Московский физико-технический институт
(государственный университет)

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина: **Математический анализ** **Год: 2002/2003**

Вариант: **1** **Курс:** **1** **Семестр:** **весенний**

1.④ Найти первый и второй дифференциал функции $f(x,y) = x^{\cos y}$ в точке $M(1,\pi)$. В окрестности этой точки функцию $f(x,y)$ разложить по формуле Тейлора до членов второго порядка включительно.

2.③ Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры

$$0 \leqslant y \leqslant \sqrt{\frac{1}{2}+x^2}\cdot\sin x, \qquad 0 \leqslant x \leqslant \pi.$$

3.⑤ Исследовать на дифференцируемость в точке $(0,0)$ функцию $f(x,y)$, если

$$f(x,y) = \frac{(y^2-xy)^2}{\left(x^8+y^8-\frac{4}{3}\,x^4y^4\right)^{1/3}} \quad \text{при} \quad x^2+y^2>0 \quad \text{и} \quad f(0,0)=0.$$

Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость интегралы

4.④ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(e^x-1)^6 dx}{\operatorname{ch}^\alpha 6x(\sqrt[4]{1+x^6}-1)^\alpha}$. | **5.**⑤ $\displaystyle\int_2^{+\infty} \operatorname{sh}\frac{\cos x}{\sqrt[5]{x^2-\ln x}}\,dx$.

6.③ Исследовать на сходимость ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{\pi^{n/2}n!}\operatorname{arctg} n$.

Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на интервалах $(0,1)$ и $(1,+\infty)$:

7.⑤ последовательность
$f_n(x) = x^3 n\operatorname{sh}\dfrac{n^2+x}{n^3+x^3}$,
$n \in \mathbb{N}$;

8.④ ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n^3x}\left(\frac{1}{nx}-\sin\frac{1}{nx}\right)^{\frac{7}{8}}.$$

9.③ Разложить в ряд по степеням x функцию $f(x) = \arccos\sqrt{\dfrac{1}{2}-\dfrac{x^2}{8}}$ и найти радиус сходимости полученного ряда.

10.⑦ На интервале $(0;+\infty)$ исследовать на равномерную непрерывность функции

$$f(x) = x\ln(1+x^2); \quad g(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x}.$$

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина: $\boxed{\textbf{Математический анализ}}$ **Год: 2002/2003**

Вариант: $\boxed{2}$ **Курс:** $\boxed{1}$ **Семестр:** $\boxed{\textbf{весенний}}$

1.④ Найти первый и второй дифференциал функции $f(x,y) = e^{\operatorname{tg}\frac{x}{y}}$ в точке $M(0,1)$. В окрестности этой точки функцию $f(x,y)$ разложить по формуле Тейлора до членов второго порядка включительно.

2.③ Найти площадь поверхности, образованной вращением кривой $y = \sqrt{1+x^2}$, $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{4}$ вокруг оси Ox.

3.⑤ Исследовать на дифференцируемость в точке $(0,0)$ функцию $f(x,y)$, если

$$f(x,y) = e^{\frac{xy^3}{\sqrt{x^4+y^4-\frac{1}{2}x^2y^2}}} - 1 \quad \text{при} \quad x^2+y^2>0 \quad \text{и} \quad f(0,0)=0.$$

Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость интегралы

4.④ $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg}^{\alpha}(x^2-x^3)\,dx}{(\ln x)^2\left(\cos\frac{\pi x}{2}\right)^{2\alpha-1}}$.

5.⑤ $\displaystyle\int_2^{+\infty} \arcsin\frac{\cos x}{x^{\frac{1}{e}}+e^{-x}}\,dx$.

6.③ Исследовать на сходимость ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(n\ln\frac{2n+1}{2n-1}-1\right)$.

Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на интервалах $(0,1)$ и $(1,+\infty)$:

7.⑤ последовательность $f_n(x) = \dfrac{1}{x+1}\cos\dfrac{(n-1)x}{n^2x^2+1}$, $n \in \mathbb{N}$;

8.④ ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{x}}\left(\operatorname{sh}\frac{x}{n}-\frac{x}{n}\right)^{\frac{3}{4}}$.

9.③ Разложить в ряд по степеням x функцию $f(x) = \operatorname{arcctg}\dfrac{x}{\sqrt{9-x^2}}$ и найти радиус сходимости полученного ряда.

10.⑦ На интервале $(0;+\infty)$ исследовать на равномерную непрерывность функции

$$f(x) = \frac{\sin x^3}{x}; \quad g(x) = \sqrt{x}\sin x.$$

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина: $\boxed{\textbf{Математический анализ}}$ **Год: 2002/2003**

Вариант: $\boxed{3}$ **Курс:** $\boxed{1}$ **Семестр:** $\boxed{\textbf{весенний}}$

1.④ Найти первый и второй дифференциал функции $f(x,y) = y^{\sin x}$ в точке $M\left(-\dfrac{\pi}{2},1\right)$. В окрестности этой точки функцию $f(x,y)$ разложить по формуле Тейлора до членов второго порядка включительно.

2.③ Найти длину дуги кривой $y = \ln(1+\sin x)$, $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.

3.⑤ Исследовать на дифференцируемость в точке $(0,0)$ функцию $f(x,y)$, если

$$f(x,y) = \frac{x^3 - xy^2}{\left(x^6 + y^6 - \frac{3}{2}\,x^3y^3\right)^{1/4}} \quad \text{при} \quad x^2+y^2>0 \quad \text{и} \quad f(0,0)=0.$$

Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость интегралы

4.④ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sh}^{\alpha} x\,dx}{(e^{4x}-1)(\sqrt{1+x^2}-1)^{\alpha}}$.

5.⑤ $\displaystyle\int_2^{+\infty} (\ln(3x+\sin x) - \ln(3x - \sin x))\,dx$.

6.③ Исследовать на сходимость ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+1}\sin\frac{1}{n}}{\pi^n n!}$.

Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на интервалах $(0,1)$ и $(1,+\infty)$:

7.⑤ последовательность
$f_n(x) = x^2 n \operatorname{tg}\dfrac{n+x}{n^2+x^2}$,
$n \in \mathbb{N}$;

8.④ ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{n^2x}\left(\frac{1}{nx} - \ln\left(1+\frac{1}{nx}\right)\right)^{\frac{6}{7}}.$$

9.③ Разложить в ряд по степеням x функцию $f(x) = \arccos\dfrac{2x^3}{\sqrt{1+4x^6}}$ и найти радиус сходимости полученного ряда.

10.⑦ На интервале $(0;+\infty)$ исследовать на равномерную непрерывность функции

$$f(x) = x^2 \operatorname{arctg} x; \quad g(x) = \frac{\operatorname{arctg} x^2}{x}.$$

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина: **Математический анализ** **Год: 2002/2003**

Вариант: **4** **Курс:** **1** **Семестр:** **весенний**

1.④ Найти первый и второй дифференциал функции $f(x,y) = \operatorname{th}(x\cos y - 1)$ в точке $M(1,0)$. В окрестности этой точки функцию $f(x,y)$ разложить по формуле Тейлора до членов второго порядка включительно.

2.③ Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми, заданными в полярных координатах

$$r = 2\cos^2\frac{\varphi}{3}, \quad r = 1, \quad r \geqslant 1, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi.$$

3.⑤ Исследовать на дифференцируемость в точке $(0,0)$ функцию $f(x,y)$, если

$$f(x,y) = e^{\overline{\frac{-2}{x^2+y^2-\frac{5}{4}xy}}} \quad \text{при} \quad x^2+y^2>0 \quad \text{и} \quad f(0,0)=0.$$

Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость интегралы

4.④ $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arcsin^{\alpha}(x^3-x^4)}{(\ln x)^2(\sin\pi x)^{2\alpha-1}}\,dx$.

5.⑤ $\displaystyle\int_2^{+\infty} \operatorname{tg}\frac{\sin x}{\sqrt[7]{x^3-x}}\,dx$.

6.③ Исследовать на сходимость ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\ln n}{n}\right)^n$.

Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на интервалах $(0,1)$ и $(1,+\infty)$:

7.⑤ последовательность $\displaystyle f_n(x) = \ln\left(x + \frac{n^2+x^2}{e^{nx}}\right)$, $n \in \mathbb{N}$;

8.④ ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt[3]{x}}\left(e^{\frac{x}{n}} - \frac{x+n}{n}\right)^{\frac{4}{5}}$.

9.③ Разложить в ряд по степеням x функцию $f(x) = x^2\arccos\dfrac{4x}{4+x^2}$ и найти радиус сходимости полученного ряда.

10.⑦ На интервале $(0;+\infty)$ исследовать на равномерную непрерывность функции

$$f(x) = \cos\left(x^2-\frac{1}{x}\right) - \cos\left(x^2+\frac{1}{x}\right); \quad g(x) = \sin(x\sin x).$$

Математический анализ, 1 курс, 2 семестр, 2002/2003 г. Вариант (31)

1.④ $df = -dx$; $d^2f = 2(dx)^2$; $f(x,y) = 1 - (x-1) + (x-1)^2 + o((x-1)^2 + (y-\pi)^2)$.

2.③ $V = \dfrac{\pi^4}{6}$.

3.⑤ $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$, дифференцируемая.

4.④ Сходится при $\alpha \in \left[1; \dfrac{7}{6}\right)$.

5.⑤ Сходится условно.

6.③ Расходится.

7.⑤ $f(x) = x^3$; сходится равномерно на $(0;1)$; неравномерно на $(1;+\infty)$.

8.④ Сходится равномерно на $(1;+\infty)$; неравномерно на $(0;1)$.

9.③ $f(x) = \dfrac{\pi}{4} + \sum\limits_{k=0}^{\infty} C^k_{-\frac{1}{2}} (-1)^k \dfrac{x^{4k+2}}{2^{4k+2}(4k+2)}$; $R = 2$.

10.⑦ $f(x)$ — не является равномерно непрерывной; $g(x)$ — равномерно непрерывна.

Математический анализ, 1 курс, 2 семестр, 2002/2003 г. Вариант (32)

1.④ $df = dx$; $d^2f = (dx)^2 - 2dx\,dy$; $f(x,y) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - x(y-1) + o(x^2 + (y-1)^2)$.

2.③ $S = \left(\dfrac{3}{16} + \dfrac{1}{4}\ln 2\right)\sqrt{2}\pi$.

3.⑤ $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$, дифференцируемая.

4.④ Сходится при $\alpha \in \left[-\dfrac{1}{2}; 0\right)$.

5.⑤ Сходится условно.

6.③ Сходится.

7.⑤ $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$; сходится равномерно на $(1;+\infty)$; неравномерно на $(0;1)$.

8.④ Сходится равномерно на $(0;1)$; неравномерно на $(1;+\infty)$.

9.③ $f(x) = \dfrac{\pi}{2} + \sum\limits_{k=0}^{\infty} C^k_{-\frac{1}{2}} (-1)^k \dfrac{x^{2k+1}}{3^{2k+1}(2k+1)}$; $R = 3$.

10.⑦ $f(x)$ — равномерно непрерывна; $g(x)$ — не является равномерно непрерывной.

Математический анализ, 1 курс, 2 семестр, 2002/2003 г. **Вариант (33)**

1.④ $df = -dy$; $d^2 f = 2(dy)^2$;
$f(x, y) = 1 - (y-1) + (y-1)^2 + o\left(\left(x + \frac{\pi}{2}\right)^2 + (y-1)^2\right)$.

2.③ $L = \ln \dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$.

3.⑤ $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$, дифференцируемая.

4.④ Сходится при $\alpha \in (0; 4]$.

5.⑤ Сходится условно.

6.③ Сходится.

7.⑤ $f(x) = x^2$; сходится равномерно на $(0; 1)$; неравномерно на $(1; +\infty)$.

8.④ Сходится равномерно на $(1; +\infty)$; неравномерно на $(0; 1)$.

9.③ $f(x) = \dfrac{\pi}{2} - \sum\limits_{k=0}^{\infty} C^{k}_{\left(-\frac{1}{2}\right)}{}_{-1} \cdot 6 \cdot 4^k \dfrac{x^{6k+3}}{6k+3}$; $R = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

10.⑦ $f(x)$ — не является равномерно непрерывной; $g(x)$ — равномерно непрерывна.

Математический анализ, 1 курс. 2 семестр, 2002/2003 г. **Вариант (34)**

1.④ $df = dx$; $d^2 f = -(dy)^2$; $f(x, y) = (x-1) - \frac{1}{2}(y)^2 + o((x-1)^2 + (y)^2)$.

2.③ $S = \dfrac{3\pi}{16} + \dfrac{3}{2}$.

3.⑤ $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$, дифференцируемая.

4.④ Сходится при $\alpha \in [-2; 0)$.

5.⑤ Сходится условно.

6.③ Расходится.

7.⑤ $f(x) = \ln x$; сходится равномерно на $(1; +\infty)$; неравномерно на $(0; 1)$.

8.④ Сходится равномерно на $(0; 1)$; неравномерно на $(1; +\infty)$.

9.③ $f(x) = \dfrac{\pi}{2} x^2 + \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \dfrac{x^{2k+3}}{4^k (2k+1)}$; $R = 2$.

10.⑦ $f(x)$ — равномерно непрерывна; $g(x)$ — не является равномерно непрерывной.
