Московский физико-технический институт
(государственный университет)

Семестровая контрольная работа по ТФКП

Курс: 3, Вариант: 1, осенний семестр 2003/2004 уч.г.

1.④ Найти все особые точки функции

$$f(z)=\frac{z^2\sin^2 z\cdot\sin\frac{1}{z-\pi/2}}{(\cos z-1)^2}\,e^{\frac{\sin z}{z}},$$

определить их тип. Ответ обосновать.

2.④ Разложить в ряд Лорана по степеням $(z-2-i)$ функцию

$$f(z)=\frac{z^2-2iz+6}{z^2(z+3i)}$$

в кольце, которому принадлежит точка $z=5+i$. Указать границы кольца сходимости.

Применяя теорию вычетов, вычислить интегралы **3, 4, 5**:

3.⑤ $$\oint\limits_{|z+1+i|=2}\frac{z-1}{(z+1)\sin\frac{1}{z}}\,dz\,.$$

4.④ $$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\cos(2-x)}{4x^2+1}\,dx\,.$$

5.⑥ $$\int_1^2\sqrt[5]{\frac{(2-x)^3}{(x-1)^3}}\cdot\frac{1}{x}\,dx\,.$$

6.⑦ Пусть $g(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\{\sqrt{1+4z^2}\}$ в плоскости с разрезом по кривой

$$\gamma=\left\{z\ \middle|\ |z|=\frac{1}{2},\quad \frac{\pi}{2}\leqslant\arg z\leqslant 2\pi\right\}$$

такая, что $g(0)=1$. Пусть $f(z)=\dfrac{z}{(g(z)+3)^2}$. Найти $\operatorname*{res}\limits_{\infty} f$ и вычислить интеграл

$$J=\oint\limits_{|z|=\frac{1}{\sqrt{2}}}f(z)\,dz.$$

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

Семестровая контрольная работа по ТФКП
Курс: 3, Вариант: 2, осенний семестр 2003/2004 уч.г.

1.④ Найти все особые точки функции
$$f(z) = \frac{\left(z - \frac{\pi}{2}\right)^3 \cos z \cdot \cos \frac{1}{z-\pi}}{(\sin z - 1)^2}\, e^{\frac{\cos z}{z-\pi/2}},$$
определить их тип. Ответ обосновать.

2.④ Разложить в ряд Лорана по степеням $(z+3+5i)$ функцию
$$f(z) = \frac{16 - z^2}{z(z+4i)^2}$$
в кольце, которому принадлежит точка $z = -1 - i$. Указать границы кольца сходимости.

Применяя теорию вычетов, вычислить интегралы **3, 4, 5**:

3.⑤ $$\oint\limits_{|z-1|=1} \frac{z\,dz}{(\pi - 4z)(1 - \sin 2z)}\,.$$

4.④ $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin(2-x)}{x^2+2}\,dx\,.$$

5.⑥ $$\int_{-2}^{-1} \frac{x-1}{\sqrt[5]{(x+2)^4(x+1)}} \cdot \frac{1}{x}\,dx\,.$$

6.⑦ Пусть $h(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\operatorname{Ln}\dfrac{2-iz}{z-1}$ в плоскости с разрезом по кривой
$$\gamma = \left\{ z \mid \ |z| = 1, \quad 0 \leqslant \arg z \leqslant \frac{3}{2}\pi \right\} \cup [-2i, -i]$$
такая, что $\operatorname{Im} h(\infty) = \dfrac{3\pi}{2}$. Найти $h(0)$ и вычислить интеграл
$$J = \oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{h(z)}{\sin^3 z}\,dz.$$

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

Семестровая контрольная работа по ТФКП
Курс: 3, Вариант: 3, осенний семестр 2003/2004 уч.г.

1.④ Найти все особые точки функции
$$f(z) = \frac{z \cdot \sin^3 z \cdot \cos \frac{1}{1-z}}{(\cos z - 1)^2}\, e^{\frac{\sin^2 z}{z^2}},$$
определить их тип. Ответ обосновать.

2.④ Разложить в ряд Лорана по степеням $(z - 1 - 3i)$ функцию
$$f(z) = \frac{z^2 - 4}{z(z-2i)^2}$$
в кольце, которому принадлежит точка $z = 1$. Указать границы кольца сходимости.

Применяя теорию вычетов, вычислить интегралы **3, 4, 5**:

3.⑤ $$\oint\limits_{|z+1-i|=2} \frac{z+i}{(z-i)\operatorname{sh}\frac{1}{2z}}\, dz\ .$$

4.④ $$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos(1-2x)}{x^2+4}\, dx\ .$$

5.⑥ $$\int_{-1}^{0} \sqrt[7]{\frac{x^4}{(x+1)^4}} \cdot \frac{1}{x-1}\, dx\ .$$

6.⑦ Пусть $g(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\{\sqrt{1-z^2}\}$ в плоскости с разрезом по кривой
$$\gamma = \{z \mid \ |z| = 1, \quad \operatorname{Im} z \geqslant 0\}$$
такая, что $g(0) = -1$. Пусть $f(z) = \dfrac{z}{(g(z)-3)^2}$. Найти $\operatorname*{res}\limits_{\infty} f$ и вычислить интеграл
$$J = \oint\limits_{|z|=2} f(z)\, dz.$$

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

Семестровая контрольная работа по ТФКП

Курс: 3, Вариант: 4, осенний семестр 2003/2004 уч.г.

1.④ Найти все особые точки функции
$$f(z) = \frac{\left(z - \frac{\pi}{2}\right)^2 \cos^2 z \cdot \sin\frac{1}{z+1}}{(\sin z - 1)^2}\, e^{\frac{\cos^2 z}{(z-\pi/2)^2}},$$
определить их тип. Ответ обосновать.

2.④ Разложить в ряд Лорана по степеням $(z+2+2i)$ функцию
$$f(z) = \frac{2z^2 + iz + 5}{z^2(z-5i)}$$
в кольце, которому принадлежит точка $z = 1+i$. Указать границы кольца сходимости.

Применяя теорию вычетов, вычислить интегралы **3, 4, 5**:

3.⑤ $$\oint\limits_{|z-1|=1} \frac{z\,dz}{(\pi - 3z)(1+\cos 3z)} .$$

4.④ $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin(1-\sqrt{2}x)}{2x^2+1}\,dx .$$

5.⑥ $$\int_0^1 \frac{x+1}{\sqrt[7]{x^3(1-x)^4}} \cdot \frac{1}{(x-2)}\,dx .$$

6.⑦ Пусть $h(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\operatorname{Ln}\dfrac{\frac{1}{2}+iz}{1-z}$ в плоскости с разрезом по кривой
$$\gamma = \left\{ z \mid\ |z| = 1, \quad -\frac{3\pi}{2} \leqslant \arg z \leqslant 0 \right\} \cup \left[\frac{i}{2}, i\right]$$
такая, что $\operatorname{Im} h(\infty) = -\dfrac{\pi}{2}$. Найти $h(0)$ и вычислить интеграл
$$J = \oint\limits_{|z|=\frac{1}{4}} \frac{h(z)}{\operatorname{sh}^3 z}\,dz.$$

31

1④	$z=0$ -УОТ; $z=2\pi k$ -П 2-го порядка; $z=\dfrac{\pi}{2}$ - СОТ; $z=\infty$ -НОТ (ТНП)
2④	$f(z)=\dfrac{-2i}{z^2}+\dfrac{1}{z+3i}=\lvert w=z-2-i\rvert=\dfrac{-2i}{w^2}\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{2+i}{w}\right)^2}+\dfrac{1}{2+4i}\dfrac{1}{1+\dfrac{w}{2+4i}}=$ $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(z-2-i)^n}{(2+4i)^{n+1}}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n 2in(2+i)^{n-1}}{(z-2-i)^{n+1}}$, $\sqrt{5}<\lvert z-1-3i\rvert<2\sqrt{5}$
3⑤	$I=-2\pi i\operatorname*{res}\limits_{z=\infty} f(z)=\dfrac{13\pi i}{3}$
4③	$I=\operatorname{Re}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{xe^{i(x-2)}dx}{4x^2+1}=\operatorname{Re}\left[2\pi i\operatorname*{res}\limits_{z=\frac{i}{2}}\dfrac{ze^{i(z-2)}}{4z^2+1}\right]=\operatorname{Re}\left[2\pi i\dfrac{\cos 2-i\sin 2}{8\sqrt{e}}\right]=\dfrac{\pi}{4\sqrt{e}}\sin 2$
5⑥	$I-I\cdot e^{-\frac{6\pi i}{5}}=2\pi i\left(\operatorname*{res}\limits_{z=0} f(z)+\operatorname*{res}\limits_{z=\infty} f(z)\right)$, $\operatorname*{res}\limits_{z=0} f(z)=e^{-\frac{3\pi i}{5}}\sqrt[5]{8}$, $\operatorname*{res}\limits_{z=\infty} f(z)=-C_{-1}=-e^{-\frac{3\pi i}{5}}$, $I=\dfrac{\pi\left(\sqrt[5]{8}-1\right)}{\sin\dfrac{3\pi}{5}}$
6⑦	$\operatorname*{res}\limits_{z=\infty} f(z)=-C_{-1}=-\dfrac{1}{4}$, $I=-2\pi i\left(\operatorname*{res}\limits_{z=-\sqrt{2}} f(z)+\operatorname*{res}\limits_{z=\infty} f(z)\right)=-2\pi i\left(-1-\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{5\pi i}{2}$

32

1④	$z=\dfrac{\pi}{2}$ -УОТ; $z=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k$ -П 3-го порядка; $z=\pi$ - СОТ; $z=\infty$ -НОТ (ТНП)
2④	$f(z)=-\dfrac{1}{z}+\dfrac{8i}{(z+4i)^2}=\lvert w=z+3+5i\rvert=\dfrac{1}{3+5i}\dfrac{1}{1-\dfrac{w}{3+5i}}+\dfrac{8i}{w^2}\dfrac{1}{\left(1-\dfrac{3+i}{w}\right)^2}=$ $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z+3+5i)^n}{(3+5i)^{n+1}}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{8in(3+i)^{n-1}}{(z+3+5i)^{n+1}}$, $\sqrt{10}<\lvert z+3+5i\rvert<\sqrt{34}$
3⑤	$I=2\pi i\operatorname*{res}\limits_{z=\frac{\pi}{4}} f(z)=-\dfrac{\pi^2 i}{48}$
4③	$I=-\operatorname{Im}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{xe^{i(x-2)}dx}{x^2+2}=-\operatorname{Im}\left[2\pi i\operatorname*{res}\limits_{z=\sqrt{2}i}\dfrac{ze^{i(z-2)}}{z^2+2}\right]=-\operatorname{Im}\left[2\pi i\dfrac{\cos 2-i\sin 2}{2e^{\sqrt{2}}}\right]=-\dfrac{\pi}{e^{\sqrt{2}}}\cos 2$
5⑥	$I-I\cdot e^{-\frac{8\pi i}{5}}=2\pi i\left(\operatorname*{res}\limits_{z=0} f(z)+\operatorname*{res}\limits_{z=\infty} f(z)\right)$, $\operatorname*{res}\limits_{z=0} f(z)=\dfrac{-1}{2^{\frac{4}{5}}e^{-\frac{i\pi}{5}}}$, $\operatorname*{res}\limits_{z=\infty} f(z)=-C_{-1}=-e^{\frac{\pi i}{5}}$, $I=-\dfrac{\pi\left(1+2^{-\frac{4}{5}}\right)}{\sin\dfrac{\pi}{5}}$
6⑦	$h(0)=\ln 2+i3\pi$, $I=2\pi i\operatorname*{res}\limits_{z=0} f(z)=2\pi i\left(\dfrac{\ln 2+i3\pi}{2}+\left(\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{2}\right)\right)=-3\pi^2+i\pi\left(\dfrac{5}{4}+\ln 2\right)$

33

1④	$z=0$ -УОТ; $z=2\pi k$ -ПП; $z=1$ - СОТ; $z=\infty$ -НОТ (ТНП)
2④	$f(z)=\frac{1}{z}+\frac{4i}{(z-2i)^2}=\lvert w=z-1-3i\rvert=\frac{1}{1+3i}\frac{1}{1+\frac{w}{1+3i}}+\frac{4i}{w^2}\frac{1}{\left(1+\frac{1+i}{w}\right)^2}=$ $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-1-3i)^n}{(1+3i)^{n+1}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}4in(1+i)^{n-1}}{(z-1-3i)^{n+1}}$, $\sqrt{2}<\lvert z-1-3i\rvert<\sqrt{10}$
3⑤	$I=-2\pi i\operatorname{res}_{z=\infty}f(z)=-\frac{49\pi i}{6}$
4③	$I=\operatorname{Re}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xe^{i(2x-1)}dx}{x^2+4}=\operatorname{Re}\left[2\pi i\operatorname{res}_{z=2i}\frac{ze^{i(2z-1)}}{z^2+4}\right]=\operatorname{Re}\left[2\pi i\frac{\cos 1-i\sin 1}{2e^4}\right]=\frac{\pi}{e^4}\sin 1$
5⑥	$I-I\cdot e^{-\frac{8\pi i}{7}}=2\pi i\left(\operatorname{res}_{z=1}f(z)+\operatorname{res}_{z=\infty}f(z)\right)$, $\operatorname{res}_{z=1}f(z)=\frac{e^{-\frac{4\pi i}{7}}}{\sqrt[7]{16}}$, $\operatorname{res}_{z=\infty}f(z)=-C_{-1}=-e^{-\frac{4\pi i}{7}}$, $I=\frac{\pi\left(\frac{1}{\sqrt[7]{16}}-1\right)}{\sin\frac{4\pi}{7}}$
6⑦	$\operatorname{res}_{z=\infty}f(z)=-C_{-1}=1$, $I=-2\pi i\left(\operatorname{res}_{z=2\sqrt{2}i}f(z)+\operatorname{res}_{z=\infty}f(z)\right)=-2\pi i(-1+1)=0$

34

1④	$z=\frac{\pi}{2}$ -УОТ; $z=\frac{\pi}{2}+2\pi k$ -П 2-го порядка; $z=-1$ - СОТ; $z=\infty$ -НОТ (ТНП)
2④	$f(z)=\frac{i}{z^2}+\frac{2}{z-5i}=\lvert w=z+2+2i\rvert=\frac{i}{w^2}\frac{1}{\left(1-\frac{2+2i}{w}\right)^2}-\frac{2}{2+7i}\frac{1}{1-\frac{w}{2+7i}}=$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{in(2+2i)^{n-1}}{(z+2+2i)^{n+1}}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(z+2+2i)^n}{(2+7i)^{n+1}}$, $2\sqrt{2}<\lvert z+2+2i\rvert<\sqrt{53}$
3⑤	$I=2\pi i\operatorname{res}_{z=\frac{\pi}{3}}f(z)=-\frac{\pi^2 i}{27}$
4③	$I=-\operatorname{Im}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xe^{i(\sqrt{2}x-1)}dx}{2x^2+1}=-\operatorname{Im}\left[2\pi i\operatorname{res}_{z=\frac{i}{\sqrt{2}}}\frac{ze^{i(\sqrt{2}z-1)}}{2z^2+1}\right]=-\operatorname{Im}\left[2\pi i\frac{\cos 1-i\sin 1}{4e}\right]=-\frac{\pi}{2e}\cos 1$
5⑥	$I-I\cdot e^{\frac{8\pi i}{7}}=2\pi i\left(\operatorname{res}_{z=2}f(z)+\operatorname{res}_{z=\infty}f(z)\right)$, $\operatorname{res}_{z=2}f(z)=\frac{3e^{\frac{4\pi i}{7}}}{\sqrt[7]{8}}$, $\operatorname{res}_{z=\infty}f(z)=-C_{-1}=-e^{\frac{4\pi i}{7}}$, $I=\frac{\pi\left(\frac{3}{\sqrt[7]{8}}-1\right)}{\sin\frac{4\pi}{7}}$
6⑦	$h(0)=-\ln 2-i2\pi$, $I=2\pi i\operatorname{res}_{z=0}f(z)=2\pi i\left(-\frac{1}{2}(-\ln 2-i2\pi)+\left(2+\frac{1}{2}\right)\right)=-2\pi^2+i\pi(5+\ln 2)$