ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина $\boxed{\text{Математический анализ}}$ Курс $\boxed{1}$ Семестр $\boxed{2}$

2005/2006 уч.г.

Фамилия студента ______________________ **№ группы** ________

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

1.⑤ Найти первый и второй дифференциалы в точке (0,1) функции $z = z(x,y)$, заданной неявно уравнением $z^2 - 2xy = \ln z + y$, где $z(0,1) = 1$. Разложить функцию $z = z(x,y)$ по формуле Тейлора в окрестности этой точки до $o(x^2 + (y-1)^2)$.

2.④ Найти длину дуги кривой: $y = \ln(1 + \cos x), \quad 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.

3.④ Исследовать на дифференцируемость в точке $M_0(0,0)$ функцию

$$z(x,y) = \begin{cases} \ln\left(1 + x \sin \sqrt[3]{\dfrac{y^4}{x}}\right), & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

4.④ Разложить по степеням x функцию

$$f(x) = \operatorname{arcctg} \frac{2x^2}{\sqrt{9 - 4x^4}}$$

и найти радиус сходимости полученного ряда.

5.③ Исследовать на сходимость ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{(3n)!}{(2n)^{3n}}}$.

---

6. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость несобственные интегралы:

а) ④ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(\sqrt[3]{x} + x^3)^\alpha}{(x^{17} + 2) \arcsin \frac{x^2}{x^2+2}}\, dx$; б) ⑥ $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x^3\, dx}{(x + \cos \ln x)^\alpha}$.

---

7. Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множествах $E_1 = (0,1)$ и $E_2 = (1, +\infty)$

а) ⑤ функциональную последовательность $f_n(x) = \dfrac{n^2}{x} \sin \dfrac{x}{n^2} + \sin x$,

б) ④ ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{x+n} \operatorname{sh} \frac{x}{n}$.

8.⑤ Пусть ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ сходится. Верно ли, что ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ сходится? Доказать или опровергнуть примером.

Заказ - Тираж - 300 МФТИ - 61

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина $\boxed{\text{Математический анализ}}$ Курс $\boxed{1}$ Семестр $\boxed{2}$
2005/2006 уч.г.

Фамилия студента ______________________________ **№ группы** ________

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

1.⑤ Найти первый и второй дифференциалы в точке $(1{,}0)$ функции $z = z(x{,}y)$, заданной неявно уравнением $z\,\mathrm{sh}(xy) + 2\ln z = 0$, где $z(1{,}0) = 1$. Разложить функцию $z = z(x{,}y)$ по формуле Тейлора в окрестности этой точки до $o((x-1)^2 + y^2)$.

2.④ Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox дуги кривой

$$y = \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}x^2}, \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

3.④ Исследовать на дифференцируемость в точке $M_0(0{,}0)$ функцию

$$z(x{,}y) = \sin^3\left(y + \sqrt[5]{xy}\right).$$

4.④ Разложить по степеням x функцию

$$f(x) = \arccos\sqrt{\frac{1}{2} + 9x^2}$$

и найти радиус сходимости полученного ряда.

5.③ Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^2+2n}\right)^{n^2+n+5}.$$

---

6. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость несобственные интегралы:

а) ④ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(x^{1/2} + x^3)^\alpha}{(x^8+2)\ln(e^x - x)}\,dx$; б) ⑥ $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos\sqrt[3]{x}\,dx}{(x - \mathrm{arctg}\,x)^\alpha}$.

---

7. Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множествах $E_1 = (0{,}1)$ и $E_2 = (1, +\infty)$

а) ⑤ функциональную последовательность $f_n(x) = \dfrac{n}{x}\,\mathrm{sh}\,\dfrac{x}{n} - \mathrm{ch}\,x$,

б) ④ ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{1+nx}\right)}{\sqrt{1+nx}}$.

8.⑤ Пусть функция $f(x)$ непрерывна на луче $[1,+\infty)$, и интеграл $\displaystyle\int_1^{+\infty} f^2(x)\,dx$ сходится. Верно ли, что интеграл $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{f(x)}{\sqrt{x}}\,dx$ сходится? Доказать или опровергнуть примером.

Заказ - Тираж - 300 МФТИ - 62

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина $\boxed{\text{Математический анализ}}$ Курс $\boxed{1}$ Семестр $\boxed{2}$

2005/2006 уч.г.

Фамилия студента ______________________ **№ группы** ________

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

1.⑤ Найти первый и второй дифференциалы в точке (0,1) функции $z = z(x,y)$, заданной неявно уравнением $z + xy = 2\operatorname{tg} z - 3\sin x$, где $z(0,1) = 0$.
Разложить функцию $z = z(x,y)$ по формуле Тейлора в окрестности этой точки до $o(x^2 + (y-1)^2)$.

2.④ Найти длину дуги кривой: $y = \ln(\cos x + \sin x), \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}$.

3.④ Исследовать на дифференцируемость в точке $M_0(0,0)$ функцию

$$z(x,y) = \begin{cases} y \operatorname{arctg} \dfrac{x^{4/3}}{y}, & y \neq 0, \\ 0 & y = 0. \end{cases}$$

4.④ Разложить по степеням x функцию

$$f(x) = \ln\left(2x^2 + \sqrt{9 + 4x^4}\right)$$

и найти радиус сходимости полученного ряда.

5.③ Исследовать на сходимость ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{\frac{(2n)!}{n^{2n}}}$.

---

6. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость несобственные интегралы:

а) ④ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(\sqrt{x^3} + x^2)^\alpha}{(x^{11} + 3)\operatorname{arctg}^2 x}\, dx$; б) ⑥ $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos x^2\, dx}{(x + \sin\ln x)^\alpha}$.

---

7. Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множествах $E_1 = (0,1)$ и $E_2 = (1, +\infty)$

а) ⑤ функциональную последовательность $f_n(x) = n^2 \sin^2 \dfrac{x}{n} + \cos x$,

б) ④ ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{x+n} \operatorname{th} \frac{x}{n}$.

8.⑤ Пусть ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, причем $a_n \geqslant 0$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Верно ли, что ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{a_n}{n}}$ сходится? Доказать или опровергнуть примером.

Заказ - Тираж - 300 МФТИ - 63

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина $\boxed{\text{Математический анализ}}$ Курс $\boxed{1}$ Семестр $\boxed{2}$
2005/2006 уч.г.

Фамилия студента ______________________ **№ группы** ________

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

1.⑤ Найти первый и второй дифференциалы в точке $(2,-2)$ функции $z = z(x,y)$, заданной неявно уравнением $z^2 + x^2 + 2y = \sin(zx)$, где $z(2,-2) = 0$. Разложить функцию $z = z(x,y)$ по формуле Тейлора в окрестности этой точки до $o((x-2)^2 + (y+2)^2)$.

2.④ Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox дуги кривой

$$y = \sqrt{2 + x^2}, \quad 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{3}.$$

3.④ Исследовать на дифференцируемость в точке $M_0(0,0)$ функцию

$$z(x,y) = \operatorname{arctg}^2\left(x + \sqrt[3]{xy}\right).$$

4.④ Разложить по степеням x функцию

$$f(x) = \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{4 + 9x^2}{4 - 9x^2}}$$

и найти радиус сходимости полученного ряда.

5.③ Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^{n^3-4n+5}.$$

---

6. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость несобственные интегралы:

а) ④ $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{(x^{1/4}+x^{3/4})^\alpha}{(x^8+4)\sin\frac{x^3}{x^3+3}}\,dx$; б) ⑥ $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin\sqrt{x}\,dx}{(x^2-\sqrt{x-1})^\alpha}$.

---

7. Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множествах $E_1 = (0,1)$ и $E_2 = (1,+\infty)$

а) ⑤ функциональную последовательность $f_n(x) = n\ln\left(1 + \dfrac{1}{nx}\right) - 5\operatorname{sh}x$,

б) ④ ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{1+nx}\right)}{(1+nx)^{1/3}}$.

8.⑤ Пусть функция $f(x)$ непрерывна и неотрицательна на интервале $[1,+\infty)$, а интеграл $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится. Верно ли, что интеграл $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{f(x)}}{x}\,dx$ сходится? Доказать или опровергнуть примером.

Заказ - Тираж - 300 МФТИ - 64

Ответы. Матанализ 1 курс, 2 семестр, 2005/2006 г. **Вариант (61)**

1.⑤ $z(x,y) = 1+2(x-0)+1\cdot(y-1)+\frac{1}{2}(-12(x-0)^2-8x(y-1)-3(y-1)^2)+o(x^2+(y-1)^2)$.

2.④ $l = \ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = 2\ln(\sqrt{2}+1)$. | **3.**④ Дифференцируема.

4.④ $f'(x) = -\frac{4}{3}x\left(1-\frac{4}{9}x^4\right)^{-1/2}$, $f(x) = \frac{\pi}{2}+\sum\limits_{n=0}^{\infty} C^n_{-\frac{1}{2}}\frac{(-1)^{n+1}4^{n+1}}{(4n+2)3^{2n+1}}x^{4n+2}$, $R = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

?

5.③ Сходится.

---

6. а) ⑤ $x\to 0$: $f\sim\frac{C}{x^{2-\frac{\alpha}{3}}}$; $x\to+\infty$: $f\sim\frac{C}{x^{17-3\alpha}}$, сходится при $3<\alpha<\frac{16}{3}$;

б) ⑥ Сх. абсолютно при $\alpha>1$, условно при $-2<\alpha\leqslant 1$; расходится при $\alpha\leqslant -2$.

---

7. а) ⑤ Сходится к функции $f(x)=\sin x+1$, равномерно на E_1 и неравномерно на E_2.

б) ④ На E_1: $|a_n|\leqslant\frac{1}{n}\operatorname{sh}\frac{1}{n}\sim\frac{1}{n^2}$, сходится по т. Вейерштрасса,

на E_2: $x_n=n\Rightarrow a_n(n)=\frac{1}{2}\operatorname{sh}1$, сходится неравномерно.

8.⑤ $\left|\frac{a_n}{n}\right|\leqslant\frac{1}{2}\left(a_n^2+\frac{1}{n^2}\right)$, ряд сходится по признаку сравнения.

Ответы. Матанализ 1 курс, 2 семестр, 2005/2006 г. **Вариант (62)**

1.⑤ $z(x,y) = 1-\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}\left(-(x-1)y+\frac{3}{4}y^2\right)+o((x-1)^2+y^2)$. ?

2.④ $S=\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$. | **3.**④ Дифференцируема.

4.④ $f'(x) = -18x(1-324x^4)^{-1/2}$, $f(x)=\frac{\pi}{4}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}C^n_{-\frac{1}{2}}\frac{(-1)^{n+1}18^{2n+1}}{4n+2}x^{4n+2}$, $R=\frac{1}{3\sqrt{2}}$.

5.③ Сходится. $\sqrt[n]{a_n}\xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-2}$ $C^n_{-\frac{1}{2}} = \frac{(-1)^n(2n-1)!!}{n!\,2^n}$

3.64 ан. Б64

6. а) ⑤ 4 $x\to 0$: $f\sim\frac{C}{x^{3-\frac{\alpha}{4}}}$; $x\to+\infty$: $f\sim\frac{C}{x^{8-\frac{3\alpha}{4}}}$, сходится при $8<\alpha<\frac{28}{3}$;

б) ⑥ Сх. абсолютно при $\alpha>1$, условно при $\frac{2}{3}<\alpha\leqslant 1$; расходится при $\alpha\leqslant\frac{2}{3}$.

---

7. а) ⑤ Сходится к функции $f(x)=1-\operatorname{ch}x$, равномерно на E_1 и неравномерно на E_2.

б) ④ На E_1: $a_n\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{1}{2}$, сх. неравномерно,

на E_2: $0\leqslant a_n(x)\leqslant\frac{1}{(1+n)^{3/2}}$, сходится равномерно по т. Вейерштрасса.

8.⑤ $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}\ln x}$, интеграл расходится.

Ответы. Матанализ 1 курс, 2 семестр, 2005/2006 г. **Вариант (63)**

1.⑤ $z(x,y) = 4x + \frac{1}{2}(2 \cdot 1 \cdot x \cdot (y-1)) + o(x^2 + (y-1)^2)$.

2.④ $l = \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = \ln(\sqrt{2}+1)$. | 3.④ Дифференцируема.

4.④ $f'(x) = \frac{4}{3}x\left(1 + \frac{4}{9}x^4\right)^{-1/2}$, $f(x) = \ln 3 + \sum\limits_{n=0}^{\infty} C^n_{-\frac{1}{2}} \frac{4^{n+1}}{(4n+2)3^{2n+1}} x^{4n+2}$, $R = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

5.③ Сходится.

---

6. а) ⑤ $x \to 0$: $f \sim \frac{C}{x^{2-\frac{3\alpha}{2}}}$; $x \to +\infty$: $f \sim \frac{C}{x^{11-2\alpha}}$, сходится при $\frac{2}{3} < \alpha < 5$;

б) ⑥ Сх. абсолютно при $\alpha > 1$, условно при $-1 < \alpha \leqslant 1$; расходится при $\alpha \leqslant -1$.

---

7. а) ⑤ Сходится к функции $f(x) = x^2 + \cos x$, равномерно на E_1 и неравномерно на E_2.

б) ④ На E_1: $|a_n(x)| \leqslant \frac{1}{n} \operatorname{th} \frac{1}{n}$, сходится равномерно,

на E_2: $x_n = n \Rightarrow a_n(n) = \frac{1}{2} \operatorname{th} 1$, сходится неравномерно.

8.⑤ $a_n = \sqrt{\frac{1}{n \ln^2 n}}$, ряд расходится.

Ответы. Матанализ 1 курс, 2 семестр, 2005/2006 г. **Вариант (64)**

1.⑤ $z(x,y) = 2(x-2) + (y+2) + \frac{1}{2}\left(3(x-2)^2 + 3(x-2)(y+2) + (y+2)^2\right) + o((x-2)^2 + (y+2)^2)$.

2.④ $S = 2\pi \frac{1}{\sqrt{2}}\left(2\sqrt{3} + \ln(\sqrt{3}+2)\right)$. ? | 3.④ Дифференцируема.

4.④ $f'(x) = \frac{9}{4}x\left(1 - \frac{81}{16}x^4\right)^{-1/2}$, $f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum\limits_{n=0}^{\infty} C^n_{-\frac{1}{2}} \frac{(-1)^n 3^{4n+2}}{(4n+2)2^{4n+2}} x^{4n+2}$, $R = \frac{2}{3}$.

5.③ Сходится.

3.62

6. а) ⑤ 4 $x \to 0$: $f \sim \frac{C}{x^{2-\frac{\alpha}{2}}}$; $x \to +\infty$: $f \sim \frac{C}{x^{1+8-3\alpha}}$, сходится при $2 < \alpha < \frac{8}{3}$;

б) ⑥ Сх. абсолютно при $\alpha > \frac{1}{2}$, условно при $\frac{1}{4} < \alpha \leqslant \frac{1}{2}$; расходится при $\alpha \leqslant \frac{1}{4}$.

---

7. а) ⑤ Сходится к функции $f(x) = \frac{1}{x} - 5 \operatorname{sh} x$, неравномерно на E_1 и равномерно на E_2.

б) ④ На E_1: $a_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\operatorname{arctg} 1/2}{\sqrt[3]{2}}$, сходится неравномерно,

на E_2: $0 \leqslant a_n(x) \leqslant \frac{1}{(1+n)^{4/3}}$, сходится равномерно.

8.⑤ $\frac{\sqrt{f(x)}}{x} \leqslant \frac{1}{2}\left(f(x) + \frac{1}{x^2}\right)$, интеграл сходится по признаку сравнения.
