Московский физико-технический институт
(государственный университет)

Семестровая контрольная работа по ТФКП

Курс: 3, Вариант: 1, осенний семестр 1999/2000 уч.г.

---

1. Разложить в ряд Лорана по степеням $z-1$ функцию
$$f(z) = \frac{z+2i}{iz^2-4z+5i}$$
в кольце, которому принадлежит точка $z = 3$. Указать границы кольца сходимости.

---

2. Исследовать особые точки функции
$$f(z) = \frac{z^2+(\ln 2)^2}{\left(\sin z - \frac{5}{4}\right)} \operatorname{ch}\frac{1}{z}\,.$$

Применяя теорию вычетов, вычислить интегралы:

---

3. $\displaystyle \oint_{|z-1|=1} \frac{z\,dz}{(\pi-2z)\cos z}\,.$

---

4. $\displaystyle \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(7x+2)}{x^2+6x+19}\,dx\,.$

---

5. $\displaystyle \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{(x+1)\,dx}{\sqrt{x}(x^2+16)}\,.$

---

6. Пусть $g(z)$ — регулярная ветвь функции $\operatorname{Ln}\dfrac{2i-z}{z+1}$ в плоскости с разрезом по кривой $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, где $\gamma_1 = \{|z| = 2, \ -\pi \leqslant \arg z \leqslant \frac{\pi}{2}\}$, $\gamma_2 = \{z = x, \ -2 \leqslant x \leqslant -1\}$ такая, что $g(0) = \ln 2 - \dfrac{3\pi i}{2}$. Вычислить интеграл
$$\oint_{|z|=4} \frac{zg(z)}{1+\operatorname{tg}\frac{1}{z}}\,dz.$$

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

Семестровая контрольная работа по ТФКП
Курс: 3, Вариант: 2, осенний семестр 1999/2000 уч.г.

---

1. Разложить в ряд Лорана по степеням $z+2-i$ функцию
$$f(z)=\frac{(1+i)z+4}{iz^2+z(5-i)-5}$$
в кольце, которому принадлежит точка $z=1-2i$. Указать границы кольца сходимости.

---

2. Исследовать особые точки функции
$$f(z)=\frac{z^2-(\ln 2)^2}{\operatorname{ch} z+\frac{5}{4}}\cos\frac{1}{z}\,.$$

Применяя теорию вычетов, вычислить интегралы:

---

3. $\displaystyle\oint_{|z|=3}\frac{z^2}{2-z}\cdot\cos\frac{1}{2-z}\,dz\,.$

---

4. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(3x+5)}{x^2-2x+10}\,dx\,.$

---

5. $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\sqrt[4]{x}\,dx}{(x+1)(x+4)}\,.$

---

6. Пусть $f(z)$ — регулярная ветвь функции $\sqrt[3]{z^2(i-z)}$ в плоскости с разрезом по кривой $\gamma=\gamma_1\cup\gamma_2$, где $\gamma_1=\left\{\left|z+\frac{i}{2}\right|=\frac{3}{2}\,,\ \operatorname{Re} z\geqslant 0\right\}$, $\gamma_2=\{|z+i|=1,$ $\operatorname{Re} z\leqslant 0\}$ такая, что $f(-i)=\sqrt[3]{2}e^{i\frac{7\pi}{6}}$. Вычислить интеграл
$$\oint_{|z|=4}\frac{f(z)}{1+e^{2/z}}\,dz=J.$$

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

Семестровая контрольная работа по ТФКП

Курс: 3, Вариант: 3, осенний семестр 1999/2000 уч.г.

---

1. Разложить в ряд Лорана по степеням $z+3$ функцию
$$f(z) = \frac{(1+i)z+6}{iz^2+(5+i)z+5}$$
в кольце, которому принадлежит точка $z = 1+i$. Указать границы кольца сходимости.

---

2. Исследовать особые точки функции
$$f(z) = \frac{z^2+(\ln 2)^2}{\left(\operatorname{sh} z - \frac{3}{4}\right)} \sin\frac{1}{z}.$$

Применяя теорию вычетов, вычислить интегралы:

---

3. $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{dz}{(e^{2z}-1)(z+1)^2}$.

---

4. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(5x+3)}{x^2+4x+8}\, dx$.

---

5. $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\, dx}{x^2+x+1}$.

---

6. Пусть $g(z)$ — регулярная ветвь функции $\operatorname{Ln}\dfrac{1-z}{iz+1}$ в плоскости с разрезом по кривой $\gamma = \{|z|=1,\ \dfrac{\pi}{2} \leqslant \arg z \leqslant 2\pi\}$ такая, что $g(0) = -4\pi i$. Вычислить интеграл
$$\oint_{|z|=5} \frac{zg(z)}{\sin\frac{1}{z}+\cos\frac{1}{z}}\, dz.$$

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

Семестровая контрольная работа по ТФКП

Курс: 3, Вариант: 4, осенний семестр 1999/2000 уч.г.

---

1. Разложить в ряд Лорана по степеням $z-2-2i$ функцию
$$f(z)=\frac{(2i-1)z}{iz^2+z(2i+1)+2}$$
в кольце, которому принадлежит точка $z=-1$. Указать границы кольца сходимости.

---

2. Исследовать особые точки функции
$$f(z)=\frac{z^2+(\ln 2)^2}{\cos z+\frac{3i}{4}}\operatorname{sh}\frac{1}{z}\,.$$

Применяя теорию вычетов, вычислить интегралы:

---

3. $\displaystyle\oint_{|z|=1}\frac{dz}{e^{2/z}-e^{1/z}}\,dz\,.$

---

4. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(2x+6)}{x^2-6x+18}\,dx\,.$

---

5. $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\sqrt[3]{x}\,dx}{(x+1)(x+8)}\,.$

---

6. Пусть $f(z)$ — регулярная ветвь функции $\sqrt[4]{z^2(2i+z)^2}$ в плоскости с разрезом по кривой $\gamma=\gamma_1\cup\gamma_2$, где $\gamma_1=\{|z+2i|=2,\ \operatorname{Re}z\leqslant 0\}$, $\gamma_2=\{|z+3i|=1,\ \operatorname{Re}z\geqslant 0\}$ такая, что $f(-3i)=\sqrt{3}e^{\pi i}$. Вычислить интеграл
$$\oint_{|z|=5}\frac{f(z)}{1+2\sin\frac{1}{z}}\,dz=J.$$

7(4) **Найдите функцию w(z), конформно отображающую полукруг |z| < 1, Im z > 0 на верхнюю полуплоскость и удовлетворяющую условиям: w(-1) = 0, w(0) = 1, w(1) = ∞.**

Ответы

Вариант 91 (1 сем. 1999/2000)

1. $f(z)=\dfrac{i}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}(z-1)^n}{(1+5i)^{n+1}}-\dfrac{i}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(i-1)^n}{(z-1)^{n+1}}\,,\ \ \sqrt{2}<|z-1|<\sqrt{26}\,.$

2. $z=0$ — существенно особая точка;
$z=\infty$ — предельная точка полюсов;
$z_k=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k\pm i\ln 2$ — полюсы 1-го порядка.

3. $\pi i\,.$

4. $-\dfrac{\pi e^{-7\sqrt{10}}}{\sqrt{10}}\sin 19\,.$

5. $\dfrac{5\pi}{8\sqrt{2}}\,.$

6. $-2\pi i\left(3\pi i-2i-\dfrac{7}{2}\right)=2\pi\left(3\pi-2+\dfrac{7i}{2}\right).$ 7. $w=\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)^2$

7(4) Отобразите конформно на верхнюю полуплоскость плоскость с разрезом по отрезку [1;2i].

Вариант 92 (1 сем. 1999/2000)

1. $f(z) = i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+2-i)^n}{2^{n+1}(1+2i)^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3-i)^n}{(z+2-i)^{n+1}}$, $\sqrt{10} < |z+2-i| < 2\sqrt{5}$,

2. $z = 0$ — существенно особая точка;

   $z = \infty$ — предельная точка полюсов;

   $z_k = \pm\ln 2 + (2k+1)\pi i$ — полюсы 1-го порядка.

3. $-7\pi i$.

4. $\frac{\pi}{3}e^{-9}\cos 8$.

5. $\frac{\pi(2-\sqrt{2})}{3}$.

6. $\frac{\pi(3-i)}{9}$.

7. $w = \sqrt{\frac{z-1}{2i-z}}$

7(4) Найдите функцию w(z), конформно отображающую полукруг |z| < 1, Im z > 0 на верхнюю полуплоскость и удовлетворяющую условиям: w(-1) = 1, w(0) = ∞, w(1) = -1.

3 курс 1 сем

Вариант 93 (1 сем. 1999/2000)

1. $f(z) = i\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+3)^n}{(3+5i)^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(z+3)^{n+1}}$, $2 < |z+3| < \sqrt{34}$.

2. $z = 0$ — существенно особая точка;
$z = \infty$ — предельная точка полюсов;
$z_k = \ln 2 + 2\pi k i$; $z_k = -\ln 2 + (2k+1)\pi i$ — полюсы 1-го порядка.

3. $\pi i \left(1 - \frac{4e^{-2}}{(e^{-2}-1)^2}\right) = \pi i \left(1 - \frac{1}{\operatorname{sh}^2 1}\right)$.

4. $-\frac{\pi}{2} e^{-10} \sin 7$.

5. $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$.

6. $-2\pi i \left(\frac{33\pi}{4} + 1\right) i = 2\pi \left(1 + \frac{33\pi}{4}\right)$.

7. $w = -\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$

7(4) Отобразите конформно на верхнюю полуплоскость круг $|z| < 1$ с разрезом по радиусу $[0;1]$.

Вариант 94 (1 сем. 1999/2000)

1. $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-2-2i)^n}{2^n (2+i)^{n+1}} + i \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2+i)^n}{(z-2-2i)^{n+1}}$, $\sqrt{5} < |z-2-2i| < 2\sqrt{5}$.

2. $z = 0$ — существенно особая точка;
   $z = \infty$ — предельная точка полюсов;
   $z_k = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k - i\ln 2$, $z_k = \frac{\pi}{2} + 2\pi k + i\ln 2$ — полюсы 1-го порядка.

3. $J = \frac{13\pi i}{6}$.

4. $\frac{\pi}{3} e^{-6} \cos 12$.

5. $\frac{2\pi}{7\sqrt{3}}$.

6. $\pi(4i - 9)$.

7. $W = \left(\frac{\sqrt{z}+1}{\sqrt{z}-1} \right)^2$.