Семестровая контрольная работа по ТФКП
1 семестр 2005/2006 уч.г.

№ группы	**Фамилия студента**	**Сумма баллов**	**Оценка**	**Подпись препод.**

1.④ Разложить в ряд Лорана по степеням $(z-3)$ функцию

$$f(z)=\frac{2z+i}{(z+2i)^2}+\frac{z+8+6i}{z^2+2z(i-2)-8i}$$

в кольце, которому принадлежит точка $z=0$. Найти радиусы кольца сходимости.

2.⑤ Найти все особые точки функции

$$f(z)=\frac{\operatorname{Cos}^2\left(\frac{\pi}{iz-z^2}\right)}{\left(e^{\frac{2\pi}{z}}-1\right)^3},$$

определить их тип. Ответ обосновать.

Применяя теорию вычетов, вычислить интегралы **3, 4, 5**:

3.④ $\displaystyle\oint\limits_{|z-i|=1}\frac{e^{iz}}{\operatorname{ch}^2 z}\,dz\,.$

4.④ $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{(6x-1)\operatorname{Sin}(1-2x)}{4x^2+4x+5}\,dx\,.$

5.⑥ $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\ln(x-1)\cdot\sqrt{x-1}}{x^2}\,dx\,.$

6.⑦ Пусть $f(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\operatorname{Ln}\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)$ в области $G=\{z\mid |z|>1\}$ такая, что $f(\infty)=0$. Доказать, что многозначная функция $\sqrt{f(z)+4i}$ распадается в G на регулярные ветви.

Пусть $g(z)$ — регулярная ветвь функции $\sqrt{f(z)+4i}$ в G такая, что $g(\infty)=-\sqrt{2}(i+1)$. Вычислить интеграл

$$J=\oint\limits_{|z|=2}\frac{dz}{g(z)}.$$

Заказ – Тираж - 300 МФТИ - 51

Семестровая контрольная работа по ТФКП
1 семестр 2005/2006 уч.г.

№ группы	**Фамилия студента**	**Сумма баллов**	**Оценка**	**Подпись препод.**

1.④ Разложить в ряд Лорана по степеням $(z-1-i)$ функцию

$$f(z)=\frac{z+2}{(z-1)^2}-\frac{i+z(1-4i)}{z^2-z(1+3i)+3i}$$

в кольце, которому принадлежит точка $z=0$. Найти радиусы кольца сходимости.

2.⑤ Найти все особые точки функции

$$f(z)=\frac{\operatorname{Sh}^3\left(\frac{6\pi}{z+iz^2}\right)}{(1-\operatorname{Ch}2\pi z)^2},$$

определить их тип. Ответ обосновать.

Применяя теорию вычетов, вычислить интегралы **3, 4, 5**:

3.④ $\displaystyle\oint\limits_{|z-1|=1}\frac{e^{-iz}}{\operatorname{Cos}^2 z}\,dz\,.$

4.④ $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{(5-12x)\operatorname{Cos}(2-6x)}{9x^2+6x+10}\,dx\,.$

5.⑥ $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}(x^2+1)}\,dx\,.$

6.⑦ Пусть $f(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\sqrt{\dfrac{z-4}{z+4}}$ в области $G=\{z\mid |z|>4\}$ такая, что $f(\infty)=-1$. Доказать, что многозначная функция $\operatorname{Ln}(f(z)-1)$ распадается в G на регулярные ветви.

Пусть $g(z)$ — регулярная ветвь функции $\operatorname{Ln}(f(z)-1)$ в G такая, что $g(\infty)=\ln 2+i\pi$. Вычислить интеграл

$$J=\oint\limits_{|z|=5}\frac{dz}{g(z)}.$$

Заказ - Тираж - 300 МФТИ - 52

Семестровая контрольная работа по ТФКП
1 семестр 2005/2006 уч.г.

№ группы	**Фамилия студента**	**Сумма баллов**	**Оценка**	**Подпись препод.**

1.④ Разложить в ряд Лорана по степеням $(z+2-i)$ функцию

$$f(z) = \frac{2z-i}{(z-i)^2} - \frac{z+4+i}{z^2+z(2-i)-2i}$$

в кольце, которому принадлежит точка $z=-1$. Найти радиусы кольца сходимости.

2.⑤ Найти все особые точки функции

$$f(z) = \frac{\operatorname{Sin}^2\left(\frac{\pi}{2z^2+z}\right)}{\left(e^{\frac{i\pi}{2z}}-i\right)^3},$$

определить их тип. Ответ обосновать.

Применяя теорию вычетов, вычислить интегралы **3, 4, 5**:

3.④ $$\oint\limits_{|z-3i|=1} \frac{(z+i)^2}{\operatorname{Sh}^2 z}\,dz.$$

4.④ $$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(20x+3)\operatorname{Sin}(1-12x)}{16x^2+16x+5}\,dx.$$

5.⑥ $$\int_{-\infty}^{1} \frac{\ln(1-x)\cdot\sqrt{1-x}}{x^2-4x+4}\,dx.$$

6.⑦ Пусть $f(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\operatorname{Ln}\left(\dfrac{2-z}{2+z}\right)$ в области $G=\{z \mid |z|>2\}$ такая, что $f(\infty)=i\pi$. Доказать, что многозначная функция $\sqrt{f(z)}$ распадается в G на регулярные ветви.

Пусть $g(z)$ — регулярная ветвь функции $\sqrt{f(z)}$ в G такая, что $g(\infty)=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}(i+1)$. Вычислить интеграл

$$J = \oint\limits_{|z|=3} \frac{dz}{g(z)}.$$

Заказ - Тираж - 300 МФТИ - 53

Семестровая контрольная работа по ТФКП
1 семестр 2005/2006 уч.г.

№ группы	**Фамилия студента**	**Сумма баллов**	**Оценка**	**Подпись препод.**

1.④ Разложить в ряд Лорана по степеням $(z+1-i)$ функцию

$$f(z) = \frac{2z-i}{(z+i)^2} - \frac{5z-4+3i}{z^2+z(i-2)-2i}$$

в кольце, которому принадлежит точка $z = \dfrac{3}{2}$. Найти радиусы кольца сходимости.

2.⑤ Найти все особые точки функции

$$f(z) = \frac{\operatorname{Cos}^3\left(\frac{14\pi}{3iz-z^2}\right)}{\left(i+\operatorname{Sh}\frac{\pi z}{2}\right)^2},$$

определить их тип. Ответ обосновать.

Применяя теорию вычетов, вычислить интегралы **3**, **4**, **5**:

3.④ $$\oint\limits_{|z+5|=2} \frac{i+\operatorname{Sh} z}{1-\operatorname{Cos} z}\, dz\,.$$

4.④ $$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(15x-2)\operatorname{Cos}(2-10x)}{25x^2-20x+8}\, dx\,.$$

5.⑥ $$\int_{-\infty}^{-2} \frac{\ln(-2-x)}{\sqrt{-2-x}\,(x^2+x)}\, dx\,.$$

6.⑦ Пусть $f(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\sqrt{\dfrac{3-z}{3+z}}$ в области $G = \{z \mid |z| > 3\}$ такая, что $f(\infty) = -i$. Доказать, что многозначная функция $\operatorname{Ln}(f(z)-i)$ распадается в G на регулярные ветви.

Пусть $g(z)$ — регулярная ветвь функции $\operatorname{Ln}(f(z)-i)$ в G такая, что $g(\infty) = \ln 2 - i\dfrac{\pi}{2}$. Вычислить интеграл

$$J = \oint\limits_{|z|=4} \frac{dz}{g(z)}.$$

Заказ - Тираж - 300 МФТИ - 54

Кузнцову Л.П.

2005 год

Ответы

Вариант 1

1. $$f(z) = \frac{3}{z-4} - \frac{3i}{(z+2i)^2} =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{-1} 3(z-3)^k + \sum_{k=0}^{+\infty} 3i(k+1)(-1)^{k+1}(3+2i)^{-k-2}(z-3)^k$$

$$K = \{z \mid 1 < |z-3| < \sqrt{13}\}$$

2. $-i$, $\frac{i}{3}$ – полюса 1-го порядка;

$\frac{i}{k}$ – полюса 3-го порядка, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0, 1, 3\}$;

i – СОТ;

0 – точка накопления полюсов;

∞ – полюс 3-го порядка.

3. $2\pi e^{-\frac{\pi}{2}}$.

4. $-\frac{\pi e^{-2}}{2}(3\cos 2 + 2\sin 2)$.

5. π.

6. $\frac{\pi(i-1)}{4\sqrt{2}}$.

Вариант 2

1. $f(z)=\dfrac{3}{(z-1)^2}+\dfrac{4i}{z-3i}\doteq$

$$=\sum_{k=-\infty}^{-2}(k+1)i^k(z-1-i)^k+\sum_{k=0}^{\infty}4i(-1)^k(1-2i)^{-k-1}(z-1-i)^k,$$

$$K=\{z\mid 1<|z-1-i|<\sqrt{5}\}.$$

---

2. ki, $k\in\mathbb{Z}\setminus\{-2,-1,0,1,2,3\}$, – полюса 4-го порядка;

$-2i, -i, 2i, 3i$ – простые полюса;

$\underset{\sim}{0, +i}$ – СОТ;

∞ – точка накопления полюсов.

---

3. $-2\pi i$.

4. $\dfrac{\pi e^{-6}}{3}(3\cos 4-4\sin 4)$.

5. $-\dfrac{\pi^2}{2\sqrt{2}}$.

6. $\dfrac{4\pi i}{(\ln 2+i\pi)^2}$.

Вариант 3

1. $f(z) = \dfrac{i}{(z-i)^2} + \dfrac{1}{z+2} = \dfrac{i}{(t-2)^2} + \dfrac{1}{t+i}$

$$= \sum_{k=-\infty}^{-1} i^{-k-1} (z+2-i)^k + \sum_{k=0}^{\infty} i(k+1) 2^{-k-2} (z+2-i)^k,$$

$$K = \{ z \mid 1 < |\underbrace{z+2-i}_{t}| < 2 \}.$$

2. $\dfrac{1}{1+4k}$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$ - полюса 3-го порядка;

$-\dfrac{1}{3}$ - полюс 1-го порядка;

$-\dfrac{1}{2}$ - СОТ;

0 - точка накопления полюсов;

∞ - устранимая.

3. $-4\pi(\pi+1)$.

4. $-\dfrac{\pi e^{-3}}{4}(5\cos 7 + 7\sin 7)$.

5. π.

6. $\dfrac{2\sqrt{2}(1+i)}{\sqrt{\pi}}$.

Вариант 1

1. $f(z) = -\dfrac{3i}{(z+i)^2} - \dfrac{3}{z-2} =$

$$= \sum_{k=-\infty}^{-2} 3i(k+1)(1-2i)^{-k-2}(z+1-i)^k + \sum_{k=0}^{+\infty} 3(3-i)^{-k-1}(z+1-i)^k,$$

$$K = \{z \mid \sqrt{5} < |z+1-i| < \sqrt{10}\}.$$

---

2. $0,\ 3i$ — СОТ;
$-i,\ 7i$ — полюса 1-го порядка;
$-i+4ki,\ k \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1, 2\}$ — полюса 4-го порядка;
∞ — точка накопления полюсов.

---

3. $4\pi i \operatorname{ch}(2\pi)$.

4. $\dfrac{\pi e^{-4}}{5}(2\cos 2 - 3\sin 2)$.

5. $-\dfrac{\pi \ln 2}{\sqrt{2}}$.

6. $\dfrac{3\pi i}{\left(\ln 2 - \frac{i\pi}{2}\right)^2}$.