ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина Математический анализ

Курс 1 Семестр 2 2007/2008 уч.г.

Фамилия студента ________________________ **№ группы** ________

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

1. ④ Вычислить первый и второй дифференциалы функции $z(x,y)$, неявно заданной уравнением

$$\frac{\pi}{4} + z - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} - \operatorname{arctg} z = 0$$

в точке $A(1;1;1)$.

---

2. ④ Найти площадь боковой поверхности, образованной вращением кривой

$$x = 2\sin t, \quad y = 2\cos^2 t$$

вокруг оси Oy, $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

---

3. ③ Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{(n+1)^n}.$$

---

4. ④ Разложить функцию $f(x) = (x+2)\ln(2x^2 + 8x + 9)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = -2$ и найти радиус сходимости полученного ряда.

---

5. Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множествах $E_1 = (0;1)$ и $E_2 = (1;+\infty)$

а) ⑤ функциональную последовательность $f_n(x) = \sin\left(\dfrac{\pi n}{2 + n^2 x}\right)$;

б) ⑤ функциональный ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{x^2}{n}} \left(\operatorname{ch}\frac{x^3}{n} - 1\right)$.

---

6. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость интегралы

а) ⑤ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln^{\alpha}(1+x^2)}{\sqrt{\sqrt{x} + x^4}}\, dx$; б) ⑤ $\displaystyle\int_0^{\pi/4} e^{\alpha \operatorname{ctg} x} \cos(\operatorname{ctg} x)\, dx$.

---

7. ⑤ Исследовать на дифференцируемость в точке $O(0;0)$ функцию

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^5}{y^3} \ln\left(1 + \dfrac{y^4}{(x^2+y^2)^2}\right), & y \neq 0, \\ 0, & y = 0. \end{cases}$$

Заказ - Тираж - МФТИ - 81

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина $\boxed{\text{Математический анализ}}$

Курс $\boxed{1}$ Семестр $\boxed{2}$ 2007/2008 уч.г.

Фамилия студента ______________________________ **№ группы** ________

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

1.④ Вычислить первый и второй дифференциалы функции $z(x,y)$, неявно заданной уравнением

$$3 - 2y - z + \ln(x + y - z) = 0.$$

в точке $A(1;1;1)$.

2.④ Найти длину дуги кривой, заданной параметрически:

$$x = 2\cos^2 t, \quad y = 2\sin t, \quad t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

3.③ Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{2n}}{(2n)!}.$$

4.④ Разложить функцию $f(x) = (x-3)\ln(18x - 3x^2 - 25)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = 3$ и найти радиус сходимости полученного ряда.

---

5. Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множествах $E_1 = (0;1)$ и $E_2 = (1;+\infty)$

а) ⑤ функциональную последовательность $f_n(x) = \operatorname{arctg}(nx - \ln n)$;

б) ⑤ функциональный ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{-n^2 x} \operatorname{arctg}\frac{1}{n^2 x}$.

---

6. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость интегралы

а) ⑤ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sh}^{1/3} x}{(e^x - \cos x)^{\alpha}}\,dx$; б) ⑤ $\displaystyle\int_0^1 x^{\alpha}\cos(e^{1/x})\,dx$.

7.⑤ Исследовать на дифференцируемость в точке $O(0;0)$ функцию

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{y}\operatorname{arctg}\dfrac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}}, & y \neq 0, \\ 0, & y = 0. \end{cases}$$

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина $\boxed{\text{Математический анализ}}$

Курс $\boxed{1}$ Семестр $\boxed{2}$ 2007/2008 уч.г.

Фамилия студента ______________________ **№ группы** ________

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

1.④ Вычислить первый и второй дифференциалы функции $z(x,y)$, неявно заданной уравнением
$$-\frac{\pi}{4} - z + xy + \operatorname{arctg} z = 0$$
в точке $A(1;1;1)$.

2.④ Найти площадь боковой поверхности, образованной вращением кривой $y = \sqrt{x^2+2x-1}$ вокруг оси Ox, $x \in [1;2]$.

3.③ Исследовать на сходимость ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{(n+2)^n}.$$

4.④ Разложить функцию $f(x) = (x-2)\ln(x^2-4x+7)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = 2$ и найти радиус сходимости полученного ряда.

---

5. Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множествах $E_1 = (0;1)$ и $E_2 = (1;+\infty)$

а) ⑤ функциональную последовательность $f_n(x) = \cos(\pi n e^{-n/x})$;

б) ⑤ функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{x}{n^3}} \ln\left(1 + \frac{x}{n^2}\right)$.

---

6. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость интегралы

а) ⑤ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln^\alpha(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x^3}+\sqrt[3]{x}}\,dx$; б) ⑤ $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{\alpha e^x} \sin(e^x)\frac{dx}{1+x}$.

7.⑤ Исследовать на дифференцируемость в точке $O(0;0)$ функцию
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^5}{x^3}\left(1 - \cos\dfrac{3x^2}{x^2+y^2}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина $\boxed{\text{Математический анализ}}$

Курс $\boxed{1}$ Семестр $\boxed{2}$ 2007/2008 уч.г.

Фамилия студента ______________________ **№ группы** ________

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

1.④ Вычислить первый и второй дифференциалы функции $z(x,y)$, неявно заданной уравнением

$$2 - 3x + z + \ln(-x + y + z) = 0.$$

в точке $A(1;1;1)$.

2.④ Найти длину дуги кривой, заданной уравнением

$$x = \frac{y^2}{2} - 2y, \quad y \in [2;4].$$

3.③ Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)^{3n}}{(3n)!}.$$

4.④ Разложить функцию $f(x) = (x+1)\ln(2x^2 + 4x + 5)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = -1$ и найти радиус сходимости полученного ряда.

---

5. Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множествах $E_1 = (0;1)$ и $E_2 = (1;+\infty)$

а) ⑤ функциональную последовательность $f_n(x) = \operatorname{arctg}(e^{\frac{n}{x}} - n)$;

б) ⑤ функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-nx^2} \sin \dfrac{\pi}{2n^2x^2}$.

---

6. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость интегралы

а) ⑤ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(x^{-3})}{(\operatorname{ch} x - \cos x)^{\alpha}}\, dx$; б) ⑤ $\displaystyle\int_0^1 e^{\alpha/x} \sin(e^{1/x})\, dx$.

7.⑤ Исследовать на дифференцируемость в точке $O(0;0)$ функцию

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^4}{x^2} \sin \dfrac{4x^2}{x^2+y^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Заказ - Тираж - МФТИ - 84

Ответы. Матан 1 курс, 2 семестр, 2007/2008 г. **Вариант (81)**

1.④ $dz = 2dx + 2dy, \quad d^2z = -2dx^2 - 8dxdy - 2dy^2$.

2.④ $\frac{2\pi}{3}\left(5\sqrt{5}-1\right)$.

3.③ $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2}{e}$; сходится.

4.④ $f = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\,2^n}{n}(x+2)^{2n+1}; \quad R = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

5. а) ⑤ $f_n(x) \to 0$; на E_1 - неравномерно; на E_2 - равномерно;
   б) ⑤ на E_1 - равномерно; на E_2 - неравномерно.

6. а) ⑤ Сходится при $\alpha > -\frac{3}{8}$, иначе расходится;
   б) ⑤ Сходится абсолютно при $\alpha \leqslant 0$, расходится при $\alpha > 0$.

7.⑤ Дифференцируема.

Ответы. Матан 1 курс, 2 семестр, 2007/2008 г. **Вариант (82)**

1.④ $dz = \frac{1}{2}dx - \frac{1}{2}dy, \quad d^2z = -\frac{1}{8}dx^2 - \frac{3}{4}dxdy - \frac{9}{8}dy^2$.

2.④ $\sqrt{5} + \frac{1}{2}\ln\left(2+\sqrt{5}\right)$.

3.③ $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{e^2}{4}$; расходится.

4.④ $f = (x-3)\ln 2 - \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n\,2^n}(x-3)^{2n+1}; \quad R = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

5. а) ⑤ $f_n(x) \to \frac{\pi}{2}$; на E_1 - неравномерно; на E_2 - равномерно;
   б) ⑤ на E_1 - неравномерно; на E_2 - равномерно.

6. а) ⑤ Сходится при $\frac{1}{3} < \alpha < \frac{4}{3}$, иначе расходится;
   б) ⑤ Сходится абсолютно при $\alpha > -1$, сходится условно при $\alpha \leqslant -1$.

7.⑤ Дифференцируема.

Ответы. Матан 1 курс, 2 семестр, 2007/2008 г. **Вариант (83)**

1.④ $dz = 2dx + 2dy, \quad d^2z = -4dx^2 - 4dxdy - 4dy^2$.

2.④ $\pi\sqrt{2}\left(3\sqrt{8} - 2\sqrt{3} + \ln\dfrac{2+\sqrt{3}}{3+\sqrt{8}}\right)$.

3.③ $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{3}{e}$; расходится.

4.④ $f = (x-2)\ln 3 + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n\,3^n}(x-2)^{2n+1}; \quad R = \sqrt{3}$.

5. а) ⑤ $f_n(x) \to 1$; на E_1 - равномерно; на E_2 - неравномерно;
   б) ⑤ на E_1 - равномерно; на E_2 - неравномерно.

6. а) ⑤ Сходится при $\alpha > -\dfrac{4}{3}$, иначе расходится;
   б) ⑤ Сходится абсолютно при $\alpha < 0$, сходится условно при $\alpha = 0$, расходится при $\alpha > 0$.

7.⑤ Дифференцируема.

Ответы. Матан 1 курс, 2 семестр, 2007/2008 г. **Вариант (84)**

1.④ $dz = 2dx - \dfrac{1}{2}dy, \quad d^2z = \dfrac{1}{2}dx^2 + \dfrac{1}{2}dxdy + \dfrac{1}{8}dy^2$.

2.④ $\sqrt{5} + \dfrac{1}{2}\ln\left(2+\sqrt{5}\right)$.

3.③ $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{e^3}{27}$; сходится.

4.④ $f = (x+1)\ln 3 + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}\,2^n}{n\,3^n}(x+1)^{2n+1}; \quad R = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

5. а) ⑤ $f_n(x) \to \dfrac{\pi}{2}$; на E_1 - равномерно; на E_2 - неравномерно;
   б) ⑤ на E_1 - неравномерно; на E_2 - равномерно.

6. а) ⑤ Сходится при $0 \leqslant \alpha < \dfrac{1}{2}$, иначе расходится;
   б) ⑤ Сходится абсолютно при $\alpha \leqslant 0$, сходится условно при $0 < \alpha \leqslant 1$, расходится при $\alpha > 1$.

7.⑤ Дифференцируема.

ИНСТРУКЦИЯ

по проверке экзаменационной контрольной работы по математическому анализу
(1 курс, 2 семестр, 2007/08 уч.г.)

Общая часть

Каждый проверяющий к началу устного экзамена 10 июня должен представить данные о количестве студентов, набравших 0-8, 9,10,..., 32, 33, 34-40 очков (желательно сообщить по электронной почте sivanov@mail.mipt.ru ответственной по 1 курсу Ивановой С.В. до 20.00 9 июня). Помимо этого, проверяющий представляет данные о количестве очков, полученном каждым студентом за каждую задачу, заполняя специальный бланк. На каждой работе должна быть четко выписана фамилия проверяющего.

За каждую арифметическую ошибку, не влияющую принципиально на ход решения задачи, снимается 1 очко.

Оценка отдельных задач

1.④ Верно найден первый дифференциал .... 1 очко
Верно найден второй дифференциал .... 3 очко

2.④ Задача правильно сведена к вычислению интеграла Римана .... 1 очко

3.③ По усмотрению проверяющего

4.④ Полученный результат не является рядом Тейлора........ за всю задачу 0 очков
Функция верно представлена рядом Тейлора .... 3 очка
Для радиуса сходимости непостредственно употреблена формула,
содержащая нулевые коэффициенты в знаменателе .... снять 1 очко

5(а,б).⑤ Верно исследована поточечная сходимость .... 1 очко
Верно исследована равномерная сходимость .... 2 очко
Верно исследована неравномерная сходимость .... 2 очко
Отсутствует доказательство поточечной сходимости,
но при этом доказывается отсутствие равномерной сходимость .... снять 1 очко

6а.⑤ Исследована особенность $x \to 0$ .... 2 очка
Исследована особенность $x \to \infty$ .... 3 очка

6б.⑤ Верно выполнена замена .... 1 очко
Исследована абсолютная сходимость .... 1 очко
Исследована сходимость (по признаку Дирихле)........ 1 очко
Доказана расходимость (варианты 1,3,4) .... 2 очка
Доказана условная сходимость (варианты 2,3,4)........ 1 очко

7.⑤ Верно найдены частные производные в точке .... 1 очко
Доказано равенство нулю двойного предела .... 4 очка
Фактически доказано лишь то, что предел
по каждому направлению равен 0 .... за задачу 1 очко

Заказ - Тираж - 50 МФТИ - 2008