frac{1}{2}, \\ \text{при } x \to \infty & f(x) \sim \frac{1}{x^2}\,. \end{array}\right)$$

8. Интеграл сходится условно.

9. Функция недифференцируема в т. $(0;0)$.

ИНСТРУКЦИЯ

по проведению экзаменационной контрольной работы
по математическому анализу
(1 курс, 2 семестр, 1999/2000 уч.г.)

Общая часть

Каждый проверяющий к началу устного экзамена 2 июня должен представить данные о количестве студентов, набравших 0, 1, ..., 48 очков и очки по каждой задаче в отдельности на специальном бланке. На каждой контрольной работе проставляется общее количество очков, а также очки за каждую задачу (около данной задачи). Фамилия проверявшего преподавателя должна быть чётко выписана на каждой работе.

За арифметическую ошибку, не влияющую существенно на ход решения, снимать не более 1 очка.

Указания по отдельным задачам

1 ④	Правильно найден первый дифференциал	—	2 очка,
	Правильно найден второй дифференциал	—	2 очка.
2 ⑤	Правильно написан интеграл	—	1 очко.
3 ⑥	Получено разложение первого слагаемого	—	2 очка,
	Получено разложение второго слагаемого	—	2 очка,
	Получено разложение функции	—	1 очко,
	Найден радиус сходимости	—	1 очко.
4 ④	Установлено, какой признак сходимости нужно применить	—	1 очко.
5 ⑤	Доказана сходимость и найдена предельная функция .	—	1 очко,
	Доказана равномерная сходимость	—	2 очка,
	Доказано отсутствие равномерной сходимости	—	2 очка.
6 ⑤	Доказана сходимость ряда	—	1 очко,
	Доказана равномерная сходимость	—	2 очка,
	Доказано отсутствие равномерной сходимости	—	2 очка.
7 ④	Исследована особенность в нуле	—	2 очка,
	Исследована особенность на бесконечности	—	2 очка.
8 ⑤	Доказана сходимость	—	3 очка.
	Доказано отсутствие абсолютной сходимости	—	2 очка.
9 ⑤	Найдены первые производные в $(0; 0)$	—	1 очко,
	Записано условие дифференцируемости	—	1 очко.

Заказ Тираж 50 экз. МФТИ-2000